О ФУНКЦИОНАЛЬНОМ АНАЛОГЕ НЕРАВЕНСТВА БЕРНУЛЛИ

В.И. Булатов

Для последовательности
$$a_n = \frac{1+nx}{(1+x)^n}, \quad n \in \mathbb{N},$$
при любом фиксированном $x > -1$ имеем
$$a_{n+1} - a_n = -\frac{nx^2}{(1+x)^{n+1}} \leq 0, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Значит, эта последовательность убывает и, поэтому, $\forall a_n \leq a_1 = 1$, т.е. $\frac{1+nx}{(1+x)^n} \leq 1$, что приводит к классическому неравенству Бернулли
$$(1+x)^n \geq 1 + nx, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \tag{1}$$
которое выполняется не только для $\forall x > -1$, но и для $x = -1$, т.е. для $\forall x \geq -1$.

Целью данной работы является обоснование функционального аналога неравенства (1) без использования исследования функций на монотонность, выпуклость и экстремум методами дифференциального исчисления.

Для этого нам понадобится следующая

Лемма [1]. *При каждом фиксированном $t \in \mathbb{R}$ члены последовательности*
$$b_n = (1 + \frac{t}{n})^n, n \in \mathbb{N}$$
возрастают, начиная с номера $n > -t$.

Доказательство. После соответствующих преобразований для $\forall n > -t$ имеем
$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{n+t}{n}\left(1 - \frac{t}{(n+1)(n+t)}\right)^{n+1} \geq [\,\text{неравенство Бернулли}\,] \geq \frac{n+t}{n}\left(1 - \frac{(n+1)t}{(n+1)(n+t)}\right) = 1.$$

Отсюда, учитывая, что для $\forall n > -t$ следует $b_n > 0$, получаем $b_{n+1} \geq b_n, \forall n > -t$. Значит, все члены остатка рассматриваемой последовательности, начинающегося с номера $n > -t$, возрастают.

Следствие. Для $\forall t \in \mathbb{R}$ и $\forall k, m \in \mathbb{N}$, где $k \geq m > -t$, справедливо неравенство
$$(1 + \frac{t}{k})^k \geq (1 + \frac{t}{m})^m. \tag{2}$$

Теорема. *Для $\forall x \geq -1$ и $\forall \alpha \geq 1$ выполняется неравенство*
$$(1+x)^\alpha \geq 1 + \alpha x, \tag{3}$$
являющееся функциональным аналогом неравенства Бернулли (1).

Доказательство. Заметим, что если $x \geq -1$ и $1+\alpha x \leq 0$, то неравенство (3) выполняется для $\forall \alpha \geq 1$ в силу того, что число в левой части этого неравенства неотрицательно, а в правой части неположительно. Пусть $1 + \alpha x > 0$, где $\alpha \geq 1, \alpha \in \mathbb{Q}$. Тогда $\exists k, m \in \mathbb{N}$ такие, что $\alpha = \frac{k}{m}, k \geq m$, причем $x > -\frac{1}{\alpha} = -\frac{m}{k} \geq -1$. Используя в (2) $t = kx$ и учитывая, что в рассматриваемом случае $k \geq m > -t$, имеем
$$(1+x)^\alpha = \left(1 + \frac{t}{k}\right)^{\frac{k}{m}} \geq [\,\text{неравенство (2)}] \geq 1 + \frac{t}{m} = 1 + \frac{k}{m}x = 1 + \alpha x.$$

Значит, при каждом фиксированном $x \geq -1$ неравенство (3) выполняется для произвольного рационального $\alpha \geq 1$. В общем случае когда $x \geq -1$ и $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \geq 1$, выбирая, например, монотонно убывающую последовательность (α_n) рациональных десятичных приближений для α с избытком, т.е. $\alpha_n \in \mathbb{Q}, \alpha_n \geq \alpha \geq 1, \alpha_n \to \alpha$, после предельного перехода при $n \to \infty$ в неравенстве $(1+x)^{\alpha_n} \geq 1 + \alpha_n x$, в силу непрерывности показательной и линейной функций, окончательно получим

$$(1+x)^{\alpha} = \lim_{n\to\infty}(1+x)^{\alpha_n} \geq \lim_{n\to\infty}(1+\alpha_n x) = 1 + \alpha x.$$

Замечание 1. Если $x > -1$ и $\alpha \leq 0$, то после использования $(-\frac{x}{1+x}) = -1 + \frac{1}{1+x} >$ > -1 в (3) вместо x и $(1-\alpha) \geq 1$ вместо α, имеем

$$\left(1 - \frac{x}{1+x}\right)^{1-\alpha} \geq 1 - \frac{(1-\alpha)x}{1+x},$$

и, значит $(1+x)^{\alpha-1} \geq \frac{(1+\alpha x}{1+x}$, что опять приводит к неравенству (3). Поэтому, при $x > -1$ функциональный аналог (3) неравенства Бернулли выполняется для $\forall \alpha \in]-$ $-\infty; 0] \bigcup [1; +\infty[$. Отсюда, в частности, следует, что классическое неравенство Бернулли (1) при $x > -1$ справедливо не только для $\forall n \in \mathbb{N}$, но и для $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Замечание 2. Аналогичным образом можно показать, что при $x \geq -1$ и $\alpha \in]0;1[$ выполняется неравенство

$$(1+x)^{\alpha} \leq 1 + \alpha x,$$

противоположное неравенству (3).

В дальнейшем, как и в [2], неравенство (3) можно использовать на факультативных занятиях для школьников и студентов, например, как для непосредственного вычисления замечательного степенного предела, так и для получения формулы дифференцирования степенной функции.

Литература

1. Булатов В. И., Голухов В. Г., Кастрица О. А. *Монотонные последовательности. Число Непера.* // Учебные материалы для студентов факультета прикладной математики и информатики. Минск: БГУ, 2019.

2. Булатов В. И., Голухов В. Г., Кастрица О. А. *Об одном экспоненциальном неравенстве.* // Седьмые Богдановский чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям, посвященные 100-летию со дня рождения профессора Ю. С. Богданова: материалы Междунар. науч. конф. Минск, 1-2 июня 2021 г., С. 232-234

К ВОПРОСУ О ПРОВЕДЕНИИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОЛИМПИАД В ТЕХНИЧЕСКОМ ВУЗЕ

Н.П. Воронова, О.А. Мороз

Оптимизация управления учебным процессом в современной образовательной организации происходит с опорой на всю совокупность современных научных, исследовательских, инновационных данных, которые должны приводить к подготовке специалистов, обладающих не только достаточным уровнем профессиональных знаний, но и высокой