О ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ ДЛЯ ВНЕПРОГРАММНОГО ИЗУЧЕНИЯ

М.А. Глецевич, А.П. Шилин

Из линейных дифференциальных уравнений произвольного порядка, допускающих решение в квадратурах, в учебных программах для студентов физико-математических специальностей содержатся лишь уравнения с постоянными коэффициентами и уравнения Эйлера. Укажем еще некоторые уравнения:

1.
$$\sum_{k=0}^{n}\left(\left(A_k-\alpha A_{k+1}\right)x-A_{k+1}\right)y^{(k)}=0, \tag{1}$$

где α, A_k – заданные постоянные, $k=\overline{0,n+1}$, $n\geqslant 2$, $A_0=A_{n+1}=0$, $A_n=1$.

2.
$$\sum_{k=0}^{n}\left(\left(A_k-\alpha A_{k+1}\right)P\left(x\right)-A_{k+1}P'\left(x\right)\right)y^{(k)}=0,$$

те же предположения, $P\left(x\right)$ – заданный многочлен.

3.
$$\sum_{k=0}^{n}\left(\left(A_k-\alpha A_{k+1}\right)x+\left(k+1\right)\left(A_{k+1}-\alpha A_{k+2}\right)\right)y^{(k)}=0,$$

снова те же предположения, $A_{n+1}=0$.

4.
$$\sum_{k=0}^{n}\left(\left(A_k-\left(\alpha+\beta\right)A_{k+1}+\alpha\beta A_{k+2}\right)x+\left(k+1\right)\left(A_{k+1}-\left(\alpha+\beta\right)A_{k+2}+\alpha\beta A_{k+2}\right)\right)y^{(k)}=0,$$

здесь добавлена заданная постоянная β, $\beta\neq\alpha$, $A_{n+1}=A_{n+2}=A_{n+3}=0$, $n\geqslant 3$.

5.
$$\sum_{k=0}^{n}\Big(\left(A_k-\left(\alpha+\beta\right)A_{k+1}+\alpha\beta A_{k+2}\right)x^2+\left(\left(\alpha+\beta\right)A_{k+2}-2A_{k+1}\right)x+2A_{k+2}\Big)y^{(k)}=0,$$

предположения как в предыдущем уравнении.

6.
$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{s=2k}^{n+k}a_{s-k,k}b_{n+k-s}x^s y^{(k)}=0,$$

где $b_0=1$, b_1, $\ldots$, b_n – заданные числа, $n\geqslant 1$; $a_{jj}=(-1)^j$, $j=\overline{0,n}$; $a_{j0}=0$, $j=\overline{1,n}$; $a_{jm}=(1-j-m)a_{j-1,m}-a_{j-1,m-1}$, $j=\overline{2,n}$ (при $n\geqslant 2$), $m=\overline{1,j-1}$.

Для этих уравнений можно найти элементарные функции, составляющие фундаментальные системы решений, благодаря чему написать затем общие решения, а также (используя, например, метод вариации произвольных постоянных) общие решения соответствующих неоднородных уравнений. Такие и некоторые другие уравнения можно предлагать для исследования студентам, проявляющим интерес к дифференциальным уравнениям, с целью написания курсовых работ, рефератов, докладов на студенческих научных конференциях, выступлений на коллоквиумах, в качестве дополнительных домашних заданий и т.п. Можно, кроме того, составлять разной сложности примеры этих уравнений, указывать близкие уравнения, допускающие решение в квадратурах, распространять уравнения на подходящие области комплексной плоскости. Замечательно то, что указанные уравнения не требуют для их анализа знаний сверх учебных программ по дифференциальным уравнениям (в частности, не требуется знаний специальных функций) и поэтому способны уже на младших курсах выработать исследовательские навыки будущих выпускников вузов.

Уравнение (1) указано в [1, с. 248, пример 17], остальные уравнения менее известны и могут представлять некоторый интерес также и специалистам по дифференциальным уравнениям. Специалистам могут показаться интересными и дальнейшие разработки, связанные с приведенными уравнениями (например, [2]).

Литература

1. Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. *Справочник по линейным обыкновенным дифференциальным уравнениям.* М.: Факториал, 1997.

2. Шилин А. П. *Гиперсингулярное интегро-дифференциальное уравнение с линейными функциями в коэффициентах* // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2022. Т.58. №4. С.358-369.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ КУРСА «ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ» НА ФПМИ БГУ

В. В. Дайняк, Е.С. Чеб

Функциональный анализ – одна из базовых дисциплин, которую изучают студенты математических специальностей. Его методы широко используются во многих разделах теоретической и прикладной математики. Благодаря идеям функционального анализа успешно развиваются такие дисциплины как дифференциальные уравнения, методы вычислений, теория управления и др. Его изучение – это элемент серьезного математического образования.

Курс „Функциональный анализ и интегральные уравнения"читается на факультете прикладной математики и информатики на всех специальностях на протяжении многих лет. За это время его изложение не раз менялось. Последние годы, в связи с изменением учебных планов и переходом на четырехлетнее образование значительно сократилось число часов, отводимых на изучение дисциплины. Поэтому большое внимание уделено методическому обеспечению дисциплины. Подготовлен электронно-методический комплекс (ЭУМК) [1], создан на образовательном портале edufpmi.bsu.by курс „Функциональный анализ и интегральные уравнения"и изданы методические пособия по курсу [2–6].

Остановимся на особенностях преподавания этой дисциплины на факультете прикладной математики и информатики. Продолжительность изучения дисциплины составляет один семестр, общая трудоемкость – 3,5 зачетных единицы. Главной задачей дисциплины является изучение основных абстрактных структур функционального анализа: метрических, нормированных, банаховых, гильбертовых пространств, теории интегральных уравнений Фредгольма и исследований операторных уравнений, возникающих в прикладных задачах, на разрешимость в заданных пространствах. При изложении теоретического материала наряду с аудиторными лекционными занятиями широко используется образовательный портал. На портале выложен электронный вариант лекций, который включает также материал, выходящий за рамки лекции. Это позволяет лучше