с течением времени t, $i = \overline{1, n+2}$. Найденные средние можно использовать для расчета других важных вероятностно-временных характеристик функционирования колл-центра, а также для постановки различных задач оптимизации и анализа производительности колл-центра.

Литература

1. Маталыцкий М. А., Романюк Т. В. *Приближенные методы анализа сетей с центральной системой обслуживания и их применения.* Гродно: ГрГУ, 2003.

2. Медведев Г. А. *Замкнутые системы массового обслуживания и их оптимизация* // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1978. № 6. С. 199–203.

3. Русилко Т. В. *Метод определения моментов первых двух порядков для вектора состояния сети массового обслуживания в асимптотическом случае* // Веснік ГрДУ імя Янкі Купалы. Сер. 2, Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. 2021. Т. 11. № 2. С. 152–161.

4. Rusilko T. V. *Application of queueing network models in insurance* // Izvestiya of Saratov University. New series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics. 2022. Vol. 22. № 3. P. 315–321.

5. Rusilko T. V. *Asymptotic analysis of a closed G-network of unreliable nodes* // Journal of applied mathematics and computational mechanics. 2022. Vol. 21. № 2. P. 91–102.

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ НЕСКОЛЬКИХ МОДЕЛЕЙ ДИНАМИКИ ПОПУЛЯЦИЙ С РАСПРЕДЕЛЁННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Т.Л. Сабатулина

Биология, в особенности исследования динамики популяций, была и остаётся источником математических задач. При этом особое внимание всегда уделялось задачам, требующим прогнозировать развитие популяции на достаточном большом временном промежутке.

Если биологическая система существует в неизменном виде достаточно долгое время, то она обладает способностью противостоять возмущениям со стороны окружающей среды. Эту способность системы естественно назвать устойчивостью. Описать границы области устойчивости — значит указать те условия существования системы, выход за которые может привести к её разрушению. Чтобы их описание было содержательным, оно должно быть количественным, то есть математическим. Кроме того, изучение многих биологических процессов в принципе невозможно иными методами, кроме построения адекватной математической модели: в живой природе опасны эксперименты с необратимыми (или непредсказуемыми) последствиями, а наблюдение за развитием живых организмов на небольшом промежутке времени не всегда даёт основания для надёжной экстраполяции.

Для математического моделирования динамически развивающихся систем используется производная (имеющая значение скорости изменения изучаемого объекта), а значит, дифференциальные уравнения и системы. Довольно долго исследователи динамики популяций ограничивались моделями, представляющими собой обыкновенные дифференциальные уравнения (напр., модель Мальтуса, логистическое уравнение, модель Лотки — Вольтерры). Такие модели характеризуются предположением, что скорость изменения изучаемого объекта (численности популяции) в любой момент времени зависит только от состояния объекта в тот же момент времени. Однако желание описать процесс точнее привело к тому, что эта гипотеза стала заменяться более гибкой: скорость изменения объекта зависит не только от его состояния в данный момент времени, но и от «предыстории», то есть от состояний в некоторые предыдущие моменты времени. Такое предположение привело к новым классам моделей: наряду с обыкновенными дифференциальными уравнениями стали использоваться уравнения с отклоняющимся аргументом, интегро–дифференциальные уравнения и другие виды функционально-дифференциальных уравнений.

Учёт запаздывания позволил описывать динамику популяций более глубоко и полно: вслед за известной моделью Хатчинсона (1948 г.) [1] появились модели Ласоты — Важевски (1976 г.) [2], Мэкки — Гласса (1977 г.) [3], Николсона (1980–1983 гг.) [4]. Модель Хатчинсона описывает динамику популяции в условиях ограниченности ресурсов, модель Николсона — популяцию лабораторных мух, модели Ласоты — Важевски и Мэкки — Гласса — процессы кроветворения.

Устойчивость численности популяции, то есть способность популяции возвращаться к равновесному состоянию, математически описывается как устойчивость решений выбранного в качестве модели уравнения. Математические определения устойчивости даются в рамках теории дифференциальных уравнений соответствующего класса. Все перечисленные модели динамики популяций являются нелинейными функционально-дифференциальными уравнениями. Исследование асимптотических свойств их решений в большинстве случаев проводится по следующей схеме: изучаются свойства линейного приближения (как можно точнее) и на их основе делаются выводы о поведении решения нелинейного уравнения. Если исходная модель учитывала эффект последействия, то его линейное приближение попадает в класс линейных функционально-дифференциальных уравнений. Поэтому с прикладной точки зрения наиболее интересными являются результаты, дающие эффективное (и возможно более точное) описание области устойчивости конкретных классов таких уравнений.

