О НЕКОТОРЫХ ИЗМЕНЕНИЯХ В МЕТОДИКЕ ПРОВЕДЕНИЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ» НА ФИЗИЧЕСКОМ ФАКУЛЬТЕТЕ БЕЛОРУССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

А.Н. Деревяго, А.А. Егоров, И.И. Рушнова

Настоящее сообщение продолжает цикл работ [1, 2], связанных с методикой преподавания дисциплины «Методы математической физики» на физическом факультете и факультете радиофизики и компьютерных технологий БГУ. В соответствии с новой учебной программой по этой дисциплине на физическом факультете в текущем учебном году запланировано 50 часов на проведение практических занятий. Существенное увеличение объема практической части позволило дополнить программу новыми разделами. Одним из таких разделов является применение классических интегральных преобразований Лапласа и Фурье для решения задач математической физики, имеющих важное значение в приложениях.

В качестве примера рассмотрим задачу о свободных колебаниях струны длиной l, жестко закрепленной на концах. Начальное отклонение струны задается равенством $u|_{t=0} = h\sin\dfrac{\pi x}{l}$, $h = \mathrm{const} > 0$, а начальная скорость равна нулю:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \tag{1}$$

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0, \quad t \geqslant 0, \tag{2}$$

$$u|_{t=0} = h\sin\frac{\pi x}{l}, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \tag{3}$$

Найдем отклонение струны от положения равновесия при $t > 0$. Обозначим через $U(x,p)$ изображение функции $u(x,t)$ по переменной t. Применяя преобразование Лапласа, с учетом начальных условий переходим от уравнения (1) к операторному уравнению (p рассматриваем как параметр)

$$\frac{d^2U}{dx^2} - \frac{p^2}{a^2}U = -\frac{hp}{a^2}\sin\frac{\pi x}{l} \tag{4}$$

с граничными условиями, вытекающими из соотношений (2):

$$U|_{x=0} = 0, \quad U|_{x=l} = 0. \tag{5}$$

Уравнение (4) является неоднородным обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. Общее решение уравнения имеет вид

$$U(x,p) = C_1e^{(px)/a} + C_2e^{-(px)/a} + \frac{hp}{p^2+(a\pi/l)^2}\sin\frac{\pi x}{l}.$$

Подставляя его в (5), находим, что $C_1 = C_2 = 0$. Таким образом, получим

$$U(x,p) = \frac{hp}{p^2+(a\pi/l)^2}\sin\frac{\pi x}{l}.$$

Оригиналом для $U(x,p)$ и решением смешанной задачи (1)–(3) является функция

$$u(x,t) = h\cos\frac{a\pi t}{l}\sin\frac{\pi x}{l}.$$

Используем теперь интегральное преобразование Фурье для решения одномерного волнового уравнения. Пусть между двумя точками $x=0$ и $x=l$ натянута однородная струна длиной l. В точке $x=c$ струна оттягивается на малое расстояние $h=\mathrm{const}>0$ от положения равновесия и в момент времени $t=0$ отпускается без начальной скорости. Необходимо определить отклонение $u(x,t)$ струны для любого момента времени.

Функция $u(x,t)$ должна удовлетворять смешанной задаче

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad 0<x<l,\quad t>0, \tag{6}$$

$$u|_{x=0}=0,\quad u|_{x=l}=0,\quad t\geqslant 0, \tag{7}$$

$$u|_{t=0}=\begin{cases}\frac{hx}{c}, & 0\leqslant x\leqslant c,\\ \frac{h(l-x)}{l-c}, & c<x\leqslant l,\end{cases}\quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0,\quad 0\leqslant x\leqslant l. \tag{8}$$

Применим к дифференциальному уравнению (6) синус-преобразование Фурье, определенное на конечном отрезке $[0,l]$:

$$\int\limits_0^l \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx=a^2\int\limits_0^l\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx.$$

Интегрируя правую часть этого равенства по частям, с учетом граничных условий (7) запишем его в виде

$$\frac{d^2U}{dt^2}+\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 U=0,$$

где $U(k,t)=\int\limits_0^l u(x,t)\sin\dfrac{k\pi x}{l}\,dx.$

Далее, применим синус-преобразование Фурье к начальным условиям (8):

$$U|_{t=0}=\int\limits_0^c\frac{hx}{c}\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx+\int\limits_c^l\frac{h(l-x)}{l-c}\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx=\frac{hl^3}{k^2\pi^2c(l-c)}\sin\frac{k\pi c}{l},\quad \left.\frac{dU}{dt}\right|_{t=0}=0.$$

Решая полученную задачу Коши, находим выражение для функции $U(k,t)$:

$$U(k,t)=\frac{hl^3}{k^2\pi^2c(l-c)}\sin\frac{k\pi c}{l}\cos\frac{k\pi at}{l}.$$

Выполняя обратное преобразование Фурье $u(x,t)=\dfrac{2}{l}\sum\limits_{k=1}^{\infty}U(k,t)\sin\dfrac{k\pi x}{l}$, окончательно приходим к ответу

$$u(x,t)=\frac{2hl^2}{\pi^2c(l-c)}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\sin\frac{k\pi c}{l}\cos\frac{k\pi at}{l}\sin\frac{k\pi x}{l}.$$

Литература

1. Деревяго А.Н., Егоров А.А. *О дополнении к методике проведения практических занятий по дисциплине «Методы математической физики» на факультете радиофизики и компьютерных технологий Белорусского государственного университета* // Международная математическая конференция «Седьмые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям». Институт математики НАН Беларуси, 2021. С. 239–242.

2. Березкина Л.Л., Егоров А.А. *Об учебной программе по дисциплине «Методы математической физики» для специальностей факультета радиофизики и компьютерных технологий Белгосуниверситета* // XX Международная научная конференция по дифференциальным уравнениям (ЕРУГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ-2022): материалы Международной научной конференции. Новополоцк, Полоцкий государственный университет, 2022. С. 113–115.

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА ТИПА СВЕРТКИ

А.Н. Деревяго, О.А. Кононова

На физическом факультете БГУ уравнения Вольтерра второго рода рассматриваются в разделе «Линейные интегральные уравнения» из курса обыкновенных дифференциальных уравнений.

Определение. Уравнение

$$y(x) = f(x) + \int_0^x K(x,t)y(t)dt \tag{1}$$

называется *линейным интегральным уравнением Вольтерра второго рода* [1, 2]. Функции $f(x)$, $K(x,t)$ – заданные функции, $y(x)$ – искомая функция. Функция $K(x,t)$ называется ядром уравнения. Уравнение, в котором искомая функция $y(x)$ находится только под знаком интеграла, называется *уравнением Вольтерра первого рода*.

Будем рассматривать уравнения Вольтерра (1) специального вида, когда его ядро есть функция вида $K(x-t)$. Такие интегральные уравнения называются *уравнениями типа свертки*:

$$y(x) = f(x) + \int_0^x K(x-t)y(t)dt. \tag{2}$$

Пусть $y(x) \risingdotseq Y(p), f(x) \risingdotseq F(p)$ и $K(x) \risingdotseq K(p)$. Применяя для двух частей уравнения (2) преобразование Лапласа и формулу умножения изображений

$$F(p)G(p) \risingdotseq \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau,$$

получим

$$Y(p) = F(p) + K(p)Y(p),$$

откуда находим

$$Y(p) = \frac{F(p)}{1-K(p)}, \quad K(p) \neq 1. \tag{3}$$

По известному изображению (3) находится оригинал $y(x) \risingdotseq Y(p)$.