

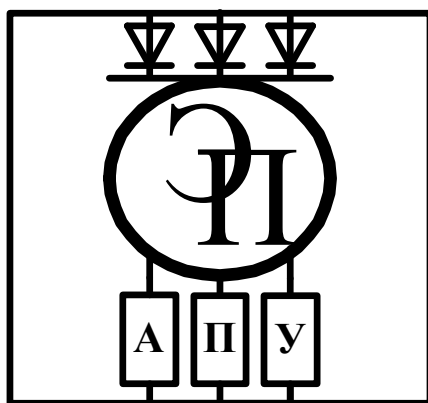
МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Электропривод и автоматизация промышленных установок»

# АВТОНОМНЫЕ МОБИЛЬНЫЕ РОБОТЫ

*Методические рекомендации к практическим занятиям  
для магистрантов направления подготовки  
15.04.06 «Мехатроника и робототехника»  
очной и заочной форм обучения*

Часть 2



Могилев 2023

УДК 621.865.8  
ББК 32.816  
А22

Рекомендовано к изданию  
учебно-методическим отделом  
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Электропривод и автоматизация промышленных установок» «26» октября 2022 г., протокол № 3

Составитель канд. техн. наук, доц. С. М. Фурманов

Рецензент канд. техн. наук, доц. М. Н. Миронова

Методические рекомендации к практическим занятиям по дисциплине «Автономные мобильные роботы» предназначены для магистрантов направления подготовки 15.04.06 «Мехатроника и робототехника» очной и заочной форм обучения.

Учебное издание

## АВТОНОМНЫЕ МОБИЛЬНЫЕ РОБОТЫ

Часть 2

Ответственный за выпуск	С. М. Фурманов
Корректор	А. А. Подошевка
Компьютерная верстка	Н. П. Полевничая

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.  
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 26 экз. Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение:  
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования  
«Белорусско-Российский университет».  
Свидетельство о государственной регистрации издателя,  
изготовителя, распространителя печатных изданий  
№ 1/156 от 07.03.2019.  
Пр-т Мира, 43, 212022, г. Могилев.

© Белорусско-Российский  
университет, 2023

## Содержание

9 Практическое занятие № 9. Задачи определения сектора обзора и зоны видимости дальногомера .....	4
10 Практическое занятие № 10. Задачи определения навигационных характеристик робота .....	13
11 Практическое занятие № 11. Прямая и обратная задачи кинематики для колесного робота .....	19
12 Практическое занятие № 12. Задачи управляемости и наблюдаемости для мобильных колесных роботов .....	27
13 Практическое занятие № 13. Применение фильтра Калмана в задачах навигации мобильных колесных роботов .....	37
Список литературы .....	44

## Часть 2

### 9 Практическое занятие № 9. Задачи определения сектора обзора и зоны видимости дальномера

**Цель работы:** изучить процесс определения сектора обзора и зоны видимости дальномера автономных мобильных роботов.

#### 9.1 Система позиционирования и идентификации автономных мобильных роботов

Важной чертой автономных мобильных робототехнических систем является возможность самостоятельно осуществлять навигацию в пространстве. Первой актуальной задачей является построение роботом карты неизвестной местности самостоятельно. При этом роботу необходимо сохранить всю требуемую информацию о распознаваемых объектах. Далее эта информация может быть использована для решения роботом задач на исследуемой области пространства. Второй актуальной задачей является идентификация положения робота в ограниченном пространстве, для которого уже построена карта, при этом необходимо наносить на карту вновь распознанные объекты при движении робота.

Для решения данных задач необходимо оснащение робота информационно-измерительными устройствами, позволяющими определить и отследить его местоположение на карте. На рисунке 9.1 представлено аппаратное обеспечение мобильного робота для решения задачи позиционирования в пространстве.

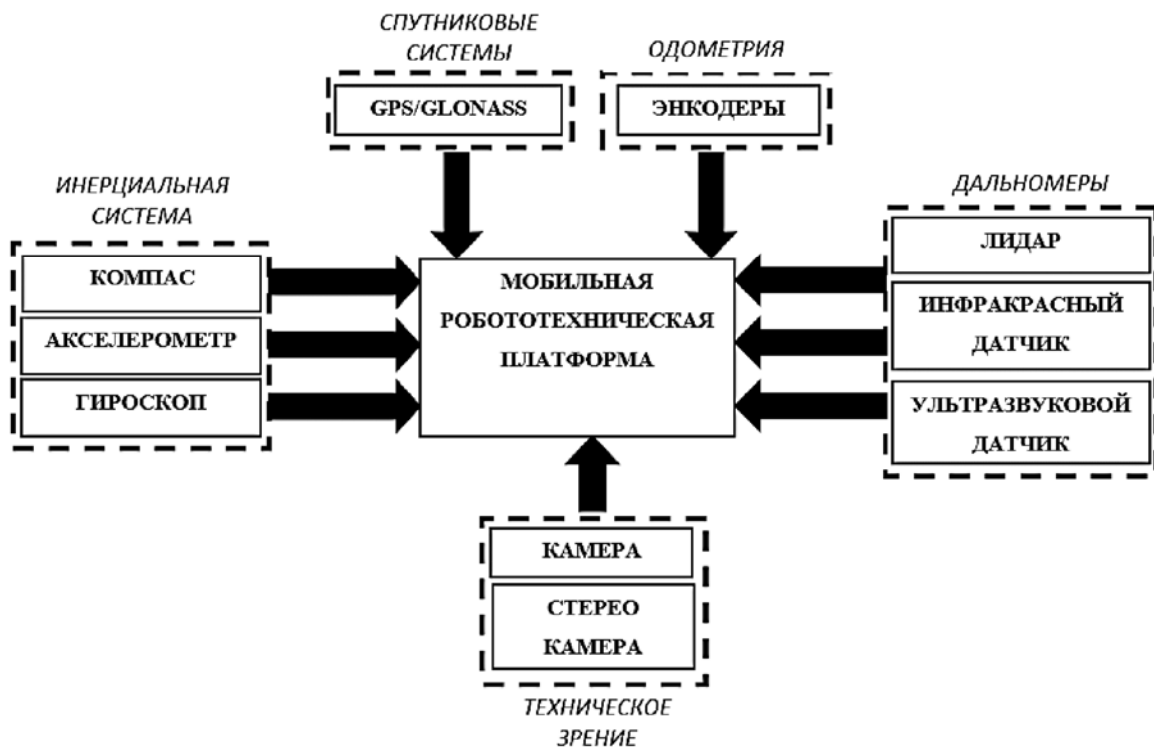


Рисунок 9.1 – Структурная схема мобильного робота для решения задач позиционирования в пространстве

**Дальномеры.** Дальномеры для мобильных робототехнических платформ используются для определения расстояния до целей, при этом сканирующие лидары позволяют совместно с системой технического зрения сформировать двумерную или трехмерную картину окружающего пространства. В таблице 9.1 приведены типы дальномеров, которые используются в мобильных роботах.

