

УРАВНЕНИЕ ВЛАСОВА–ПУАССОНА И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ К ЗАДАЧАМ КОСМОЛОГИИ

Н.Н. Фимин, В.М. Чечеткин

В работах авторов [1]–[3] рассмотрено описание неравновесной динамики статистического ансамбля гравитационно взаимодействующих $N(\gg 1)$ частиц с помощью системы уравнений Власова–Пуассона (в условиях применимости нерелятивистского формализма одночастичных функций распределения $F_1(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$). Мы будем полагать, что система частиц находится в состоянии, близком условно-равновесному, для которого уравнение Власова допускает “энергетическую подстановку” для функции распределения $F_1^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \Omega(\varepsilon)$ ($\varepsilon = m\mathbf{v}^2/2 + \Phi(\mathbf{x})$), а решение нелинейного уравнения Пуассона (уравнения Лиувилля–Гельфанда) относится к классу “минимальных” [4], устойчивых вблизи как регулярных, так и особых точек области изменения параметров.

Произведем линеаризацию решения в форме $F_1(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = F_1^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) + f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$, $|F_0| \gg |f|$. Подставив это выражение в уравнение Власова, получаем

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = m^{-1} \frac{\partial F_0(\mathbf{x}, \mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \int \int \mathfrak{Y}_d^{(\vartheta)}(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) f(\mathbf{x}', \mathbf{v}', t) d\mathbf{v}' d\mathbf{x}', \quad d = 2, 3.$$

Используя обращение оператора полной производной, приходим к форме уравнения Власова в представлении сдвигов по траекториям

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) &= f(\mathbf{x} - \mathbf{v}(t - t_0), \mathbf{v}, t_0) + \\ &+ \int_{t_0}^t dt' \tilde{B} \nabla_{\mathbf{v}} \exp \left(-\frac{m\mathbf{v}^2}{2T} - \frac{1}{T} \Phi_-(t - t') \right) \cdot \hat{\mathcal{K}}_d^{(-)}[\vartheta] \varrho, \quad \Phi_-(t - t') \equiv \Phi_{\min}(\mathbf{x} - \mathbf{v}(t - t')), \\ \hat{\mathcal{K}}_d^{(-)}[\vartheta] \varrho &\equiv \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \int \mathfrak{Y}_d^{(\vartheta)}(|\mathbf{x} - \mathbf{x}' - \mathbf{v}(t - t')|) \varrho(\mathbf{x}', t') d\mathbf{x}', \quad \tilde{B} = N\rho_0/m. \end{aligned}$$

Здесь $\varrho(\mathbf{x}', t') \equiv \int f(\mathbf{x}', \mathbf{v}', t') d\mathbf{v}'$. Решение $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ будем искать в форме интегралов типа Фурье–Лапласа от пространственных гармонических волн с убывающей амплитудой: $\int_{\mathbb{R}^3_{\mathbf{w}}} f_{\mathbf{w}}(\mathbf{v}, t) \exp(i\mathbf{w}\mathbf{x}) d\mathbf{w}$, где $\mathbf{w} = (w_\ell)_{\ell=1,2,3}^T$, $w_\ell = w_\ell^{(Re)} + iw_\ell^{(Im)}$. Для фурье-образов плотности $\varrho_{\mathbf{w}}$ справедливо следующее интегральное уравнение Вольтерра II-го рода

$$\varrho_{\mathbf{w}}(t) = {}^{[1]}\mathcal{D} f_{\mathbf{w}}(t) + \int_{t_0}^t {}^{[2]}\mathcal{D}_{\mathbf{w}}(t - t') \varrho_{\mathbf{w}}(t') dt'.$$

Решение уравнения данного типа может быть получено в терминах одностороннего преобразования Лапласа (по временной переменной)

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{L}} f_{\mathbf{w}}(\omega) &= \int_0^\infty f_{\mathbf{w}}(t) \exp(-\omega t) dt, \quad f_{\mathbf{w}}(t) = \text{Heav}(t) (2\pi i)^{-1} \int_{\zeta_0+i\infty}^{\zeta_0+i\infty} \hat{\mathcal{L}} f_{\mathbf{w}}(\omega) \exp(\omega t) d\omega, \\ \varrho_{\mathbf{w}}(t) &= (2\pi i)^{-1} \int_{\zeta_0-i\infty}^{\zeta_0+i\infty} \exp(\omega t) \frac{\hat{\mathcal{L}}({}^{[1]}\mathcal{D} f_{\mathbf{w}})(\omega)}{1 - \hat{\mathcal{L}}({}^{[2]}\mathcal{D}_{\mathbf{w}})(\omega)} d\omega, \quad \hat{\mathcal{L}}({}^{[k]}\mathcal{D}_{\mathbf{w}})(\omega) = \int_0^\infty \exp(-\omega t) {}^{[k]}\mathcal{D}_{\mathbf{w}}(t) dt. \end{aligned}$$

