$$L_B u = 0, \quad (x,t) \in G_T, \tag{2}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{3}$$

$$u(0,t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{4}$$

$$\left(x^{k-1}u(x,t)\right)\Big|_{x=1} + \int\limits_0^l u(x,t)xdx = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{5}$$

где $\varphi(x)$ – заданная достаточно гладкая функция, удовлетворяющая условию согласования

$$\left(x^{k-1}\varphi(x)\right)\Big|_{x=1} + \int\limits_0^l \varphi(x)xdx = 0. \tag{6}$$

Теорема. *Задача (1) – (6) не может иметь более одного решения.*

Отметим, что в работе [5] была рассмотрена задача (1) – (6) при $0 < k < 1$.

Литература

1. Бенуар Нур-Эддин, Юрчук Н. И. *Смешанная задача с интегральным условием для параболических уравнений с оператором Бесселя* // Дифференц. уравнения. 1991. 27:12. С. 2094–2098.

2. Mesloub S. and Bouziani A., *Mixed problem with a weighted integral condition for a parabolic equation with the Bessel operator* // Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis. 2002. 15:3. P. 277-286.

3. Bouziani A, Oussaeif T.-E. and Benaoua L. *A Mixed Problem with an Integral Two-Space-Variables Condition for Parabolic Equation with The Bessel Operator* // Journal of Mathematics. 2013. Article ID 457631. 8 p.

4. Гарипов И. Б., Мавлявиев Р. М. *Нелокальная задача с интегральным условием для параболического уравнения с оператором Бесселя* // Вестник российских университетов. 2022. 27:139. С. 231–246.

5. Гарипов И. Б., Мавлявиев Р. М. *О единственности решения одной краевой задачи с интегральным условием для сингулярного параболического уравнения с оператором Бесселя* // XX Международная научная конференция по дифференциальным уравнениям (ЕРУГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ-2022): материалы Международной научной конференции. Новополоцк. Ч.2. Новополоцк: Полоцкий государственный университет. 2022. С. 5-6.

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО НЕСТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ СОСТАВНОГО ТИПА

В.В. Дайняк

Рассмотрим задачу типа Дирихле на плоскости для уравнений определенного вида третьего порядка с коэффициентами, зависящими от $x = (x_0, x_1)$, в главной части. Эти дифференциальные уравнения относительно неизвестной функции $u(x)$ переменных $x = (x_0, x_1)$ запишем в виде:

$$\mathcal{L}u = \Big(\frac{\partial}{\partial x_0} + \frac{\partial}{\partial x_1}\Big)\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} + \frac{\partial}{\partial x_1}\big(a(x)\frac{\partial u}{\partial x_1}\big)\Big) + \mathcal{L}_1(x,D)u = f(x), \tag{1}$$

где $\mathcal{L}_1(x,D)u = p_0(x)\dfrac{\partial u}{\partial x_0} + p_1(x)\dfrac{\partial u}{\partial x_1} - \lambda(x)u$. Здесь $a(x)$ – достаточно гладкая функция, а коэффициенты полинома $\mathcal{L}_1(x,D)$ и их производные $\dfrac{\partial p_i(x)}{\partial x_i}$ $(i = 0,1)$ измеримы и ограничены. Ниже будут сформулированы некоторые дополнительные условия оператора $\mathcal{L}$, которые являются достаточными. С помощью этих условий доказывается однозначная разрешимость уравнения (1) в некоторой области при наличии простейших граничных условий, которые называются условиями типа Дирихле.

Обозначим через Ω произвольную ограниченную область плоскости переменных x с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$, а через $n = (n_0, n_1)$ единичный вектор внешней нормали к поверхности $\partial\Omega$.

Пусть $\mathcal{L}_0(n) = n_0^3 + n_0^2 n_1 + a(x) n_0 n_1^2 + a(x) n_1^3$. В области Ω рассмотрим уравнение (1) относительно функции $u(x)$, которая удовлетворяет однородным граничным условиям типа Дирихле:

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega^-} = 0, \tag{2}$$

где $\partial\Omega^-$ – часть границы $\partial\Omega$, в точках которой $\mathcal{L}_0(n) < 0$.

Вместе с задачей (1)–(2) будем рассматривать и сопряженную задачу:

$$\mathcal{L}^+ v = g(x), \tag{3}$$

$$v|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega^+} = 0, \quad \partial\Omega^+ = \{x \in \Omega | \mathcal{L}_0(n) > 0\}, \tag{4}$$

где $\mathcal{L}^+$ – оператор, формально сопряженный к оператору $\mathcal{L}$ и

$$\mathcal{L}^+ = -\Big(\frac{\partial}{\partial x_0} + \frac{\partial}{\partial x_1}\Big)\Big(\frac{\partial^2}{\partial x_0^2} + \frac{\partial}{\partial x_1}\big(a(x)\frac{\partial}{\partial x_1}\big)\Big) + \mathcal{L}_1^+(x,D),$$

$\mathcal{L}_1^+$ – оператор первого порядка, формально сопряженный к $\mathcal{L}_1$.