Таблица 9.1 – Типы дальномеров

Тип дальномера	Описание	Преимущество	Недостаток
2D- и 3D-сканирующие лидары. Диапазон измерения: 0,01...50 м	Объект освещается коротким световым импульсом и измеряется время, через которое сигнал вернется к источнику. Чаще всего работают на длинах волн: 1064, 532, 600...1000 и ~1500 нм	Быстрота сбора данных. Использование в любое время суток. Большое разрешение и высокая точность измерений. Дальность измерений	Высокая стоимость
Ультразвуковой датчик. Диапазон измерения: 0,03...6 м	Ультразвуковые волны с частотой 65...400 кГц в виде кратковременного импульса излучаются в направлении контролируемой зоны 10–200 раз в секунду	Высокая скорость измерений. Небольшая стоимость. Эффективность работы в условиях густого тумана, задымленности	Плохо воспринимает сигналы от звукопоглощающих объектов. Неточность измерения. Ограниченный диапазон измерений
Инфракрасный датчик. Диапазон измерения: 0,03...1,5 м	Излучение с длиной волны ( $850 \pm 70$ ) нм распространяется и отражается от объектов, находящихся в поле зрения сенсора, возвращается на приемник. Испускаемый и отраженный луч образует треугольник «излучатель – объект отражения – приемник»	Простота в использовании. Небольшая стоимость	Ограниченный диапазон измерений. Не воспринимает прозрачную поверхность. Засветы от солнца. Некорректно определяет расстояния до светопоглощающих объектов

**Инерциальная система.** Инерциальная система навигации позволяет определить ускорения объекта и его угловых скоростей с помощью установленных на движущемся объекте приборов и устройств. С помощью этих данных определяется местоположение объекта, его скорость и направление движения. Каждое инерциальное измерительное устройство включает в себя, как минимум, акселерометр и гироскоп. Зная ориентацию одной системы координат относительно другой можно переводить измерения из системы координат устройства в глобальную. А знания об ускорениях в глобальной системе координат позволят путем интегрирования восстановить скорость и получить информацию об относительном местоположении мобильной робототехнической платформы.

**Одометрия.** С помощью одометрических данных мы имеем возможность рассчитать пройденный путь на основании данных, полученных от приводов. В реальных условиях одометры подвержены негативному влиянию, такому как люфт, пробуксовка колес. Если при оценке пройденного расстояния полагаться исключительно на данные с энкодера, то накопленные ошибки могут затруднить определение местоположения. Поэтому, как правило, одометр используют как вспомогательный датчик в комбинации с другими датчиками.

**Модуль технического зрения.** Теория машинного зрения предлагает целый ряд различных модельных описаний наблюдаемых объектов, которые могут быть использованы для их обнаружения и измерения. Видеокамеры способны дать больше информации об окружающем пространстве, нежели прочие датчики. В настоящее время для решения задач технического зрения широко применяются системы стереозрения, состоящие из двух сопряженных видеокамер. Такая система дает возможность не только рассчитывать расстояние до препятствий, но и построить 3D-модель окружающего мира. Наиболее распространенными проблемами при использовании видеокамер являются: высокая вычислительная сложность, оптические искажения, вносимые линзами в изображения, зависимость от освещения, ошибочные данные при работе с отражающими поверхностями, однородное окружение [1].

**Спутниковые системы навигации.** Суть работы любого навигационного устройства заключается в том, что на него отправляется сообщение о местонахождении спутника с точным указанием времени. Приемник сигнала сравнивает время отправки и получения и определяет свое расстояние до спутника. Благодаря сравнению таких данных определяется местоположение объекта. Погрешность может варьироваться от 10 до 100 м, но можно сократить это значение до 1...2 м. На точность влияют факторы: расположение объектов относительно друг друга, отражение сигнала от других объектов и др. [1].

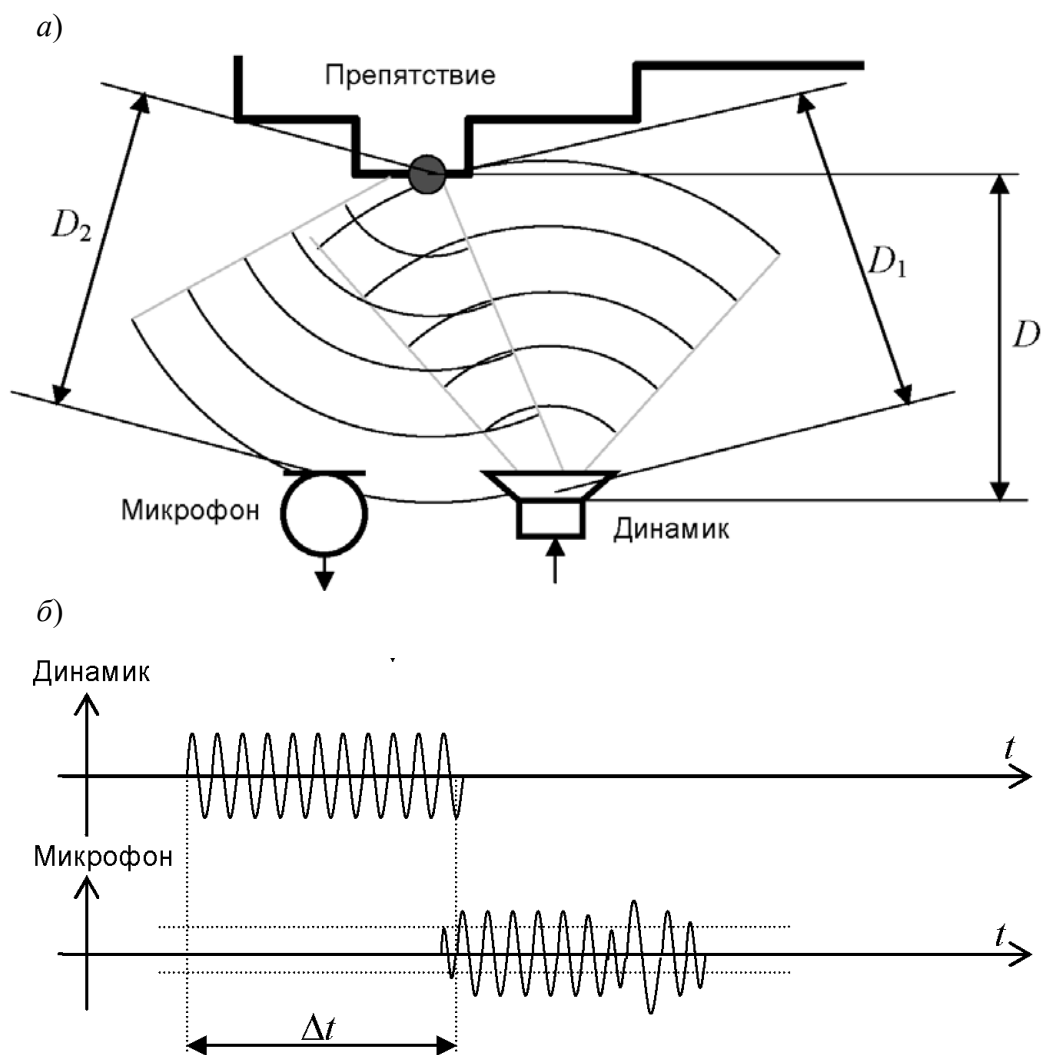
## ***9.2 Принцип работы ультразвуковых дальномеров***

Ультразвуковой дальномер во время измерения формирует ультразвуковой импульс (обычно 40 кГц), звук отражается от препятствия на пути и принимается микрофоном (рисунок 9.2). Электронное устройство дальмера регистрирует время  $\Delta t$  между моментом формирования сигнала динамиком и его приема микрофоном (по пороговому уровню). Расстояние до препятствия определяется по формуле [2]

$$\Delta t = \frac{D_1 + D_2}{c} \approx \frac{2D}{c};$$

$$D = \frac{\Delta t \cdot c}{2},$$

где  $c$  – скорость звука в воздухе,  $c = 343$  м/с.



*a* – схема дальномера; *б* – графики излученного и принятого ультразвукового сигнала

Рисунок 9.2 – Принцип работы ультразвукового дальномера

Для формирования ультразвукового сигнала обычно используется пьезоэлектрический микрофон и динамик, т. к. обычные электромагнитные микрофоны и динамики не предназначены для данного звукового диапазона. Также в ультразвуковом дальномере имеется полосовой фильтр на данную звуковую частоту, чтобы отфильтровать чужеродные звуки.

