назовем обобщенным решением задачи (1)–(2) или уравнения (5) и задачи (3)–(4) или уравнения (6) соответственно.

Имеют место следующие теоремы:

Теорема 1. *Если выполняется условие* $\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial p_0(x)}{\partial x_0}+\frac{\partial p_1(x)}{\partial x_1}\Big)+\lambda(x)>0,$ *то для всех* $u,\upsilon\in H_0^1(\Omega)$ *справедливы неравенства*

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)}<c||Lu||_{H_0^{-1}(\Omega)},$$

$$\|\upsilon||_{H_0^1(\Omega)}<c^*||L^+\upsilon||_{H_0^{-1}(\Omega)},$$

где постоянные $c>0$ *и* $c^*>0$ *не зависят от функций* u *и* υ.

Теорема 2. *При выполнении условий теоремы 1 для всех* $f\in H_0^{-1}(\Omega)$ *существует и единственно обобщенное решение* $u\in H_0^1(\Omega)$ *задачи (1)–(2), соответственно для всех* $g\in H_0^{-1}(\Omega)$ *существует и единственно обобщенное решение* $\upsilon\in H_0^1(\Omega)$ *задачи (3)–(4).*

Литература

1. Корзюк В.И., Дайняк В.В., Протько А.А. *Задача типа Дирихле для составного уравнения третьего порядка* // Вестник Белорусского государственного университета. Сер.1. 2012. №3. С. 116–121.

2. Дайняк В.В., Корзюк В.И. *Задача типа Дирихле для линейного дифференциального уравнения третьего порядка* // Дифференциальные уравнения. 1992. Т. 28. №6. С. 1056–1060.

3. Корзюк В.И. *Метод энергетических неравенств и операторов осреднения. Граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными.* Минск: БГУ, 2013.

4. Корзюк В.И. *Уравнения математической физики: курс лекций.* Минск, 2008.

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ПСЕВДОГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Г.В. Демиденко, Л.Н. Бондарь

В докладе речь пойдет о разрешимости задачи Коши для класса псевдгиперболических уравнений

$$\begin{cases}\mathcal{L}_0(D_x)D_t^l u+\sum\limits_{k=0}^{l-1}\mathcal{L}_{l-k}(D_x)D_t^k u=f(t,x),\ t>0,\\ \\ D_t^k u\big|_{t=0}=0,\ k=0,\dots,l-1.\end{cases}\tag{1}$$

Класс псевдогиперболических уравнений был введен в монографии [1]. Уравнения такого типа возникают при моделировании упругих колебаний стержня, балки, в теории волноводов и др. (см., например, [2–4]).

Дадим определение псевдогиперболического уравнения без младших членов

$$L(D_t,D_x)u=f(t,x),\tag{2}$$

где $L(D_t,D_x)=\mathcal{L}_0(D_x)D_t^l+\sum\limits_{k=0}^{l-1}\mathcal{L}_{l-k}(D_x)D_t^k.$

Будем предполагать, что выполнены следующие условия:

Условие 1. Символ дифференциального оператора $L(D_t,D_x)$ однороден относительно вектора $(\alpha_0,\alpha)=(\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_n)$, $\alpha_0>0,\ 1/\alpha_j$ — натуральные числа:

$$L(c^{\alpha_0}i\eta,c^\alpha i\xi)=cL(i\eta,i\xi),\quad c>0.$$

Условие 2. Оператор $\mathcal{L}_0(D_x)$ — квазиэллиптический оператор.

Условие 3. Уравнение

$$(i\eta)^l + \sum_{k=0}^{l-1} (\mathcal{L}_0(i\xi))^{-1} \mathcal{L}_{l-k}(i\xi)(i\eta)^k = 0, \quad \xi \in R^n, \tag{3}$$

имеет только вещественные корни $\eta_1(\xi)$, $\eta_2(\xi), \ldots, \eta_l(\xi)$.

Определение 1. Уравнение (2) называется псевдогиперболическим, если выполнены условия 1–3.

Мы будем рассматривать строго псевдогиперболические уравнения, в этом случае предполагается, что корни уравнения (3) при $\xi \in R^n \backslash \{0\}$ различные.

В работах [1–5] установлены условия однозначной разрешимости задачи Коши (1) в соболевских пространствах $W_2^{l,r}((0,T) \times R^n)$, $r = (1/\alpha_1, \ldots, 1/\alpha_n)$. В частности, было доказано, что при $|\alpha|/2 > 1 - l\alpha_0$, $|\alpha| = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j$, задача Коши (1) однозначно разрешима для любой

$$f(t,x) \in W_2^{0,s}((0,T) \times R^n) \cap L_2((0,T); L_1(R^n)), \quad s = (\alpha_0/\alpha_1, \ldots, \alpha_0/\alpha_n).$$

При $|\alpha|/2 \le 1 - l\alpha_0$ необходимы дополнительные условия разрешимости типа условий ортогональности

$$\int\limits_{R^n} x^\beta f(t,x)\, dx = 0, \quad |\beta| = 0, \ldots, N.$$

В настоящем докладе мы изучаем разрешимость задачи Коши (1) в некоторой шкале весовых соболевских пространств $W^{l,r}_{2,\varkappa,\sigma,\gamma}(R^{n+1}_+)$, $r = (1/\alpha_1, \ldots, 1/\alpha_n), \gamma > 0, \varkappa > 0, 0 \le \sigma \le 1$. Такой выбор пространств позволяет доказать теоремы об однозначной разрешимости при меньших ограничениях на правую часть уравнения $f(t,x)$.

