Литература

1. Флетчер К. *Вычислительные методы в динамике жидкостей*, т.2, М.: Мир, 1991.

2. Rybak I. *Monotone and conservative difference schemes for elliptic equations with mixed derivatives*// Math. Model. Anal. 2004, V. 9, № 2. P. 169 – 178.

3. Schneider G., Zedan M. *A modified strongly implicit procedure for the numerical solution of field problem* // Numer. Heat Transf. 1981. V. 4. P. 1–19.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ ВНУТРИ БЕСКОНЕЧНОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ЭКРАНА В ПРИСУТСТВИИ ТОРА

Г.Ч. Шушкевич

Универсальными методами расчета электростатических, магнитных и электромагнитных полей являются численные методы: метод конечных разностей, метод конечных элементов, метод интегральных уравнений. Однако актуальность разработки новых аналитических и численно-аналитических методов решения краевых задач математической физики не уменьшилась и в наши дни. Эти методы остаются, по-прежнему, основными средствами решения фундаментальных проблем, создают основу для тестирования решения краевых задач, полученных численными методами. Метод разделения переменных, аппарат функций комплексного переменного наиболее часто используются для аналитического решения граничных задач математической физики [1,2]. Обобщением метода разделения переменных для решения граничных задач со смешанными граничными условиями является метод парных (тройных) уравнений, который позволяет свести решение поставленной граничной задачи к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода, которое обычно не имеет аналитического решения в замкнутой форме, либо к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений второго рода. Этот метод применялся для решения электростатических задач для одиночных тонких незамкнутых оболочек [3-5]. При решении граничных задач математической физики для многосвязных областей успешно применялся метод теорем сложения [6,7]. Совместное использование теорем сложения и парных (тройных) уравнений позволило найти аналитическое решение поставленных задач в виде ряда по малому параметру для двух и более проводников, представляющих собой как полные, так и неполные координатные поверхности [8,9].

Пусть однородное, изотропное пространство R^3 с диэлектрической проницаемостью среды ε разделено бесконечным круговым цилиндрическим экраном Γ радиуса b на два полупространства D_1 и D_2. В полупространстве D_1 на оси цилиндрического экрана Γ расположен тороидальный экран T с малым радиусом r и большим R.

В области D_1 на плоскости $z = -h$ находится заряженная нить, расположенная на окружности радиуса d. Полагаем, что заряд q равномерно распределен по окружности, тогда линейная плотность зарядов $\tau = q/2\pi\, d$. В результате взаимодействия первичного электростатического поля с экранами Γ и T образуется вторичное поле. Обозначим потенциал вторичного поля в области D_1 через U_1, а исходного электростатического поля – U_0.

Постановка задачи. Требуется найти вторичный потенциал U_1, который удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}U_1 + \frac{\partial^2}{\partial y^2}U_1 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}U_1 = 0, \tag{1}$$

граничным условиям

$$(U_1(M) + U_0(M))|_{M \in \mathrm{T}} = V - const, \qquad (U_1(M) + U_0(M))|_{M \in \Gamma} = 0 \tag{2}$$

и условию на бесконечности

$$U_1(M) \to 0 \ , \quad M \to \infty, \tag{3}$$

где M – произвольная точка области D_1 .

Потенциал U_0 исходного электростатического поля можно представить через сферические гармонические функции [4]

$$U_0\,(r,\theta) = Q \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{\ell}{r}\right)^{n+1} P_n\,(\cos\theta)\,, \quad r > \ell,$$

где $Q = q/4\pi\varepsilon\ell$, $a_n = (-1)^n P_n\,(\cos\theta_0)\,,$ $\ell = \sqrt{h^2+d^2},$ $\cos\theta_0 = h/\ell\,,$ $P_n(\cos\theta)$ – полиномы Лежандра [2], физическая размерность коэффициента Q – [В](система единиц СИ).

Вторичный потенциал представим в виде суперпозиции цилиндрических и тороидальных гармонических функций

$$U_1 = U_t(\alpha,\beta) + U_c(\rho,z)\,,$$

$$U_t(\alpha,\beta) = \sqrt{2(ch\alpha - \cos\beta)}\; Q \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n P_{n-\frac{1}{2}}(ch\alpha)\, e^{i\,n\,\beta},$$

$$U_c(\rho,z) = Q \int\limits_{-\infty}^{\infty} Z(\lambda)\, I_0(\lambda\rho)\; e^{i\,\lambda z} d\lambda,$$

где $P_{n-\frac{1}{2}}(ch\alpha)$ – функция тора, $I_0(\lambda\rho)$ – модифицированная функция Бесселя первого рода [30].

Неизвестные коэффициенты X_n и функция $Z(\lambda)$ подлежат определению из граничных условий (2),(3).