Важной особенностью ультразвуковых дальномеров является наличие относительно широкого угла сканирования, обычно от 20 до 60 град. Дальномер формирует отметку дальности, если в зоне сканирования оказывается любое, даже небольшое препятствие.

Другой особенностью является ориентация поверхности препятствия относительно дальномера. Препятствие не регистрируется, если угол между осью дальномера и нормалью к поверхности более 70...80 град (в зависимости от гладкости поверхности), т. к. отраженная звуковая волна уходит в пустоту. При установке дальномера на работа следует понимать, что сигнал может отражаться от пола, если он попадает в конус сканирования дальномера.

Конструктивно и микрофон и динамик устроены одинаково. Практически любой динамик может использоваться в качестве микрофона. Поэтому в некоторых дальномерах микрофон и динамик совмещены в одно устройство: в момент излучения устройство работает в режиме динамика, а затем переключается в режим микрофона. Примеры внешнего вида ультразвуковых дальномеров приведены на рисунке 9.3 [2].



Рисунок 9.3 – Примеры внешнего вида ультразвуковых дальномеров

### 9.3 Принцип работы лазерных дальномеров

Анализ методов и средств навигации мобильных роботов показал, что оптимальным методом для построения карты маршрута является сканирующий лазерный дальномер, применение которого позволяет достичь наиболее высокой точности локализации.

Основой лазерного дальномера является лидар (LIDAR, от англ. *Light Identification Detection and Ranging* – световое обнаружение и определение дальности). Лидар реализует технологию получения и обработки информации об удаленных объектах с помощью электромагнитного излучения.

Применение лидаров позволяет получать более полную и точную картину окружающего пространства, в то время как применение ультразвуковых дальномеров целесообразно в условиях, когда оптические методы определения расстояния работают плохо, например, в условиях густого тумана, задымленности, поэтому на практике применяют совмещенные системы, дополняя данные с лидаров информацией с ультразвуковых датчиков.

Принцип работы лидара приведен на рисунке 9.4 [3].



Рисунок 9.4 – Принцип действия лидара



Направленный луч от излучателя отражается от целей, возвращается к приемнику. Расстояние до точки поверхности объекта можно рассчитать как

$$L = 0,5c \cdot t,$$

где  $c$  – скорость света;

$t$  – полное время прохождения светом пути до точки отражения и обратно.

В таблице 9.2 приведены данные, показывающие зависимость времени отклика от расстояния до цели.

Таблица 9.2 – Зависимость времени отклика от расстояния до цели

Расстояние до цели	1 м	10 м	100 м	1 км	10 км	100 км
Время отклика	6,7 нс	67 нс	0,67 мкс	6,7 мкс	67 мкс	0,67 с

Из-за высокой скорости света  $c$  время отклика малое, поэтому оборудование для измерения этого промежутка времени должно работать очень быстро.

Структура лидара приведена на рисунке 9.5.

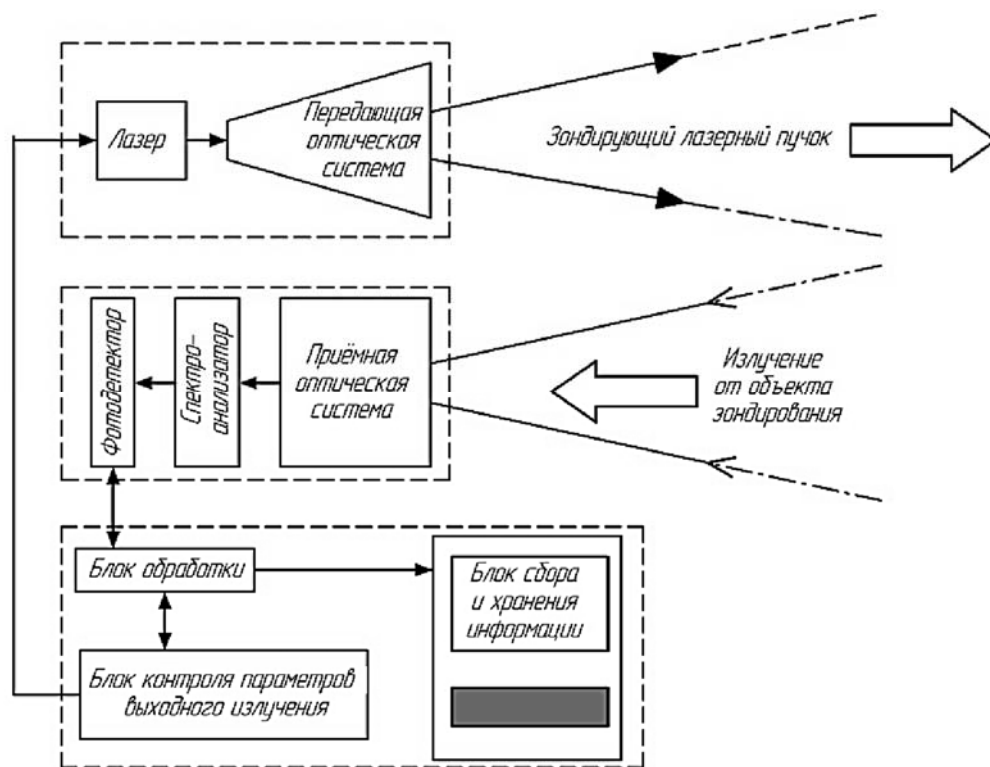


Рисунок 9.5 – Структура лидара

Лидар состоит из трех частей: передатчика, приемника и системы управления. Передатчик содержит источник излучения – лазер и оптическую систему для формирования выходного лазерного пучка, т. е. для управления размером выходного пятна и расходимостью пучка. Излучателем служат короткие импульсы света высокой мгновенной мощности (рисунок 9.6).

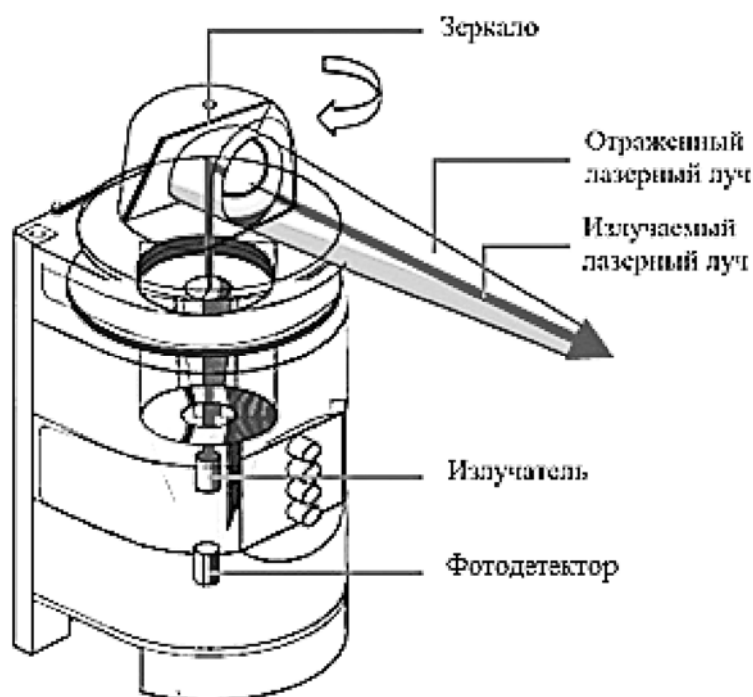


Рисунок 9.6 – Типовая конструкция лидара

Периодичность следования импульсов или модулирующая частота выбираются так, чтобы пауза между двумя последовательными импульсами была не меньше, чем время отклика от обнаружимых целей (которые могут физически находиться дальше, чем расчетный радиус действия прибора). Приемник состоит из объектива, спектрального и/или пространственного фильтра, поляризационного элемента и фотоприемника. Излучение, отраженно-рассеянное от исследуемого объекта, концентрируется приемной оптикой, а затем проходит через анализатор спектра. Этот прибор служит для выделения интервала длин волн, в котором проводятся наблюдения, и, следовательно, для отсеки фонового излучения на других длинах волн. Анализатор может представлять собой либо сложный, тщательно настраиваемый моно- или полихроматор, либо набор узкополосных фильтров, включая фильтр отсеки излучения на длине волны лазерного передатчика [3].

