

$$\begin{aligned} h_3(r, z) &= h_3(z)f_1(r), & h_1(r, z) &= h_1(z)f_2(r), & h_0(r, z) &= h_0(z)f_3(r), \\ E_3(r, z) &= E_3(z)f_1(r), & E_1(r, z) &= E_1(z)f_2(r), & h_2(r, z) &= h_2(z)f_3(r), \\ B_1(r, z) &= B_1(z)f_1(r), & B_3(r, z) &= B_3(z)f_2(r), & E_2(r, z) &= E_2(z)f_3(r), \\ & & & & B_2(r, z) &= B_2(z)f_3(r), \end{aligned}$$

которые строятся в вырожденных гипергеометрических функциях.

Возникающая из (1) система 10 дифференциальных уравнений для функций $F_A(z)$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}}C_1B_2 + \frac{\partial}{\partial z}B_1 - iWE_3 + i\Gamma h_3 &= Mh_3, & -\frac{1}{\sqrt{2}}C_1h_0 + iWh_3 &= ME_3, \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}C_1h_2 + \frac{\partial}{\partial z}h_3 &= MB_1, & \frac{1}{\sqrt{2}}C_2B_2 - \frac{\partial}{\partial z}B_3 - iWE_1 - i\Gamma h_1 &= Mh_1, \\ \frac{1}{\sqrt{2}}C_2h_0 + iWh_1 &= ME_1, & -\frac{\partial}{\partial z}h_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}C_2h_2 &= MB_3, \\ \frac{1}{\sqrt{2}}C_3E_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}C_4E_3 - \frac{\partial}{\partial z}E_2 &= Mh_0, & -\frac{1}{\sqrt{2}}C_4B_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}C_3B_3 - iWE_2 &= Mh_2, \\ -\frac{\partial}{\partial z}h_0 + iWh_2 &= ME_2, & \frac{1}{\sqrt{2}}C_3h_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}C_4h_3 &= MB_2 \end{aligned}$$

решена с помощью метода, обобщающего известный подход, примененный при решении аналогичной задачи в декартовых координатах. В результате получаем систему трех дифференциальных уравнений второго порядка для трех основных переменных, которая разбивается на одно независимое уравнение и систему двух связанных уравнений для двух других функций. Последняя система после диагонализации матрицы смешивания сводится к отдельным уравнениям для двух новых функций. Все три уравнения решаются в терминах вырожденных гипергеометрических функций.

Литература

1. Kisel V., Voynova Ya., Ovsyuk E., Balan V., Red'kov V. *Spin 1 Particle with Anomalous Magnetic Moment in the External Uniform Magnetic Field* // NPCS. 2017. Vol. 20. № 1. P. 21–39.
2. Ovsyuk E.M., Voynova Ya.A., Kisel V.V., Balan V., Red'kov V.M. *Spin 1 Particle with Anomalous Magnetic Moment in the External Uniform Electric Field* // Chapter in: Quaternions: Theory and Applications. Editor: Sandra Griffin. Nova Science Publishers, Inc. USA, 2017. P. 47–84.
3. Ovsyuk E., Voynova Ya., Kisel V., Balan V., Red'kov V. *Spin 1 Particle with Anomalous Magnetic Moment in the External Uniform Electric Field* // NPCS. 2018. Vol. 21. № 1. P. 1–20.
4. *Elementary Particles with Internal Structure in External Fields. Vol I. General Theory* V.V. Kisel [et al.]. // New York: Nova Science Publishers Inc. – 2018.; Vol II. Physical Problems.

ЧАСТИЦА СО СПИНОМ 3/2 В КУЛОНОВСКОМ ПОЛЕ, НЕРЕЛЯТИВИСТСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

А.В. Ивашкевич, В.М. Редьков

В работах [1, 2] был исследован вопрос о нерелятивистском приближении в декартовых координатах для теории Паули–Фирца для релятивистской частицы со спином 3/2. В данной работе получена система радиальных уравнений, описывающая нерелятивистскую частицу со спином 3/2 в кулоновском поле, при этом исходили из найденной ранее системы радиальных уравнений для релятивистской свободной частицы со спином 3/2 в случае сферической симметрии [3]. При разделении переменных в [3] диагонализировались операторы энергии, квадрата и третьей проекции полного углового момента, и пространственного отражения.

