РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В ДВУМЕРНЫХ НЕРЕГУЛЯРНЫХ ОБЛАСТЯХ

М.М. Чуйко, О.М. Королёва

Рассмотрим уравнение теплопроводности, заданное в нерегулярной односвязной двумерной области Ω_{xy}

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f(x,y,t), \quad (x,y,t) \in \Omega_{xy} \times [0,T], \tag{1}$$

с начальными условиями

$$u(x,y,0) = u^0(x,y) \tag{2}$$

и смешанными граничными условиями первого и второго рода

$$u(x,y,t)\Big|_{\Gamma_1} = u_0(x,y,t), \quad \Gamma_1 \in \partial\Omega_{xy}, \quad \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_2} = \mu(x,y,t), \quad \Gamma_2 = \partial\Omega_{xy} - \Gamma_1, \tag{3}$$

где $\partial\Omega_{xy}$ – граница области Ω_{xy}, n – внешняя нормаль к границе.

При решении задач в сложных областях используются обобщенные криволинейные координаты [1]. Пусть преобразование $\xi = \xi(x,y)$, $\eta = \eta(x,y)$ отображает область Ω_{xy} в прямоугольник $\Omega_{\xi\eta} = \{(\xi,\eta) : 0 \le \xi, \eta \le 1\}$. В пространстве обобщенных криволинейных координат (ξ,η) задача (1) – (3) имеет следующий вид

$$|J^{-1}|\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(B_{11}\frac{\partial u}{\partial \xi} + B_{12}\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(B_{21}\frac{\partial u}{\partial \xi} + B_{22}\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) + |J^{-1}|\tilde{f}(\xi,\eta,t), \quad (\xi,\eta) \in \Omega_{\xi\eta}, \tag{4}$$

$$u(\xi,\eta,0) = \tilde{u}^0(\xi,\eta),$$
$$u(\xi,\eta,t) = \tilde{u}_0(\xi,\eta,t), \quad (\xi,\eta) \in \Gamma_{1,\xi\eta}, \tag{5}$$

$$B_{11}\frac{\partial u}{\partial \xi} + B_{12}\frac{\partial u}{\partial \eta} = g_{22}^{1/2}\tilde{\mu}(\xi,\eta,t), \quad (\xi,\eta) \in \Gamma_{2,\xi\eta},\ \xi = \text{const}, \tag{6}$$

$$B_{21}\frac{\partial u}{\partial \xi} + B_{22}\frac{\partial u}{\partial \eta} = g_{11}^{1/2}\tilde{\mu}(\xi,\eta,t), \quad (\xi,\eta) \in \Gamma_{2,\xi\eta},\ \eta = \text{const}, \tag{7}$$

где

$$B_{11} = \frac{g_{22}}{|J^{-1}|}, \quad B_{12} = B_{21} = -\frac{g_{12}}{|J^{-1}|}, \quad B_{22} = \frac{g_{11}}{|J^{-1}|},$$

$$g_{11} = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2, \quad g_{12} = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta}\right), \quad g_{22} = \left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2,$$

$$|J^{-1}| = \frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi}.$$

Здесь $|J^{-1}|$ – якобиан обратного преобразования $x = x(\xi,\eta)$, $y = y(\xi,\eta)$, B_{11}, B_{12}, B_{22} – метрические коэффициенты.

На дискретном уровне построение отображения Ω_{xy} в $\Omega_{\xi\eta}$ представляет собой генерацию регулярной (четырехугольной) сетки $N \times M$ в области Ω_{xy}. На равномерной прямоугольной разностной сетке $\bar{\omega} = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau$, введенной в области $\Omega_{\xi\eta} \times [0, T]$

$$\bar{\omega}_h = \{(\xi_i, \eta_j),\ \xi_i = ih_1,\ i = \overline{0, N},\ \xi_N = 1,\ \eta_j = ih_2,\ j = \overline{0, M},\ \eta_M = 1\},$$

$$\bar{\omega}_\tau = \{t^n,\ t^n = n\tau,\ n = \overline{0, N_0}, t_{N_0} = T\}$$

аппроксимируем (4) разностной схемой с весами

$$|J^{-1}| u_t = \Big(\sum_{\alpha\beta}^{2} \Lambda_{\alpha\beta} u + |J^{-1}| \tilde{f} \Big)^{(\sigma)}.$$

Используем следующие монотонные аппроксимации второго порядка эллиптического оператора со смешанными производными [2]

$$\Lambda_{11} u = \big(\beta_{11} u_{\bar{\xi}}\big)_\xi, \quad \Lambda_{22} u = \big(\beta_{22} u_{\bar{\eta}}\big)_\eta,$$

$$\Lambda_{12} u = \frac{1}{2}\Big(\big(\beta_{12}^- u_{\bar{\eta}}\big)_\xi + \big(\beta_{12}^- u_\eta\big)_{\bar{\xi}} + \big(\beta_{12}^+ u_\eta\big)_\xi + \big(\beta_{12}^+ u_{\bar{\eta}}\big)_{\bar{\xi}} \Big),$$

$$\Lambda_{21} u = \frac{1}{2}\Big(\big(\beta_{21}^- u_{\bar{\xi}}\big)_\eta + \big(\beta_{21}^- u_\xi\big)_{\bar{\eta}} + \big(\beta_{21}^+ u_\xi\big)_\eta + \big(\beta_{21}^+ u_{\bar{\xi}}\big)_{\bar{\eta}} \Big).$$

Метрические коэффициенты $\beta_{kl},\ k, l = 1, 2$ определяются по координатам узлов $(x, y)_{ij}$ разностной сетки, построенной в области $\Omega_{\xi\eta}$ с использованием центральных разностей для аппроксимации соответствующих производных.