Излучатель и приемный блок могут быть далеко разнесены друг от друга или выполнены в едином блоке. Оси излучателя и приемника могут быть совмещены (коаксиальная схема) или разнесены (биаксиальная схема).

Система управления лидара выполняет следующие задачи:

- управление режимом работы лидара;
- управление частотой зондирующего излучения лазера;
- измерение энергии излучения в выходящем и принимаемом двухчастотном лазерном пучке на обеих частотах;
- обработка результатов, т. е. получение спектральных характеристик атмосферы, определение наличия и концентраций примесей по имеющимся в базе данных компьютера «спектральным портретам» молекул;
- управление системой наведения лидара на исследуемый объект [3].

#### 9.4 Навигации мобильного робота с помощью лазерной дальнометрии

**Задача.** Имеется некоторое пространство, в котором расположен мобильный робот, оснащенный лазерным дальномером. Задана целевая точка, которую робот должен достичь для выполнения некоторой задачи. Необходимо определить закон управления мобильным роботом, который переведет его из начального положения в целевую точку. Проблема навигации заключается в позиционировании робота в пространстве при движении в динамической недетерминированной среде. При этом существует целый ряд условий и ограничений:

- робот должен определять свое положение в пространстве, чтобы позиционироваться относительно целевой точки;
- необходимо обходить статические препятствия, для чего нужно строить карту местности;
- построению карты мешают динамические препятствия;
- движение робота к целевой точке должно быть оптимальным по времени.

Решение задачи навигации мобильного робота в пространстве требует одновременного решения проблемы локализации и построения карты или ее дополнения вновь обнаруженными объектами.

В робототехнике для навигации и позиционирования роботов используются SLAM-методы (одновременная локализация и построение карты – от англ. *simultaneous localization and mapping*). SLAM-методы позволяют построить карту пространства, структура которого заранее неизвестна, и определить позицию робота на ней. Использование SLAM-методов позволяет оптимизировать траекторию движения робота, но только в условиях статического пространства.

В динамической среде движение препятствий нельзя рассчитать заранее, т. к. среда в общем случае является недетерминированной, поэтому невозможно предварительно построить маршрут, который позволит двигаться безопасно. Чтобы избежать столкновений с динамическими препятствиями, необходимо определять текущее их положение и предсказывать траекторию движения. Тогда можно двигаться вдоль спланированной траектории, отклоняясь от нее в нужный момент, чтобы совершить маневр для обхода препятствия. Поэтому адекватным решением задачи движения в динамической среде является учет перемещения препятствий непосредственно в контуре управления мобильным роботом [3].

Алгоритм работы системы навигации, позволяющий учесть динамику движения робота, положение препятствий, а также избежать столкновения с ними представлен на рисунке 9.7.

Работа системы навигации заключается в следующем. На первоначальном этапе лидар формирует трехмерное облако точек, обозначающее окружающее робот пространство. Полученные данные передаются в систему навигации робота, где предварительно строится карта местности и карта препятствий. Определив позицию управляемого объекта, система навигации переходит к обновлению карты и карты препятствий, т. е. на каждом шаге алгоритма система навигации строит карту препятствий и местоположения управляемого объекта относительно этой карты. Поступаемые с лидара данные позволяют системе навигации

оптимизировать вектор управления. Процесс управления кончается, когда робот достигнет целевой точки.

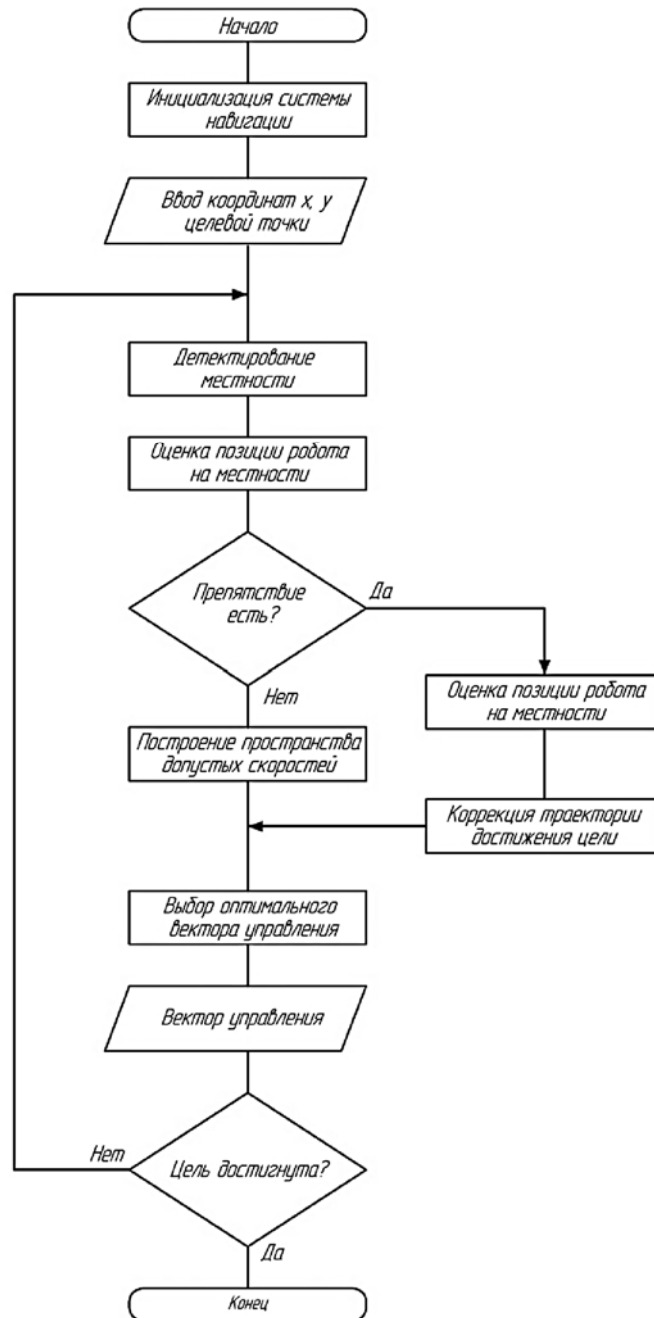


Рисунок 9.7 – Алгоритм управления системы навигации мобильного робота

### **Контрольные вопросы**

- 1 Опишите структурную схему мобильного робота для решения задач позиционирования в пространстве.
- 2 Опишите принцип работы ультразвуковых дальнометров.
- 3 Опишите принцип работы лазерного дальномера – лидара.
- 4 Какие преимущества дает способ навигации мобильного робота с использованием лазерного дальномера – лидара?

## 10 Практическое занятие № 10. Задачи определения навигационных характеристик робота

**Цель работы:** изучить систему локальной навигации мобильных роботов и решить задачу определения их навигационных характеристик.

### 10.1 Система локальной навигации мобильных роботов

Говоря о навигации автономных мобильных роботов, выделяют два основных типа систем – глобальной навигации и локальной навигации (ЛН). Основная задача систем глобальной навигации – формирование плана перемещения на основании заданной карты. Системы ЛН планируют и контролируют выполнение маневров, составляющих движение по сформированному маршруту [4].