Развитие идеи запаздывания привело к возникновению моделей, в которых последействие учитывается более тонко: вместо одного запаздывания появилось несколько, запаздывание и коэффициенты начали зависеть от времени, наконец, наряду с сосредоточенным стали рассматривать распределённое запаздывание.

Однако даже когда сосредоточенное запаздывание достаточно хорошо описывает моделируемый процесс, на самом деле имеет место некоторое «размытие» запаздывания вблизи некоторого среднего значения. В этом случае использование распределённого запаздывания позволяет учитывать вероятностные эффекты в моделях, которые в противном случае были бы детерминированными.

На сегодня количество работ, в которых исследуется устойчивость биологических моделей, использующих уравнения с сосредоточенным запаздыванием, стало настолько большим, что требуются обзорные статьи, в которых результаты систематизируются и упорядочиваются (см. например, обзор [5] об уравнении Николсона). С другой стороны, модели с распределённым запаздыванием признаются столь же содержательными, но оказывается, что для них признаков устойчивости мало, а те, что получаются как следствие из теорем общего вида, далеки от точных.

В данной работе рассматривается несколько примеров биологических моделей, при составлении которых оказывается существенным эффект последействия. Наибольшее внимание уделяется моделям, в которых последействие считается распределённым по некоторому промежутку. Изучаются асимптотические свойства решений данных уравнений.

Исследования выполнены при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект № FSNM-2023-0005).

Литература

1. Hutchinson G.E. *Circular causal in ecology* // Ann. N. Y. Acad. Sci. 1948. V. 50. P. 221–246.
2. Ważevska-Czyżevska M., Lasota A. *Mathematical problems of dynamics of red blood cells production* // Mat. Stos. 1976. V. 3. № 6. P. 23–40.
3. Mackey M., Glass L. *Oscillations and chaos in physiological control systems* // Science. 1977. V. 197. P. 287–289.
4. Gurney W. S. C., Blythe S. P., Nisbet R. M. *Nicholson's blowflies revisited* // Nature. 1980. № 287. P. 17–21.
5. Berezansky L., Braverman E., Idels L. *Nicholson's blowflies differential equations revisited: Main results and open problems* // Appl. Math. Model. 2010. V. 34. № 6. P. 1405–1417.

УСТОЙЧИВОСТЬ ПОЛОЖЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ В МОДЕЛИ «ХИЩНИК-ЖЕРТВА» С ДВУМЯ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ

М.А. Скворцова

Рассматривается система дифференциальных уравнений с двумя запаздываниями, описывающая взаимодействие популяций хищников и жертв [1]

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}x(t) = rx(t-\tau_1)e^{-c_1\tau_1} - ax^2(t) - d_1x(t) - f(x(t),y(t)), \\[2ex] \dfrac{d}{dt}u(t) = rx(t) - rx(t-\tau_1)e^{-c_1\tau_1} - c_1u(t), \\[2ex] \dfrac{d}{dt}y(t) = nf(x(t-\tau_2),y(t-\tau_2))e^{-c_2\tau_2} - d_2y(t), \\[2ex] \dfrac{d}{dt}v(t) = nf(x(t),y(t)) - nf(x(t-\tau_2),y(t-\tau_2))e^{-c_2\tau_2} - c_2v(t), \end{cases} \tag{1}$$

$$f(x,y) = \frac{bxy}{1+k_1x+k_2y}, \quad b>0, \quad k_1,k_2 \geq 0.$$

Здесь $x(t)$ — численность популяции взрослых жертв, $u(t)$ — численность популяции молодых жертв, $y(t)$ — численность популяции взрослых хищников, $v(t)$ — численность популяции молодых хищников. Параметры запаздывания $\tau_1 > 0$ и $\tau_2 > 0$ отвечают за время взросления жертв и хищников соответственно. Коэффициенты системы предполагаются положительными.

В работе изучается асимптотическая устойчивость положений равновесия системы (1), соответствующих трем случаям: полному вымиранию популяций, вымиранию только популяции хищников, совместному сосуществованию популяций хищников и жертв. Приведены условия на коэффициенты системы, при которых положения равновесия являются асимптотически устойчивыми. Указаны оценки на области притяжения положений равновесия. Установлены оценки, характеризующие скорость стабилизации решений на бесконечности. При получении результатов использовались функционалы Ляпунова – Красовского специального вида [2].

Работа выполнена в рамках государственного задания Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН (проект № FWNF-2022-0008).