или

$$f_2(x,t)=\Phi\big(a_1x_1^{1-\gamma}+\ldots+a_nx_n^{1-\gamma},t\big),\quad \alpha_i,a_i\in\mathbb{R},\ i=1,\ldots,n,\ \gamma\in\mathbb{R}\setminus\{1\}.$$

Следствие 2. *Однородная степени* $q\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ *ПФ* (1) *учитывает нейтральный по Хиксу НТП, если и только если она может быть представлена или в аналитической форме*

$$f_1(x,t)=A(t)\prod_{i=1}^{n}x_i^{\alpha_i}$$

или

$$f_2(x,t)=A(t)\big(a_1x_1^{1-\gamma}+\ldots+a_nx_n^{1-\gamma}\big)^{q/(1-\gamma)},$$

где числа $\alpha_i,a_i\in\mathbb{R},\ i=1,\ldots,n,\ \alpha_1+\ldots+\alpha_n=q,\ \gamma\in\mathbb{R}\setminus\{1\},$ *а строго возрастающая функция* A *такая, что* $A(0)=1$ *есть индекс НТП.*

Работа выполнена при поддержке ГПНИ «*Общество и гуманитарная безопасность белорусского государства*» на 2021 – 2025 годы (НИР «*Разработка и применение эконометрических моделей развития малого и среднего предпринимательства в регионах для анализа и прогнозирования производства и экспорта товаров и услуг*, No. ГР 20211753»).

Литература

1. Hicks J. R. *The theory of wages.* London: Macmillan, 1932.

2. Blackorby Ch., Lovell C. A. K., Thursby M. C. *Extended Hicks neutral technical change* // The Economic Journal. 1976. Vol. 35, No. 344. P. 845–852.

3. Проневич А. Ф. Хацкевич Г. А. *Научно-технический прогресс и нейтральность по Хиксу, Харроду и Солоу: генезис, построение и обобщение* // Белорусский экономический журнал. 2020. № 3. С. 87–105.

4. Проневич А. Ф. *Продуктоувеличивающий научно-технический прогресс и нейтральность по Хиксу* // Вестник ЦЭМИ РАН. 2020. № 3. С. 4–27.

5. Проневич А. Ф. Хацкевич Г. А. *Динамические производственные функции для моделирования производственных процессов, учитывающих одновременно нейтральный по Хиксу и Харроду научно-технический прогресс* // Вестник ин-та экономики НАН Беларуси. 2022. Вып. 4. С. 9–27.

6. Проневич А. Ф. *О производственных функциях, учитывающих одновременно нейтральный по Хиксу, Харроду и Солоу научно-технический прогресс* // Экономика и математические методы. 2023. Т. 59. № 1. С. 23–28.

7. Клейнер Г. Б. *Производственные функции: теория, методы, применение.* М.: Финансы и статистика, 1986.

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ, ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ ПОКАЗАТЕЛИ ЭФФЕКТИВНОСТИ СЕТЕВОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ КОЛЛ-ЦЕНТРА

Т.В. Русилко, А.В. Паньков

Предметом математического исследования и моделирования в данной работе является колл-центр, который принимает входящие звонки, инициированные клиентами, нуждающимися в информационной поддержке. Естественной является ситуация, когда клиент колл-центра, получающий сигнал «занято», повторяет вызов до тех пор, пока не будет установлено требуемое соединение. В результате поток звонков, циркулирующих в колл-центре, состоит из потока первичных звонков и потока повторных вызовов. Кроме того, следует принимать во внимание поток нетерпеливых клиентов, которые считают, что остаточное время ожидания слишком велико, и навсегда покидают очередь в режиме ожидания соединения. Упомянутые особенности поведения клиентов телефонных услуг подчеркивают необходимость их учета в модели, что можно реализовать с помощью применения моделей массового обслуживания.

Целью данной работы является математическое моделирование колл-центра и анализ эффективности обработки вызовов с использованием замкнутой экспоненциальной сети массового обслуживания с повторными вызовами и нетерпеливыми заявками. Важнейшей задачей является асимптотический анализ сетевой модели, предполагающий приближенный метод исследования сети массового обслуживания при критическом допущении большого, но ограниченного числа заявок K в сети. Состояние модели в некоторый момент времени описывается совокупностью $n+2$ случайных функций $\xi_i(t)$, $i=\overline{1,n+2}$, т. е. случайным процессом в $(n+2)$-мерном пространстве

$$\xi(t)=(\xi_1(t),\xi_2(t),...,\xi_{n+1}(t),\xi_{n+2}(t))=\left(\frac{k_1(t)}{K},\frac{k_2(t)}{K},...,\frac{k_{n+1}(t)}{K},\frac{k_{n+2}(t)}{K}\right).$$

Здесь $k_{n+2}(t)$ – это число заявок на орбите, представляющей собой виртуальный зал ожидания для клиентов, осуществляющих повторный дозвон, $k_{n+1}(t)$ – число заявок, обслуживаемых автоматическим коммутатором распределения вызовов, $k_i(t)$ – число заявок, обслуживаемых операторами i-й специализации, $i=\overline{1,n}$, K – общее число заявок в замкнутой сети.