ЛН – схема навигации автономных мобильных устройств, отвечающая за определение относительных координат объекта преимущественно в течение короткого промежутка времени.

Основные задачи ЛН:

- определение относительных декартовых координат и путевого угла мобильного робота, а также его скорости;
- планирование и контроль выполнения роботом маневров, составляющих движение по сформированному маршруту;
- корректирующая поддержка схем глобальной навигации для определения абсолютных координат аппарата.

Типичными примерами использования систем ЛН являются контроль следования по безопасной траектории в ограниченных пространствах и навигация робота в условиях недоступности данных с внешних источников навигации (например, при отказе системы позиционной коррекции на базе GPS). В связи с этим выдвигаются следующие требования при разработке таких систем:

- возможность определения углов ориентации мобильного робота (угла курса, крена и тангажа), а также скорости его движения для формирования адекватной траектории;
- непрерывная выдача навигационной информации;
- высокая точность вычисления координат робота в течение коротких промежутков времени;
- автономность работы системы;
- малые габариты и энергопотребление;
- устойчивость к помехам и вибрациям.

Известно, что ЛН объекта может быть реализована как с помощью активных (инерциальная навигация, системы технического зрения), так и с помощью пассивных схем навигации (спутниковая, по радиомаякам и маркерам). Однако в свете установленных требований очевидными преимуществами перед остальными вариантами обладает именно инерциальная навигация – метод определения координат, скорости и угловой ориентации объекта на основе измерения и интегрирования его ускорения [4].

В инерциальных навигационных системах (ИНС) для решения задач навигации используется некоторое количество инерциальных чувствительных элементов (ЧЭ) – гироскопов и акселерометров, дающих информацию о параметрах движения объекта. ИНС автономны, на их работе не сказываются погодные условия, они не поддаются радиоэлектронному подавлению и обеспечивают скрытность (не генерируют электромагнитного излучения, выдающего присутствие объекта-носителя).

Недостатками ИНС являются необходимость начальной настройки (выставки) по скорости и пространственному положению, а также накопление ошибки определения навигационных параметров объекта со временем. Однако в случае применения ИНС для решения задач ЛН мобильных роботов у нее достаточно времени на инициализацию и начальную выставку, поскольку многие системы мобильного робота требуют проведения аналогичных процедур. Что же касается накопления ошибки, то сегодня активно используются различные методы коррекции навигационных данных ИНС с помощью вспомогательных средств (одометров, спутниковых навигационных систем и т. д.). В таком случае система уже перестает быть автономной – такое объединение нескольких систем для решения навигационных задач называется комплексированием. Для оптимального использования данных, поступающих от всех этих систем, нужно, чтобы тщательно учитывались характеристики и погрешности всех навигационных средств. Оптимальное комплексирование данных от разных источников обеспечивает обобщенный фильтр Калмана (ОФК), который также применяется почти во всех ИНС для отслеживания и уменьшения накопленной ошибки.

На рисунке 10.1 представлена структура системы ЛН.

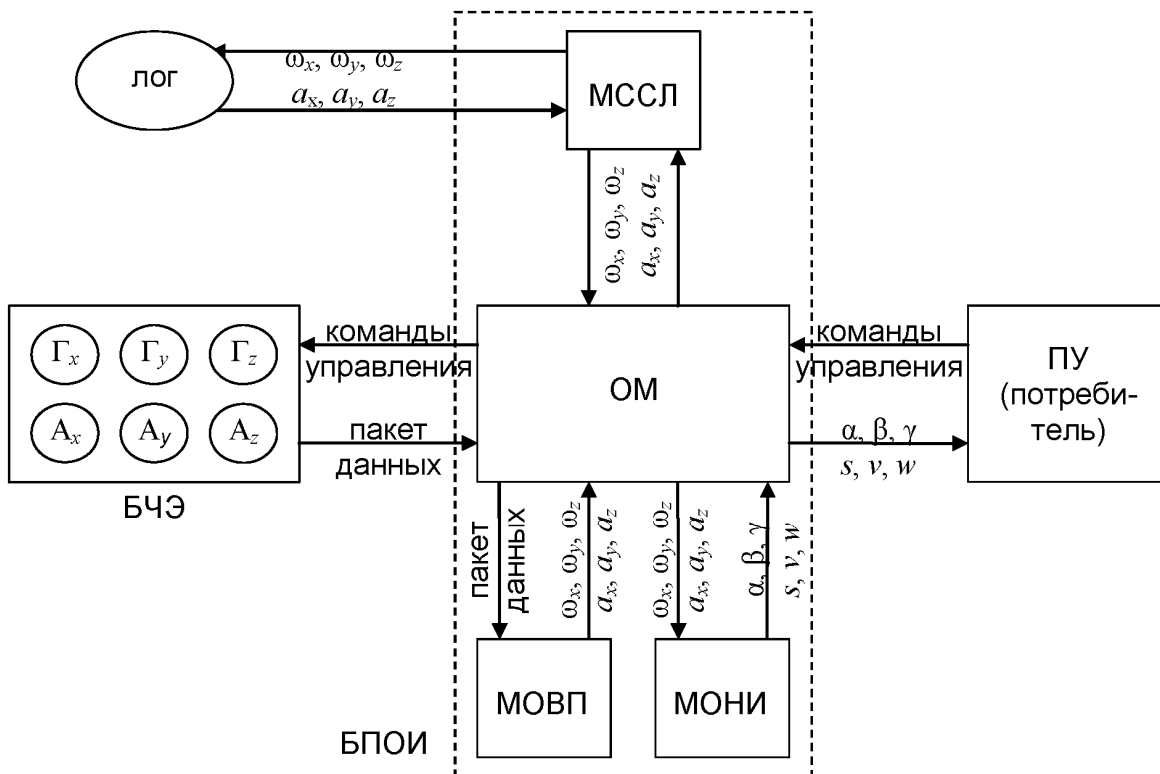


Рисунок 10.1 – Структурная схема системы локальной навигации

Чтобы получать информацию обо всех шести степенях свободы мобильного робота, используются шесть ЧЭ – три гироскопа ( $G_x, G_y, G_z$ ) и три акселерометра ( $A_x, A_y, A_z$ ), которые дают исчерпывающую информацию об его угловых и линейных движениях. По причине возможного автономного применения системы только в течение коротких промежутков времени требования к точностным характеристикам гироскопов и акселерометров отодвигаются на задний план требованиями к аппаратуре автономных объектов – к массогабаритным и ценовым характеристикам, надежности и устойчивости к ударам и вибрациям и т. п. [4].

Блок чувствительных элементов (БЧЭ) выдает пакет данных, содержащий информацию об угловых скоростях и кажущихся ускорениях системы по каждой из осей связанной системы координат (ССК), на бортовой компьютер. Пакет через основной модуль (ОМ) блока программной обработки информации (БПОИ), осуществляющий взаимодействие остальных модулей, а также пульта управления (ПУ) и аппаратуры, поступает в модуль обработки входящих пакетов (МОВП). МОВП организует проверку целостности пакета данных, разбиение его на составляющие и выдачу обратно в ОМ полезной информации об угловых скоростях и кажущихся ускорениях системы ( $\omega_x, \omega_y, \omega_z, a_x, a_y, a_z$ ). Оттуда она перенаправляется в модуль определения навигационной информации (МОНИ), где проходит процесс фильтрации и вычисления навигационных параметров объекта-носителя – курсового угла, тангажа, крена, пройденного пути, скорости и ускорения ( $\alpha, \beta, \gamma, s, v, w$ ).

Полученная навигационная информация в зависимости от настроек БПОИ, а также команд управления с ПУ может быть выдана в различной форме (графики данных, траекторий, числовые значения и т. д.) на ПУ. Исходная же информация с БЧЭ в обработанном МОВП виде может быть сохранена в лог-файл через модуль сохранения/считывания логов (МССЛ) для последующего воспроизведения и анализа эксперимента.