Интеграл берется в правой полуплоскости комплексной плоскости $\omega = -\zeta - i\infty$ вдоль прямой, параллельной оси $\Re(\omega) = 0$. Полюсы подынтегрального выражения определяются уравнением $\widehat{\mathcal{L}}^{([2]D_{\mathbf{w}})} = 1$, которое приводится к форме (для $\Re(\omega) > 0$)

$$\gamma \mathcal{H}(w_\ell^{Re}, w_\ell^{Im}) \int_{\mathbb{R}^{\neq}} \frac{i \mathbf{w} \nabla_{\mathbf{v}} F_0}{\omega + i \mathbf{w} \mathbf{v}} = -1.$$

В предельных случаях зависимость $\omega = \omega(\mathbf{w})$ достаточно легко определить. Для малых значений величин модуля “волнового вектора” можно разложить в ряд Тейлора по $|\mathbf{w}|$ множитель в подынтегральном выражении ($\omega/(\omega + i \mathbf{w} \mathbf{v}) \approx \mathbf{w}/\omega - i \mathbf{w} \mathbf{v} \mathbf{w}^2/\omega^2$), и выбрать систему координат с осью абсцисс, сонаправленной вектору $\mathbf{w}$ (для получения скалярной зависимости). Тогда:

$$\gamma \mathcal{H}(\mathbf{w}) \frac{\mathbf{w}^2}{\omega^2} \int \left[BT^{-1}(-mv_1 + \Phi'_{min} \cdot (t - t')) \exp\left(-\frac{mv_1^2}{2T} - \frac{\Phi_-(t - t')}{T}\right) \right]_3 dv_1 = 1.$$

Таким образом, мы получаем приближенное дисперсионное соотношение (интегральное по времени), которое кратко можно записать как $\omega^2 = \gamma \mathbf{w}^2 \mathcal{H}(\mathbf{w}) \int [\dots]_3 dv_1$. Величина $\mathcal{H} > 0$, поэтому характер динамики системы зависит от знака выражения в скобках $[\dots]_3$: если $[\dots]_3 < 0$, то $\omega \in \mathbb{C}$ (чисто мнимое число), в обратном случае ω вещественное. Это означает, что возмущение в нашей исследуемой системе, качественно следующее закону $\sim \exp(\omega t + i \mathbf{w} \mathbf{v})$, будет иметь колебательный характер по времени, если система, находящаяся в окрестности состояния условного равновесия, подвергнута в начальный момент времени возмущению с большой длиной волны и критерий выполнен для мнимых ω ; для вещественных частот первичное возмущение затухающее или растущее (неустойчивое) в зависимости от знака $\omega \lesseqgtr 0$. Кроме этого, подынтегральное выражение может менять знак, переходя от осцилляторного поведения системы к оскулляторному.

Итак, мы получили зависимость $\omega(\mathbf{w})$ для системы массивных частиц с самогравитацией. Оно дает информацию о характере динамики системы (осцилляторный по времени и/или пространству с убывающей или сохраняющейся амплитудой, экспоненциально убывающий и неустойчивый). Чрезвычайно важным для астрофизического фона анализа дисперсионных решений является тот факт, что в данном случае нет необходимости рассматривать набор случайных флуктуаций в системе (которые при этом неким образом когерентно самоупорядочиваются на колоссальных расстояниях по одному или двум направлениям для формирования наблюдаемых космологических структур). В природу самой системы уравнений Власова–Пуассона имманентно заложен механизм возникновения псевдоосцилляторной (по времени и по выделенным направлениям пространства) реализации распределения материи.

Литература

1. Gurzadyan V. G. Fimin N. N., Chechetkin V. M. *Cosmic voids and the kinetic analysis* // Astronomy and Astrophysics. 2022. V. 666. № A149. P. 1–6.
2. Gurzadyan V. G. Fimin N. N., Chechetkin V. M. *On the origin of cosmic web* // Eur. Phys. J. Plus. 2022. V. 137. P. 132–138.
3. Vedenyapin V. V.; Fimin N. N.; Chechetkin V. M. *Equation of Vlasov-Maxwell-Einstein type and transition to a weakly relativistic approximation* // Comput. Math. Math. Phys. 2019. V. 59. № 11. P. 1816–1831.
4. Dupaigne L. *Stable Solutions of Elliptic Partial Differential Equations*. Boca Raton: Taylor & Francis Group, 2011.