

При помощи функции  $\tilde{K}(x, t)$  решение задачи (1),(2) определяется в виде

$$y(x) = \int_{x_0}^x \tilde{K}(x, t)z(t)dt,$$

где  $z(x)$  – частное решение уравнения первого порядка

$$\frac{dz}{dx} + a_1(x)z = f(x).$$

Например, для задачи Коши  $y'' = 6x$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 0$  функции  $\tilde{K}(x, t) = 1$ ,  $z(x) = 3x^2$  и решение при помощи этих функций имеет вид

$$\tilde{y}(x) = \int_0^x \tilde{K}(x, t)z(t)dt = 3 \int_0^x t^2 dt = x^3.$$

Если применить функцию  $K(x, t) = x - t$ , то решение определяется в виде

$$\tilde{y}(x) = \int_0^x K(x, t)f(t)dt = 6 \int_0^x (x - t)t dt = x^3.$$

#### Литература

1. Камке Э. *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям*. М.: Наука, 2003.
2. Наймарк М.А. *Линейные дифференциальные операторы*. М.: “Физматлит”, 2010. З. Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк Н.А. *Дифференциальные уравнения: примеры и задачи*. М.: Высшая школа, 1989.

### ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ КОНСТРУИРОВАНИЯ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ

**Н.П. Мацука, А.Н. Авлас, Г.Ф. Громько, А.Ф. Ильющенко, А.В.Лешок**

Композиционные материалы имеют большой круг приложения в современных технологических процессах: упрочняющие, теплозащитные, фрикционные или антифрикционные покрытия и др. Дисперсные или волокнистые включения меняют эксплуатационные характеристики материала по целому ряду физико-механических свойств. Некоторые свойства, например, плотность, теплоемкость, могут быть рассчитаны по правилу смесей и показывают неплохое сравнение с результатами экспериментального исследования этих свойств. Однако, одной их характеристик композита, которая чувствительна к наличию в нем включений, является эффективный коэффициент теплопроводности. Известно, что теория смесей для расчета коэффициента теплопроводности совершенно непригодна. Существующие расчетные формулы для нахождения коэффициента теплопроводности [1], как правило, получены в результате обработки экспериментальных данных. Оценку эффективных характеристик композиций можно делать с помощью математического моделирования.

В представленной работе рассмотрены фрикционные покрытия, используемые для тормозных дисков. Режимы работы тормозного диска связаны, в первую очередь, с распределением тепловых полей в процессе работы сил трения между тормозным диском и контртелом при торможении. Наиболее перспективными для узлов трения являются материалы, получаемые методом порошковой металлургии, так как технология порошковой металлургии позволяет в широких пределах варьировать состав, соответственно, свойства материала, получать материалы, которые невозможно получить традиционной металлургией, вводить в состав материала добавки различной природы и функционального назначения. Повышение износостойкости материалов узлов трения, работающих в условиях сухого трения и в условиях тяжелого нагружения, является на сегодняшний день одной из основополагающих задач. Решение данной задачи возможно за счет разработки материалов с высокой теплопроводностью. Актуальным является расчет коэффициента теплопроводности фрикционного материала на стадии разработки материала.

Учитывая размер частиц (от 10 мкм), структуру композиционного материала (от трех компонентов) и их расположение в матрице, а также физико-механические и тепловые свойства фаз, характер контактного взаимодействия и технологические особенности фрикционных покрытий, математическое моделирование работы фрикционного диска в полной постановке требует использования очень мелкой сетки. Для реальных размеров тормозных дисков это приводит к громоздким вычислениям и большим временным затратам. Особое внимание в работе уделено расчету и изучению коэффициента теплопроводности композиционного материала.

В работе использован ранее предложенный метод нахождения коэффициента теплопроводности композиционного материала на основе представительного объема [2]. Для материалов с регулярной структурой в качестве представительного объема принимается ячейка периодичности. Рассматривается такой прием, в котором выбирается относительно небольшая по размерам область, для которой можно ввести достаточно подробную сетку, чтобы отразить наличие структурных элементов. Общий подход к постановке задачи моделирования заключается в формулировке краевых задач теплопроводности для выбранного представительного объема. Так, для нахождения эффективного коэффициента теплопроводности, моделируется процесс распространения тепла по неоднородной среде, в которой теплофизические характеристики матрицы и включений могут сильно отличаться. Полагаем, что химические реакции между компонентами отсутствуют.