## ***10.2 Математическая модель для определение навигационных характеристик колесных мобильных роботов***

При движении колесных мобильных роботов существует ряд особенностей, влияющих на определение навигационных характеристик:

- отсутствие бокового сноса;
- малые диапазоны изменения углов крена и тангажа робота за короткие промежутки времени;
- независимость угловой скорости вокруг вертикальной оси робота от угловых скоростей вокруг других осей;
- малая скорость движения робота.

С учетом этих особенностей составлена математическая модель мобильного робота, использующего разрабатываемую систему ЛН автономно. Схема, представленная на рисунке 10.2, определяет положение связанной системы координат (ССК) относительно подвижной траекторной системы координат (ПТСК).

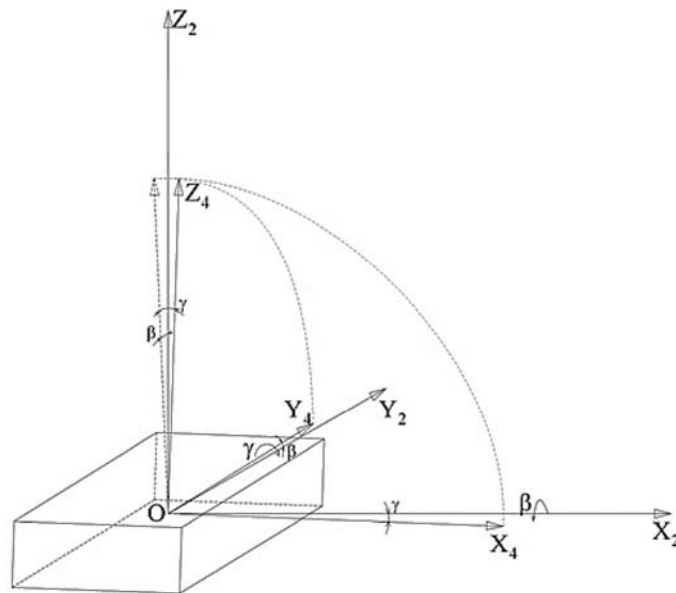


Рисунок 10.2 – Схема вращения связанной системы координат  $X_4Y_4Z_4$  относительно подвижной траекторной системы координат  $X_2Y_2Z_2$

С помощью схемы получены уравнения, определяющие соотношение навигационных характеристик робота с измеряемыми ЧЭ системы величинами:

– для определения угловой ориентации

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = \omega_z; \\ \dot{\beta} = \omega_x \cos \gamma + \omega_z \sin \gamma; \\ \dot{\gamma} = \omega_y, \end{cases} \quad (10.1)$$

где  $\alpha, \beta, \gamma$  – курсовой угол, тангаж и угол крена;

$\omega_x, \omega_y, \omega_z$  – измеряемые в ССК угловые скорости мобильного робота;

– для определения составляющих ускорения

$$\begin{cases} w_x = a_x \cos \gamma + a_z \sin \gamma; \\ w_y = a_x \sin \beta \sin \gamma + a_y \cos \beta - a_z \sin \beta \cos \gamma; \\ w_z + g = -a_x \cos \beta \sin \gamma + a_y \sin \beta + a_z \cos \beta \cos \gamma, \end{cases} \quad (10.2)$$

где  $w_x, w_y, w_z$  – проекции истинного ускорения на оси ПТСК;

$a_x, a_y, a_z$  – измеряемые в ССК составляющие кажущегося ускорения мобильного робота;

$g$  – ускорение свободного падения;

– для определения скорости и перемещения

$$\begin{cases} v = v_0 + \int w_y dt; \\ s = s_0 + \int v dt, \end{cases} \quad (10.3)$$



где  $v, s$  – скорость и перемещение мобильного робота.

Чтобы учесть такую особенность применения инерциальных навигационных систем, как накапливание ошибок интегрирования, математическая модель системы дополнена уравнениями, связывающими измеряемые значения угловых скоростей и составляющих кажущегося ускорения объекта с их истинными значениями:

$$\begin{cases} \omega_j^{\text{ИЗМ}} = \omega_j + \varepsilon_j; \\ a_j^{\text{ИЗМ}} = a_j + \psi_j, \end{cases} \quad (10.4)$$

где  $\omega_j^{\text{ИЗМ}}, a_j^{\text{ИЗМ}}$  – значения угловых скоростей и составляющих кажущегося ускорения мобильного робота, определяемые гироскопами и акселерометрами;

$\omega_j, a_j$  – их истинные значения;

$\varepsilon_j, \psi_j$  – ошибки измерения,  $j = \{x, y, z\}$ .

### ***10.3 Физическая модель системы локальной навигации***

Для экспериментальной настройки параметров системы ЛН, а также проверки составленного алгоритма на точность вычисления навигационных параметров мобильного робота реализована физическая модель системы. В качестве БЧЭ физической модели системы ЛН используется БЧЭ малогабаритной инерциально-спутниковой навигационной системы (МИНС) «КомпаНав-2М» фирмы ООО «ТеКнол» (г. Москва). Эта система предназначена для определения координат местоположения и углов ориентации объекта и представляет собой комбинацию блока микроэлектромеханических датчиков движения (три гироскопа и три акселерометра) и приемника спутниковой навигационной системы со встроенной антенной (рисунок 10.3). Таким образом, ее использование без последнего аналогично автономному применению разработанной системы ЛН.



Рисунок 10.3 – Инерциально-спутниковая навигационная система «КомпаНав-2М»

МИНС «КомпаНав-2М» с применением оригинального алгоритма интегрирования данных GPS/ГЛОНАСС с измерениями инерциальных датчиков позволяет выдавать потребителю полный набор навигационных характеристик и параметров ориентации:

- координаты местоположения и высота;
- углы ориентации;
- курс, крен, тангаж;
- путевая скорость;
- вертикальная скорость;
- ускорения, угловые скорости.

Для выполнения функций блока программной обработки информации (см. рисунок 10.1, БПОИ) разработано программное обеспечение, имеющее удобный для наблюдения экспериментов интерфейс и обладающее следующими функциями в соответствии со структурной схемой системы ЛН:

- получение и обработка пакетов данных с БЧЭ;
- вычисление навигационных параметров объекта, на котором установлена модель, с помощью реализованного алгоритма обработки информации;
- сохранение параметров движения объекта, полученных с БЧЭ во время эксперимента, в лог-файл для их последующего воспроизведения, обработки и анализа результатов.

Результаты испытаний физической модели системы подтверждают возможность ее использования в составе навигационного комплекса наземного мобильного робота. Обеспечиваемая системой точность определения местоположения объекта, а также углов его ориентации позволяет применять разработанную систему как автономно для контроля маневров, составляющих движения объекта по безопасному маршруту, в течение коротких промежутков времени, так и в комплексе с другими навигационными средствами (GPS, одометры, дальнометры и т. п.).

Повышению точности системы способствует усовершенствование математической модели, алгоритма обработки информации и программного обеспечения, осуществляющего вычисление навигационных характеристик объекта.

### ***Контрольные вопросы***

- 1 Система локальной навигации мобильных роботов и ее основные задачи.
- 2 Использование инерциальных навигационных системах (ИНС) для решения задач навигации. Их достоинства и недостатки.
- 3 Опишите структурную схему системы локальной навигации и основные навигационные характеристики мобильных роботов.
- 4 Опишите математическую модель для определения навигационных характеристик колесных мобильных роботов.
- 5 Опишите физическую модель системы локальной навигации. Какие навигационные характеристики и параметры ориентации выдает малогабаритная инерциально-спутниковая навигационная система «КомпаНав-2М»?