Введем обозначения: $H^l(\Omega)$ – пространство Соболева функций, определенных в области Ω с квадратично суммируемыми обобщенными производными до порядка l $(l = 0,1,2,3)$. $H_0^l(\Omega)$ – подпространства пространств $H^l(\Omega)$, элементы которых удовлетворяют условиям (2) ((4)). $H_0^{-1}(\Omega)$ – сопряженное к $H_0^1(\Omega)$ пространство относительно канонической билинейной формы (u,v), $u \in H_0^{-1}(\Omega), v \in H_0^1(\Omega)$, являющейся продолжением по непрерывности билинейной формы $(u,v)_{L_2(\Omega)}$, где $u \in L_2(\Omega), v \in H_0^1(\Omega)$. Заметим, что $H^0(\Omega) = L_2(\Omega)$, то есть $(\cdot,\cdot)_{H^0(\Omega)}$ - скалярное произведение в $L_2(\Omega)$.

Задачи (1)–(2) и (3)–(4) будем рассматривать как решения операторных уравнений

$$\mathcal{L}u = f \tag{5}$$

и

$$\mathcal{L}^+ v = g \tag{6}$$

с областями определения $D(\mathcal{L}) = H_0^3(\Omega)$ и $D(\mathcal{L}^+ = H_0^3(\Omega)$ соответственно.

Построим расширения L и L^+ операторов $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}^+ (L \in H_0^1(\Omega), L^+ \in H_0^{-1}(\Omega))$. В качестве расширений L и L^+ возьмем сопряженные операторы к операторам $\mathcal{L}^+$ и $\mathcal{L}$ соответственно, действующие из $H_0^1(\Omega)$ в $H_0^{-1}(\Omega)$. Решения уравнений

$$Lu = f, \quad L^+ v = g$$

назовем обобщенным решением задачи (1)–(2) или уравнения (5) и задачи (3)–(4) или уравнения (6) соответственно.

Имеют место следующие теоремы:

Теорема 1. *Если выполняется условие* $\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial p_0(x)}{\partial x_0}+\frac{\partial p_1(x)}{\partial x_1}\Big)+\lambda(x)>0,$ *то для всех* $u,\upsilon\in H_0^1(\Omega)$ *справедливы неравенства*

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)}<c||Lu||_{H_0^{-1}(\Omega)},$$

$$\|\upsilon||_{H_0^1(\Omega)}<c^*||L^+\upsilon||_{H_0^{-1}(\Omega)},$$

где постоянные $c>0$ *и* $c^*>0$ *не зависят от функций* u *и* υ.

Теорема 2. *При выполнении условий теоремы 1 для всех* $f\in H_0^{-1}(\Omega)$ *существует и единственно обобщенное решение* $u\in H_0^1(\Omega)$ *задачи (1)–(2), соответственно для всех* $g\in H_0^{-1}(\Omega)$ *существует и единственно обобщенное решение* $\upsilon\in H_0^1(\Omega)$ *задачи (3)–(4).*

Литература

1. Корзюк В.И., Дайняк В.В., Протько А.А. *Задача типа Дирихле для составного уравнения третьего порядка* // Вестник Белорусского государственного университета. Сер.1. 2012. №3. С. 116–121.

2. Дайняк В.В., Корзюк В.И. *Задача типа Дирихле для линейного дифференциального уравнения третьего порядка* // Дифференциальные уравнения. 1992. Т. 28. №6. С. 1056–1060.

3. Корзюк В.И. *Метод энергетических неравенств и операторов осреднения. Граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными.* Минск: БГУ, 2013.

4. Корзюк В.И. *Уравнения математической физики: курс лекций.* Минск, 2008.

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ПСЕВДОГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Г.В. Демиденко, Л.Н. Бондарь

В докладе речь пойдет о разрешимости задачи Коши для класса псевдгиперболических уравнений

$$\begin{cases}\mathcal{L}_0(D_x)D_t^l u+\sum\limits_{k=0}^{l-1}\mathcal{L}_{l-k}(D_x)D_t^k u=f(t,x),\ t>0,\\ \\ D_t^k u\big|_{t=0}=0,\ k=0,\dots,l-1.\end{cases}\tag{1}$$

Класс псевдогиперболических уравнений был введен в монографии [1]. Уравнения такого типа возникают при моделировании упругих колебаний стержня, балки, в теории волноводов и др. (см., например, [2–4]).

Дадим определение псевдогиперболического уравнения без младших членов

$$L(D_t,D_x)u=f(t,x),\tag{2}$$

где $L(D_t,D_x)=\mathcal{L}_0(D_x)D_t^l+\sum\limits_{k=0}^{l-1}\mathcal{L}_{l-k}(D_x)D_t^k.$

Будем предполагать, что выполнены следующие условия:

Условие 1. Символ дифференциального оператора $L(D_t,D_x)$ однороден относительно вектора $(\alpha_0,\alpha)=(\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_n)$, $\alpha_0>0,\ 1/\alpha_j$ — натуральные числа:

$$L(c^{\alpha_0}i\eta,c^{\alpha}i\xi)=cL(i\eta,i\xi),\quad c>0.$$