По анализу металлографического изображения реальной структуры покрытия строится карта образца. Представительный объем этой композиционной системы отражает структурные компоненты включений по форме и ориентации и с заданной степенью точности соответствует их объемному процентному содержанию в покрытии. Полагаем, что все включения распределены равномерно во всем объеме композиционного покрытия. Выбираем представительный объем системы так, чтобы он отражал все основные особенности покрытия и регулярно повторялся в покрытии. Причем размеры представительного объема должны быть больше характерных размеров включений, но меньше характерного размера покрытия диска [3].

Решением тепловой задачи с помощью сеточного метода является распределение температуры во всех точках выбранной сетки. С использованием процедуры осреднения по представительному объему можно получить интегральную характеристику, соответствующую количеству теплоты, накопленному в композиционном материале. Представляя выбранный объем как однородный, можем найти коэффициент теплопроводности, который и принимается за эффективный коэффициент теплопроводности для неоднородной среды. Описанный метод позволяет получить температурную зависимость эффективно-

го коэффициента теплопроводности. Например, выбирая краевые условия для тепловой задачи с разным диапазоном температур, получим распределение температуры в объеме. По описанной методике находим эффективный коэффициент теплопроводности, зависящий от температуры из выбранного диапазона.

Эффективность предлагаемого численного метода протестирована на двухкомпонентном материале, состоящем из 40% графита и 60% бронзы. Такой выбор сделан для удобства применения следующих двух методик: по правилу смеси коэффициент теплопроводности этого материала равен  $145,2 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$ , по формуле Оделевского –  $106,15$ . Расчетные результаты моделирования: для крупнодисперсного графита (100 мкм) –  $82,88$ , для мелкодисперсного (10 мкм) –  $69,08 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$ . Экспериментальным путем установлено, что коэффициент теплопроводности для материала с крупнодисперсным графитом составил  $75,4$ , тогда как с мелкодисперсным  $64,1 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$ . Таким образом, предлагаемый метод показывает не только наиболее близкие результаты к эксперименту, но и отражает существенное влияние размера частиц композиционного материала на коэффициент теплопроводности, что в других способах не учитывается вообще.

К преимуществам предлагаемого метода относится не только зависимость от размера частиц, входящих в состав композиционного материала, но и учет возможной анизотропии каждого компонента (т.е. отличие коэффициента теплопроводности композиционного материала в разных направлениях), а также температуру. В итоге получаем наиболее полную систему расчета эффективного коэффициента теплопроводности композиционного материала в зависимости от различных внешних и внутренних факторов.

Использование численного моделирования ускорит процесс, позволит сократить время, связанное с изготовлением экспериментальных образцов, проведением длительных стендовых и ресурсных испытаний. Программа расчета эффективного коэффициента теплопроводности окажется полезной для разработчиков теплопроводящих материалов, предназначенных для использования в радиоэлектронной промышленности, а так же для теплоизолирующих материалов – в области строительства.

#### Литература

1. Дульнев Г. Н., Заричняк Ю. П. *Теплопроводность смесей и композиционных материалов* // Л.: Энергия, 1974.
2. Громько Г. Ф., Мацука Н. П., Ильющенко А. Ф., Лешок А. В. *Численное исследование теплофизических свойств композиционного порошкового материала* // Порошковая металлургия. Минск. 2020. С. 12–18.
3. Барздокас Д. И., Зобнин А. И. *Математическое моделирование физических процессов в композиционных материалах периодической структуры* // М.: Едиториал УРСС, 2003.

## ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ И СТОХАСТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ АНАЛИЗА ИНВАЗИОННЫХ ПРОЦЕССОВ В БИОСИСТЕМАХ

А. Ю. Переварюха

Рассматривается моделирование особых ситуаций, когда регулируемое противодействие агрессивно размножающемуся виду в биологическом сообществе вырабатывается с запаздыванием и приводит к резкому переходу в фазу депрессии численности вселенца. Для остановки распространения вредоносного инвазивного вида сейчас часто проводится специальная интродукция вида-антагониста, но эффективность такого метода подавления на практике непостоянная. Биокibernетика развивает методики активного вмешательства и подавления инвазивных процессов. Разработаны