Используемая в настоящей работе процедура нерелятивистского приближения основана на известной общей методике, в данном случае она осуществлена в системе радиальных уравнений. В результате выведена система двух зацепляющихся уравнений второго порядка, описывающая нерелятивистскую частицу со спином $3/2$ в состояниях с квантовыми числами энергии, квадрата и третьей проекции полного углового момента, и чётности. При этом учтено присутствие кулоновского поля. Выведенная система уравнений приводит к двум отдельным уравнениям для новых радиальных функций. Их решения найдены в вырожденных гипергеометрических функциях, получены соответствующие спектры энергии.

Ниже приведены несколько основных соотношений, более детальный анализ будет опубликован отдельно. Общая подстановка для волновой функции, отвечающей диагонализации операторов энергии, квадрата и третьей проекции полного момента частицы, и оператора четности имеет вид

$$\Psi = \begin{vmatrix} f_0 D_{-1/2} & f_1 D_{-3/2} & f_2 D_{-1/2} & f_3 D_{+1/2} \\ g_0 D_{+1/2} & g_1 D_{-1/2} & g_2 D_{+1/2} & g_3 D_{+3/2} \\ \delta g_0 D_{-1/2} & \delta g_3 D_{-3/2} & \delta g_2 D_{-1/2} & \delta g_1 D_{+1/2} \\ \delta f_0 D_{+1/2} & \delta f_3 D_{-1/2} & \delta f_2 D_{+1/2} & \delta f_1 D_{+3/2} \end{vmatrix}, \quad \delta = \pm 1;$$

здесь используются D -функции Вигнера [4, 5]: $D_\sigma = D_{-m,\sigma}^j(\phi, \theta, 0)$; $j = 1/2, 3/2, 5/2, \dots$. Найденная в [3] релятивистская система радиальных уравнений в свободном случае имеет вид (учет кулоновского поля осуществляется формальной заменой $\epsilon \implies \epsilon + \alpha/r$)

$$\begin{aligned} \sqrt{2} \frac{d}{dr} g_1 + \frac{1}{r} (f_2 + \frac{3}{\sqrt{2}} g_1) + \frac{1}{\sqrt{2}r} (b f_1 - a f_3 + a \sqrt{2} g_2) + im(g_2 - \sqrt{2} f_3) &= 0, \\ \sqrt{2} \frac{d}{dr} f_3 + \frac{1}{r} (g_2 + \frac{3}{\sqrt{2}} f_3) + \frac{1}{\sqrt{2}r} (-a g_1 + b g_3 + a \sqrt{2} f_2) + im(\sqrt{2} g_1 - f_2) &= 0, \\ -i\epsilon f_1 + \frac{d}{dr} f_1 + \frac{1}{r} f_1 + \frac{1}{\sqrt{2}r} (b f_2 + b f_0) + im g_3 &= 0, \\ -i\epsilon(\sqrt{2} f_2 - g_1) + (-\sqrt{2} \frac{d}{dr} f_0 + \frac{d}{dr} g_1) - \frac{1}{r} (\frac{1}{\sqrt{2}} (f_0 - f_2) - g_1) + \\ + \frac{1}{\sqrt{2}r} (a g_2 - a g_0) - im(f_3 + \sqrt{2}(g_0 - g_2)) &= 0, \\ -i\epsilon \sqrt{2} g_1 + \frac{1}{r} (f_0 - \frac{1}{\sqrt{2}} g_1) + \frac{1}{\sqrt{2}r} (-b f_1 + a f_3 + a \sqrt{2} g_0) + im(\sqrt{2} f_3 + g_0) &= 0, \\ -i\epsilon \sqrt{2} f_3 + \frac{1}{r} (g_0 + \frac{1}{\sqrt{2}} f_3) + \frac{1}{\sqrt{2}r} (-a g_1 + b g_3 + a \sqrt{2} f_0) + im(\sqrt{2} g_1 - f_0) &= 0, \\ -i\epsilon(\sqrt{2} g_2 - f_3) + (-\sqrt{2} \frac{d}{dr} g_0 - \frac{d}{dr} f_3) - \frac{1}{r} (\frac{1}{\sqrt{2}} (g_0 + g_2) + f_3) + \\ + \frac{1}{\sqrt{2}r} (-a f_2 - a f_0) + im(\sqrt{2} f_0 + \sqrt{2} f_2 - g_1) &= 0, \\ -i\epsilon g_3 - \frac{d}{dr} g_3 - \frac{1}{r} g_3 + \frac{1}{\sqrt{2}r} (-b g_2 + b g_0) + im f_1 &= 0. \end{aligned}$$