## 11 Практическое занятие № 11. Прямая и обратная задачи кинематики для колесного робота

**Цель работы:** разработать математическую модель для расчета прямой и обратной задачи кинематики и динамики колесного дифференциального робота.

### 11.1 Задачи математического моделирования кинематики и динамики колесного дифференциального робота

В настоящее время актуальным является вопрос о создании надежных колесных роботов (КР), которые должны реализовывать повышенную проходимость и мобильность. При решении задач повышения качества и надежности колесных роботов ставятся две цели: научная и практическая. Первая цель обусловлена способностью расширения представлений о динамических процессах, происходящих в роботах при движении по деформируемым грунтам. Здесь возникает одна сложность – взаимодействие КР с деформируемыми грунтами, потому что они обладают такими свойствами, как неоднородность и сложность структуры, что влияет на динамику движения КР. Вторая цель включает в себя создание роботов, способных обеспечивать высокую мобильность при перемещении в любых погодных-климатических условиях.

Целью разработки математической модели дифференциального робота является решение следующих задач.

- 1 Разработать кинематическую модель колесного робота.
- 2 Разработать динамическую модель колесного робота.
- 3 Провести энергетический расчет двигателя и выбрать его.
- 4 Промоделировать полученные модели в Matlab.
- 5 Проверить надежность робота при реализации сложной траектории.

Требования к дифференциальному роботу.

- 1 Скорость колесного робота минимальная – 5 км/ч, максимальная – 25 км/ч.
- 2 Общая масса колесного робота – 15 кг. Масса конструкции – 10 кг. Полезная нагрузка – 5 кг.

3 Габариты: робот должен быть 300 мм в ширину и 400 мм в длину.

4 Диаметр колес – 200 мм, ширина колес – 25 мм.

В состав колесного дифференциального робота должны включаться: плата усилителя мощности, которая обрабатывает сигналы периферийных модулей (камера, антенна, подсветка); привод левого и правого колеса, включающие в себя двигатели, энкодеры и датчики скорости; источник питания в виде ионного аккумулятора; беспроводная связь в виде антенны для управления от оператора, а также дополнительная периферия в виде GPS-модуля.

### 11.2 Уравнения кинематической модели

Дифференциальный робот имеет два колеса с независимыми приводами, которые можно использовать для управления скоростью движения и угловой скоростью (рисунки 11.1) [5].

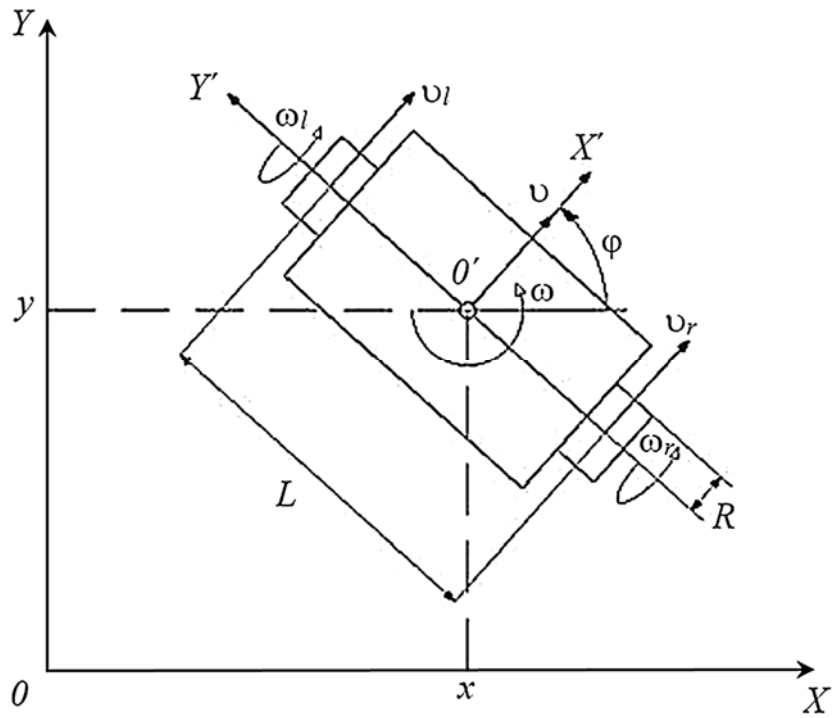


Рисунок 11.1 – Схема движения колесного робота

При рассмотрении прямой кинематики на вход такой системы подается угловая скорость  $\omega_l$  и  $\omega_r$ , рад/с. На выходе получаем линейную скорость  $v$ , м/с, и угловую скорость  $\omega$ , рад/с.

Формируя закон управления, получим систему из двух уравнений

$$\begin{cases} v = \frac{R}{2}(\omega_r + \omega_l); \\ \omega = \frac{R}{2}(\omega_r - \omega_l). \end{cases}$$

Вводя координаты  $x$ ,  $y$ ,  $\phi$ , получим новую систему

$$\begin{cases} \dot{x} = v \cos \phi; \\ \dot{y} = v \sin \phi; \\ \dot{\phi} = \omega. \end{cases}$$

Подставив эту систему в предыдущую, получим

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{R}{2}(\omega_r + \omega_l) \cos \phi; \\ \dot{y} = \frac{R}{2}(\omega_r + \omega_l) \sin \phi; \\ \dot{\phi} = \frac{R}{2}(\omega_r - \omega_l). \end{cases}$$

При расчете обратной кинематики на вход системы будут подаваться линейная скорость  $v$ , м/с, и угловая скорость  $\omega$ , рад/с, а на выходе будем снимать угловую скорость  $\omega_l$  и  $\omega_r$ , рад/с. Тогда система уравнений изменится и примет вид:

$$\begin{cases} \omega_l = \frac{1}{R} \left( v - \frac{\omega L}{2} \right); \\ \omega_r = \frac{1}{R} \left( v + \frac{\omega L}{2} \right). \end{cases}$$

Моделирование колесного робота проводится в программе Matlab в пакете Simulink. Для этого понадобится библиотека Mobile Robotics Simulation (рисунок 11.2) [5].



Рисунок 11.2 – Модель колесного робота

Для визуализации линейной и угловой скоростей  $v$ , м/с, и  $\omega$ , рад/с, добавляется блок «Прямая кинематика», а также добавляется блок для вывода положения робота  $[x, y, \phi]$  и блок для вывода угловой скорости колес  $\omega_l$  и  $\omega_r$ , рад/с.

Тогда полная модель колесного робота примет вид (рисунок 11.3).