Определение 2. Будем говорить, что локально суммируемая $u(t,x)$ принадлежит весовому соболевскому пространству

$$W^{l,r}_{2,\varkappa,\sigma,\gamma}(R^{n+1}_+), \quad r = (1/\alpha_1, \ldots, 1/\alpha_n), \gamma > 0, \varkappa > 0, 0 \le \sigma \le 1,$$

если $u(t,x)$ имеет обобщенные производные $D_t^k D_x^\beta u$, $k = 0, \ldots, l$, $k\alpha_0 + \beta\alpha \le 1$, при этом $e^{-\gamma t} D_x^\beta u \in L_2(R^{n+1}_+)$, $\varkappa \le \beta\alpha \le 1$, и

$$\|(1 + \langle x \rangle)^{-\sigma(\varkappa - \beta\alpha)} e^{-\gamma t} D_x^\beta u, L_2(R^{n+1}_+)\| < \infty, \, 0 \le \beta\alpha \le \varkappa,$$

$$\|(1 + \langle x \rangle)^{-\sigma\varkappa} e^{-\gamma t} D_t^j u, L_2(R^{n+1}_+)\| < \infty, \, j \le l, \quad \langle x \rangle^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^{2/\alpha_k}.$$

Норма в пространстве $W^{l,r}_{2,\varkappa,\sigma,\gamma}(R^{n+1}_+)$, определяется как

$$\|u(t,x), W^{l,r}_{2,\varkappa,\sigma,\gamma}(R^{n+1}_+)\| = \|(1 + \langle x \rangle)^{-\sigma\varkappa} e^{-\gamma t} u, L_2(R^{n+1}_+)\|$$

$$+ \|(1 + \langle x \rangle)^{-\sigma\varkappa} e^{-\gamma t} D_t^l u, L_2(R^{n+1}_+)\| + \sum_{\varkappa \le \beta\alpha \le 1} \|e^{-\gamma t} D_x^\beta u, L_2(R^{n+1}_+)\|.$$

В частности, при $|\alpha|/2 > 1 - l\alpha_0$ для любой

$$e^{-\gamma t} f(t,x) \in W_2^{0,s}(R^{n+1}_+), \quad s = (\alpha_0/\alpha_1, \ldots, \alpha_0/\alpha_n).$$

задача Коши (1) имеет единственное решение в

$$W^{l,r}_{2,\varkappa,\sigma,\gamma}(R^{n+1}_+), \quad r = (1/\alpha_1, \dots, 1/\alpha_n),\ \gamma > 0,\ \varkappa = 1 - l\alpha_0,\ \sigma = 1.$$

Исследования выполнены в рамках государственного задания Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН (проект № FWNF-2022-0008).

Литература

1. Демиденко Г. В., Успенский С. В. *Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной.* Новосибирск: Научная книга, 1998.

2. Власов В. З. *Тонкостенные упругие стержни.* Москва-Ленинград: Стройиздат, 1940.

3. Герасимов С. И., Ерофеев В. И. *Задачи волновой динамики элементов конструкций.* Саров: ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", 2014.

4. Bishop R. E. D. *Longitudinal waves in beams* // Aeronautical Quarterly. 1952. V. 3. № 4. P. 280–293.

5. Демиденко Г. В. *Условия разрешимости задачи Коши для псевдогиперболических уравнений* // Сиб. мат. журн. 2015. Т. 56. № 6. С. 1289–1303.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ С КУБИЧЕСКИМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ С ПОМОЩЬЮ НЕЛИНЕЙНОГО МЕМТОДА УГЛОВЫХ ПОГРАНИЧНЫХ ФУНКЦИЙ

А. И. Денисов, И. В. Денисов

В прямоугольнике $\Omega = \{(x,t)\,|\,0 < x < 1,\ 0 < t < T\}$ рассматривается начально-краевая задача для сингулярно возмущенного параболического уравнения

$$\varepsilon^2 \left(a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} \right) = F(u,x,t,\varepsilon), \quad (x,t) \in \Omega,$$

$$u(x,0,\varepsilon) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le 1,$$

$$u(0,t,\varepsilon) = \psi_1(t), \quad u(1,t,\varepsilon) = \psi_2(t), \quad 0 \le t \le T.$$

Для построения асимптотики решения задачи используется нелинейный метод угловых пограничных функций, в рамках которого разработаны возможные виды нижних и верхних решений для нелинейных задач, определяющих главные члены угловой части асимптотики решения. Реализация метода предполагает выполнение следующих шагов:

1) разбиение области на части;
2) построение в каждой подобласти нижних и верхних решений задачи;
3) непрерывная стыковка нижних и верхних решений на общих границах подобластей;
4) последующее сглаживание кусочно-непрерывных нижних и верхних решений.

Если в угловых точках прямоугольника функция F относительно переменной u является кубической, то удается построить барьерные функции, пригодные сразу во всей области. Вид барьерных функций определяются с помощью погранслойных функций, являющихся решениями обыкновенных дифференциальных уравнений, а также с учетом необходимых свойств искомых решений. В результате строится полное асимптотическое разложение решения при $\varepsilon \to 0$ и обосновывается его равномерность в замкнутом прямоугольнике.