В граничных узлах $\Gamma_{1,\xi\eta}$ краевые условия аппроксимируются точно. Для повышения порядка аппроксимации краевых условий второго рода на границе $\Gamma_{2,\xi\eta}$ будем привлекать исходное дифференциальное уравнение. Аппроксимируем левую часть (7) на границе $\eta = 0$ следующим образом

$$\Big(\beta_{21} \hat{u}_{\overset{\circ}{\xi}} + \beta_{22} \hat{u}_\eta\Big)_{i,0} = \Big(B_{21} \frac{\partial u}{\partial \xi} + B_{22} \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{h_2}{2} B_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \Big)_{i,0}^{n+1} + O\left(h_1^2 + h_2^2\right). \tag{8}$$

Выражаем $B_{22} \dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$ из уравнения (4), подставляем в (8) и аппроксимируем производные на границе $\eta = 0$. Получим

$$\frac{1}{2}\left(\beta_{21,i,1/2}^+ \left(\hat{u}_{\bar{\xi},i,1} + \hat{u}_{\xi,i,1}\right) + \beta_{21,i,1/2}^- \left(\hat{u}_{\xi,i,1} + \hat{u}_{\bar{\xi},i,1}\right)\right) + \beta_{22,i,1/2} \hat{u}_{\eta,i,0} +$$

$$+ \frac{h_2}{2}\left(\big(\beta_{11,i-1/2,1} \hat{u}_{\bar{\xi}}\big)_\xi + \big(\beta_{12}^+ \hat{u}_\eta\big)_\xi + \big(\beta_{12}^- \hat{u}_\eta\big)_{\bar{\xi}} - \frac{|J^{-1}|}{\tau} \hat{u} \right)_{i,0} =$$

$$= -\left(\mu g_{11}^{1/2} + \frac{h_2}{2} \frac{|J^{-1}|}{\tau} \left(u + \tau \hat{\tilde{f}}\right) \right)_{i,0}.$$

Аналогичным образом строятся аппроксимации краевых условий второго рода для других участков границы $\Gamma_{2,\xi\eta}$.

Проведен ряд численных экспериментов. Полученные системы девятиточечных разностных уравнений решались с помощью метода MSIM [3]. Результаты численных экспериментов подтверждают второй порядок $O(\tau^2 + |h|^2)$ точности алгоритма решения смешанной краевой задачи для уравнения теплопроводности.

Литература

1. Флетчер К. *Вычислительные методы в динамике жидкостей*, т.2, М.: Мир, 1991.

2. Rybak I. *Monotone and conservative difference schemes for elliptic equations with mixed derivatives*// Math. Model. Anal. 2004, V. 9, № 2. P. 169 – 178.

3. Schneider G., Zedan M. *A modified strongly implicit procedure for the numerical solution of field problem* // Numer. Heat Transf. 1981. V. 4. P. 1–19.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ ВНУТРИ БЕСКОНЕЧНОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ЭКРАНА В ПРИСУТСТВИИ ТОРА

Г.Ч. Шушкевич

Универсальными методами расчета электростатических, магнитных и электромагнитных полей являются численные методы: метод конечных разностей, метод конечных элементов, метод интегральных уравнений. Однако актуальность разработки новых аналитических и численно-аналитических методов решения краевых задач математической физики не уменьшилась и в наши дни. Эти методы остаются, по-прежнему, основными средствами решения фундаментальных проблем, создают основу для тестирования решения краевых задач, полученных численными методами. Метод разделения переменных, аппарат функций комплексного переменного наиболее часто используются для аналитического решения граничных задач математической физики [1,2]. Обобщением метода разделения переменных для решения граничных задач со смешанными граничными условиями является метод парных (тройных) уравнений, который позволяет свести решение поставленной граничной задачи к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода, которое обычно не имеет аналитического решения в замкнутой форме, либо к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений второго рода. Этот метод применялся для решения электростатических задач для одиночных тонких незамкнутых оболочек [3-5]. При решении граничных задач математической физики для многосвязных областей успешно применялся метод теорем сложения [6,7]. Совместное использование теорем сложения и парных (тройных) уравнений позволило найти аналитическое решение поставленных задач в виде ряда по малому параметру для двух и более проводников, представляющих собой как полные, так и неполные координатные поверхности [8,9].

Пусть однородное, изотропное пространство R^3 с диэлектрической проницаемостью среды ε разделено бесконечным круговым цилиндрическим экраном Γ радиуса b на два полупространства D_1 и D_2. В полупространстве D_1 на оси цилиндрического экрана Γ расположен тороидальный экран T с малым радиусом r и большим R.

В области D_1 на плоскости $z = -h$ находится заряженная нить, расположенная на окружности радиуса d. Полагаем, что заряд q равномерно распределен по окружности, тогда линейная плотность зарядов $\tau = q/2\pi\, d$. В результате взаимодействия первичного электростатического поля с экранами Γ и T образуется вторичное поле. Обозначим потенциал вторичного поля в области D_1 через U_1, а исходного электростатического поля – U_0.

Постановка задачи. Требуется найти вторичный потенциал U_1, который удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}U_1 + \frac{\partial^2}{\partial y^2}U_1 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}U_1 = 0, \tag{1}$$