В нерелятивистском приближении волновая функция частицы со спином $3/2$ описывается 4-компонентной волновой функцией (при учете оператора пространственного отражения остается две независимых переменных L_1, L_2)

$$\Psi_{E,j,m,\delta} = e^{-iEt} \begin{vmatrix} L_1(r)D_{-3/2} \\ L_2(r)D_{-1/2} \\ L_5(r)D_{+1/2} \\ L_6(r)D_{+3/2} \end{vmatrix} = e^{-iEt} \begin{vmatrix} L_1(r)D_{-3/2} \\ L_2(r)D_{-1/2} \\ \delta L_2(r)D_{+1/2} \\ \delta L_1(r)D_{+3/2} \end{vmatrix}.$$

После необходимых вычислений выведена система нерелятивистских уравнений 2-го порядка для двух функций

$$\begin{aligned} \left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} + 2m \left(E + \frac{\alpha}{r} \right) \right] L_1 &= \frac{1}{r^2} [b^2 L_1 + 3b L_2], \\ \left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} + 2m \left(E + \frac{\alpha}{r} \right) \right] L_2 &= \frac{1}{r^2} \left[\frac{2a(a+3) + b^2 + 10}{3} L_2 + b L_1 \right]. \end{aligned}$$

С использованием преобразования, диагонализующего матрицу смешивания, получаем отдельные уравнения для новых функций \bar{L}_1, \bar{L}_2

$$\begin{aligned} \left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} + 2m \left(E + \frac{\alpha}{r} \right) - \frac{(j+2)^2 - 1/4}{r^2} \right] \bar{L}_1 &= 0, \\ \left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} + 2m \left(E + \frac{\alpha}{r} \right) - \frac{j^2 - 1/4}{r^2} \right] \bar{L}_2 &= 0. \end{aligned}$$

Их решения строятся по стандартной методике в терминах вырожденных гипергеометрических функций (пусть $2\sqrt{-2mE}r = x$), при этом спектры энергий устанавливаются из требования полиномиальности

$$E_1 = -\frac{\alpha^2 m}{2N^2} = -\frac{\alpha^2 m}{2(j + \frac{5}{2} + n)^2}, \quad \bar{L}_1(x) = r^{j+3/2} e^{-\sqrt{-2mE}r} F(-n, 2j + 5, x);$$

$$E_2 = -\frac{\alpha^2 m}{2N^2} = -\frac{\alpha^2 m}{2(j + \frac{1}{2} + n)^2}, \quad \bar{L}_2(x) = r^{j-1/2} e^{-\sqrt{-2mE}r} F(-n, 2j + 1, x).$$

Литература

1. Ивашкевич А.В., Войнова Я.А., Овсюк К.М., Кисель В.В., Редьков В.М. *Частица со спином 3/2: теория Паули-Фирца, нерелятивистский предел* // Вес. Нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. 2020. Т. 56. № 3. С. 335–349.
2. Ивашкевич А.В., Василюк О.А., Овсюк Е.М., Кисель В.В., Редьков В.М. *Теория Фрадкина частицы со спином 3/2, нерелятивистский предел* // Вес. Нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. 2021. Том. 57, № 3. С. 353–373.
3. Ivashkevich, A.V. *Solutions with spherical symmetry of the equation for a spin 3/2 Particle* // Chapter in: Understanding Quaternions. - Eds. Du Peng, Haibao Hu, Dong Ding, and Zhouyue Li. New York: Nova Science Publishers Inc. 2020. P. 67–104.
4. Варшалович Д.А., Москалев А.Н., Херсонский В.К. *Квантовая теория углового момента*. Л.: Наука, 1975.
5. Редьков, В.М. *Тетрадный формализм, сферическая симметрия и базис Шредингера*. Минск: Белорусская наука, 2011.