Законы и параметры обслуживания заявок в системах сети заданы таким образом, что исследуемая модель представляет собой экспоненциальную сеть массового обслуживания. Доказано, что в асимптотическом случае большого числа заявок K процесс $\xi(t)$ – непрерывный марковский случайный процесс, плотность распределения вероятностей которого удовлетворяет многомерному уравнению Фоккера – Планка – Колмогорова, принадлежащему к дифференциальным уравнениям в частных производных параболического типа [1–5]

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial t}=-\sum_{i=1}^{n+2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_i(x,t)p(x,t)\right)+\frac{\varepsilon}{2}\sum_{i,j=1}^{n+2}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\left(B_{ij}(x,t)p(x,t)\right), \tag{1}$$

где $x=(x_1,x_2,...,x_{n+1},x_{n+2})$, в общем случае $x\in\mathbb{R}^{n+2}$, $\varepsilon=K^{-1}$; $A(x,t)=(A_i(x,t))_{n+2}$ – векторная функция векторного аргумента, характеризующая скорость изменения значений исходного случайного процесса, $B(x,t)=(B_{ij}(x,t))_{(n+2)\times(n+2)}$ – матричная функция векторного аргумента, характеризующая скорость изменения дисперсии рассматриваемого случайного процесса. Коэффициенты сноса $A_i(x,t)$ и диффузии $B_{ij}(x,t)$, $i,j=\overline{1,n+2}$, зависят от параметров функционирования сети массового обслуживания, их вид не приводится из-за громоздкости выражений.

Решить уравнение (1) в многомерном случае не представляется возможным. Однако, используя методику, описанную в работах [3, 5], и выражения для коэффициентов сноса, можно записать систему обыкновенных дифференциальных уравнений для среднего числа заявок в каждой из систем массового обслуживания

$$\frac{dM_{k_i}(t)}{dt}=KA_i(K^{-1}M_{k_i}(t),t)),k=\overline{1,n+2}. \tag{2}$$

Решение (2) при определенном начальном условии позволяет прогнозировать $M_{k_i}(t)$ – среднее число звонков клиентов колл-центра на каждой стадии обслуживания с течением времени t, $i = \overline{1, n+2}$. Найденные средние можно использовать для расчета других важных вероятностно-временных характеристик функционирования колл-центра, а также для постановки различных задач оптимизации и анализа производительности колл-центра.

Литература

1. Маталыцкий М. А., Романюк Т. В. *Приближенные методы анализа сетей с центральной системой обслуживания и их применения.* Гродно: ГрГУ, 2003.
2. Медведев Г. А. *Замкнутые системы массового обслуживания и их оптимизация* // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1978. № 6. С. 199–203.
3. Русилко Т. В. *Метод определения моментов первых двух порядков для вектора состояния сети массового обслуживания в асимптотическом случае* // Веснік ГрДУ імя Янкі Купалы. Сер. 2, Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. 2021. Т. 11. № 2. С. 152–161.
4. Rusilko T. V. *Application of queueing network models in insurance* // Izvestiya of Saratov University. New series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics. 2022. Vol. 22. № 3. P. 315–321.
5. Rusilko T. V. *Asymptotic analysis of a closed G-network of unreliable nodes* // Journal of applied mathematics and computational mechanics. 2022. Vol. 21. № 2. P. 91–102.

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ НЕСКОЛЬКИХ МОДЕЛЕЙ ДИНАМИКИ ПОПУЛЯЦИЙ С РАСПРЕДЕЛЁННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Т.Л. Сабатулина

Биология, в особенности исследования динамики популяций, была и остаётся источником математических задач. При этом особое внимание всегда уделялось задачам, требующим прогнозировать развитие популяции на достаточном большом временном промежутке.

Если биологическая система существует в неизменном виде достаточно долгое время, то она обладает способностью противостоять возмущениям со стороны окружающей среды. Эту способность системы естественно назвать устойчивостью. Описать границы области устойчивости — значит указать те условия существования системы, выход за которые может привести к её разрушению. Чтобы их описание было содержательным, оно должно быть количественным, то есть математическим. Кроме того, изучение многих биологических процессов в принципе невозможно иными методами, кроме построения адекватной математической модели: в живой природе опасны эксперименты с необратимыми (или непредсказуемыми) последствиями, а наблюдение за развитием живых организмов на небольшом промежутке времени не всегда даёт основания для надёжной экстраполяции.

Для математического моделирования динамически развивающихся систем используется производная (имеющая значение скорости изменения изучаемого объекта), а значит, дифференциальные уравнения и системы. Довольно долго исследователи динамики популяций ограничивались моделями, представляющими собой обыкновенные дифференциальные уравнения (напр., модель Мальтуса, логистическое уравнение, модель Лотки — Вольтерры). Такие модели характеризуются предположением, что скорость изменения изучаемого объекта (численности популяции) в любой момент времени зависит только от состояния объекта в тот же момент времени. Однако желание описать процесс точнее привело к тому, что эта гипотеза стала заменяться более гибкой: скорость изменения