Используя соответствующие теоремы сложения, показано, что решение поставленной граничной задачи сведено к решению бесконечной системы линейных алгебраических уравнений второго рода относительно коэффициентов, входящих в представление вторичного поля. Численно исследовано влияние некоторых параметров задачи на значение электростатического потенциала внутри заземленного цилиндрического экрана в присутствии тороидального включения. Полученные результаты могут быть использованы при проектировании различных электрофизических устройств, в котором возникает необходимость моделирования электростатического поля для заряженных тел различной конфигурации.

Работа выполнена при финансовой поддержке государственной программы научных исследований "Ковергенция - 2025"(подпрограмма "Математические модели и методы").

Литература

1. Pierrus J. *Solved Problems in Classical Electromagnetism: Analytical and Numerical Solutions with Comments.* Oxford: Oxford University Press, 2018.

2. Sharma J. N., Singh K.*Rartial Differential Equations for Engineers and Scientist.* New Delhi: Narosa Publishing house, 2000.

3. Уфлянд Я. С. *Метод парных уравнений в задачах математической физики.* Ленинград: Наука, 1977.

4. Duffy D. G. *Mixed boundary value problems.* NW: Chapman & Hall/CRC, 2008.

5. Шушкевич Г. Ч. *Методика решения электростатической задачи для тонкой незамкнутой сферической оболочки.* // Электричество. 2010. № 6. С. 63–68.

6. Ерофеенко В. Т. *Задача электростатики для двух тороидальных проводников.* // ЖТФ. 1986. Т. 56. № 8. С. 1641–1643.

7. Shushkevich G. Ch. *Electrostatic problem for a torus placed in an infinite cylinder.* // Technical Physics. 2004. Vol. 49, no 5. P. 540-544.

8. Шушкевич Г. Ч. *Моделирование полей в многосвязных областях в задачах электростатики.* Saarbruchen: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2015.

9. Шушкевич Г. Ч. *Моделирование поля элекростатического диполя в присутствии тонкой сплюснутой незамкнутой эллипсоидальной оболочки и плоскости.* // Информатика. 2017. № 2. С. 14–23.

GEODESICS OF RIEMANNIAN METRICS RELATED TO THE NAVIE–STOKES EQUATIONS AND THEIR APPLICATIONS

Valery Dryuma

1.The $14D$ Riemann -metric in local coordinates $\vec{x} = [x, y, z, t, \eta, \rho, m, u, v, w, p, \xi, \chi, n]$

$$ds^2 = 2dx\,du + 2dy\,dv + 2dz\,dw + (-Uu - Vv - Ww)\,dt^2 + 2dt\,dp+$$

$$+Ad\eta^2 + 2d\eta\,d\xi + Bd\rho^2 + 2d\rho\,d\,\chi + Cdm^2 + 2dm\,dn,$$

where

$$A = (-UW + \mu\,U_x)\,w + (-UV + \mu\,U_y)\,v + \left(-U^2 - P + \mu\,U_x\right)u - Up,$$

$$B = (\mu\,V_z - VW)w + (-V^2 - P + \mu\,V_y)v + (-UV + \mu\,V_x)\,u - Vp,$$

$$C = (\mu\,W_z - (W^2 - P)w + (\mu\,W_y - VW)v, (-UW + \mu\,W_x)u - Wp,$$

(U, V, W) , P – the components of velocity and pressure of liquid, has the Ricci-tensor of the form $R_{44} = U_x + V_y + W_z = 0$, $R_{55} = 0$, $R_{66} = 0$, $R_{77} = 0$ on solutions of Navier-Stokes system of equations

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{V} + \left(\vec{V}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{V} - \mu\Delta\vec{V} + \vec{\nabla}P = 0, \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{V} = 0.$$

It belongs to the class of Riemann extensions of affinnely-connected spaces, are equipped by partially-projective metrics due the conditions to part of coordinates

$$\ddot{\eta} = 0, \quad \ddot{\rho} = 0, \quad \ddot{m}, \quad \ddot{\xi} = 0, \quad \ddot{\chi} = 0, \quad \ddot{n} = 0$$

and the remaining geodesic equations have the form

$$\ddot{x}^k + \Gamma^k_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j = 0, \quad \ddot{\Psi}_k + T^i_k\Psi_i = 0,$$

where $x = (x, y, z, t)$ -the Euler coordinates, $\Psi_k = (u, v, w, p)$ -the Lagrange coordinates.

2. The four-dimensional metric

$$ds^2 = (2\,za_3(x, y) - 2\,ta_4(x, y))\,dx^2 + 2\,(2\,za_2(x, y) - 2\,ta_3(x, y))\,dxdy + 2\,dxdz+$$

$$+\,(2\,za_1(x, y) - 2\,ta_2(x, y))\,dy^2 + 2\,dydt,$$