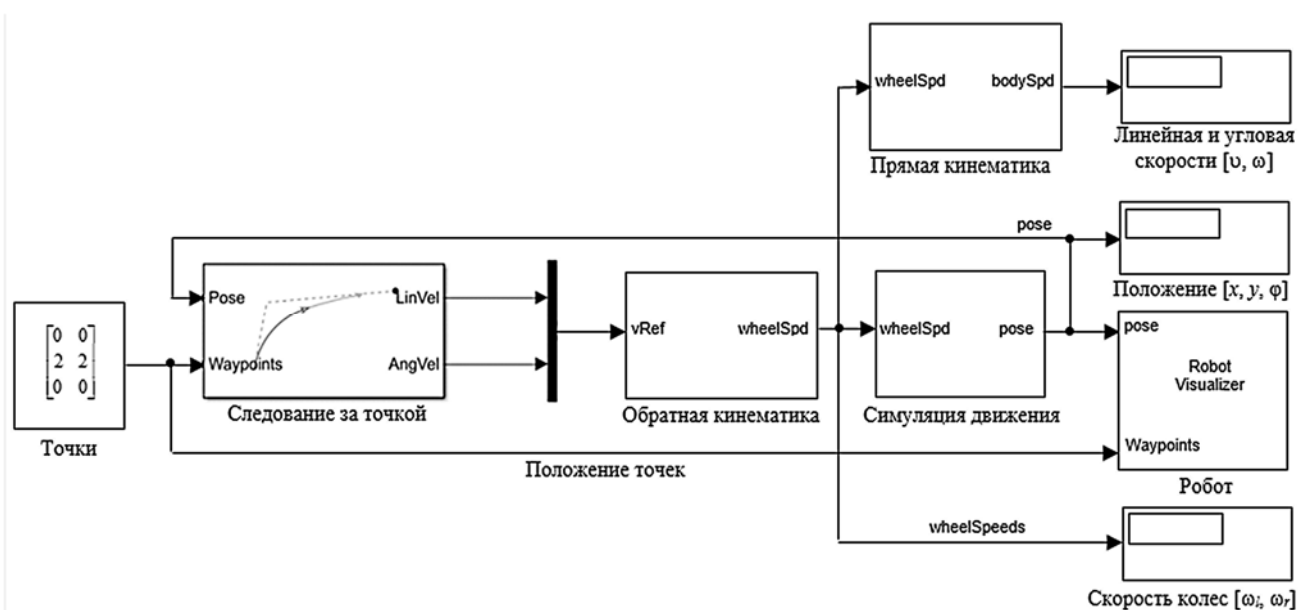


Рисунок 11.3 – Полная модель колесного робота

Рассмотрим перемещение робота из начала координат в заданную точку и обратно. Для этого на вход системы подадим матрицу  $[0,0; 2,2; 0,0]$ . Время, которое колесный робот потратит на перемещение из начала координат в точку  $[2,2]$  и обратно, возьмем примерно  $t = 13$  с (рисунок 11.4).

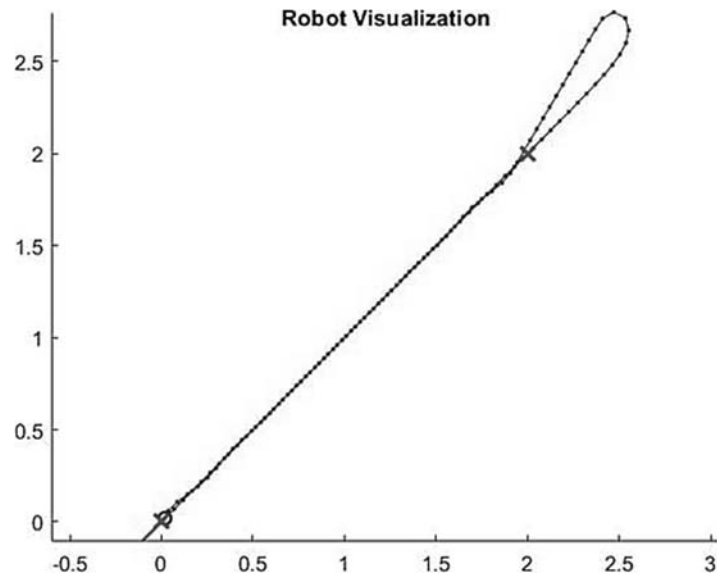


Рисунок 11.4 – Передвижение колесного робота

На данном графике показана траектория движения робота и путь его разворота. Для разворота роботу не потребовалось делать большой крюк. При этом система выдает следующие данные (рисунок 11.5).

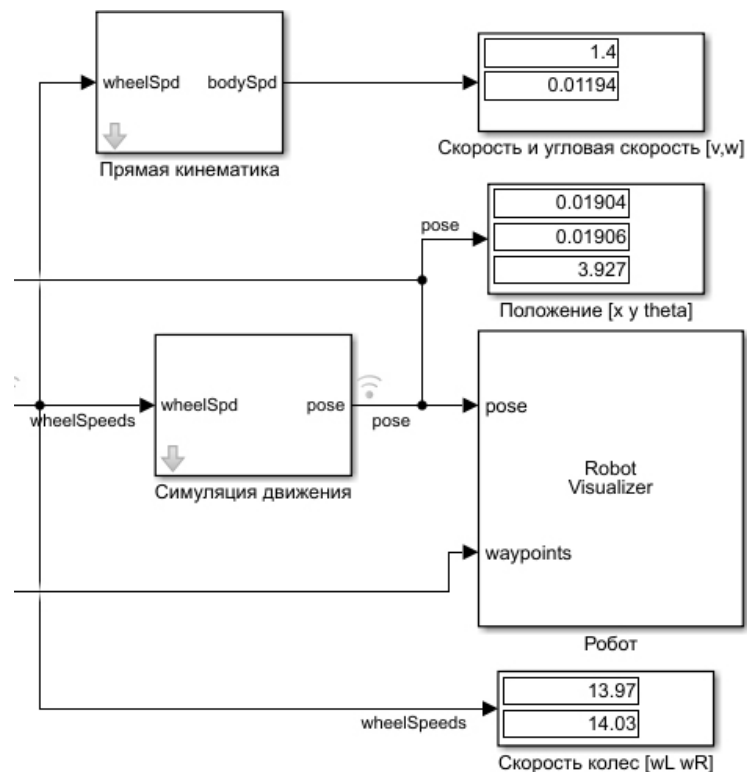


Рисунок 11.5 – Данные с системы

В блоке «Скорость и угловая скорость» видим, что робот поехал со скоростью  $v = 1,4 \text{ м/с} = 5,04 \text{ км/ч}$ , что соответствует заданной скорости по техническому заданию. В блоке «Скорость колес» можно увидеть, какая угловая скорость подавалась на оба колеса. В итоге робот затратил на перемещение из точки в точку время  $t = 5,4 \text{ с}$ , что удовлетворило требованиям.

## 11.2 Уравнения динамики

Рассматривая прямую динамику колесного робота, на вход системы подаем моменты, развиваемые моторами, которые приводят в движения левое и правое колеса и обозначаются  $T_l$  и  $T_r$  соответственно. На выходе получаем линейное ускорение  $a$ ,  $\text{м/с}^2$ , и угловое ускорение  $\epsilon$ ,  $\text{рад/с}^2$ , или проинтегрировав эти значения, получаем линейную скорость  $v$ ,  $\text{м/с}$ , и угловую скорость  $\omega$ ,  $\text{рад/с}$ .

Формируя закон управления, получим систему из двух уравнений:

$$\begin{cases} \dot{v} = -b\omega^2 + \frac{1}{rm}(T_r + T_l); \\ \dot{\omega} = bm\omega v + \frac{L}{2r}(T_r - T_l), \end{cases}$$

где  $b$  – коэффициент смещения центра массы робота от оси вращения,  $b = 0$ ;

$r$  – радиус колес;

$m$ ,  $L$  – масса и ширина робота.

Вводя координаты  $x$ ,  $y$ ,  $\varphi$ , получим новую систему:

$$\begin{cases} \dot{x} = v \cos \varphi; \\ \dot{y} = v \sin \varphi; \\ \dot{\varphi} = \omega. \end{cases}$$

Тогда получим удобную форму представления динамики колесного робота в виде системы уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x} = v \cos \varphi; \dot{y} = v \sin \varphi; \dot{\varphi} = \omega; \\ \dot{v} = -b\omega^2 + \frac{1}{rm}(T_r + T_l); \\ \dot{\omega} = bm\omega v + \frac{L}{2r}(T_r - T_l). \end{cases}$$

Рассмотрим систему, которая движется по плоской поверхности. За основу возьмем уже созданную в Matlab Multibody систему двухколесного робота (рисунок 11.6), которая состоит из корпуса робота, двух опорных колес и двух движущих колес. В системе моделируются взаимодействия с опорной поверхностью с помощью библиотеки, а также моделируется сложная модель трения.

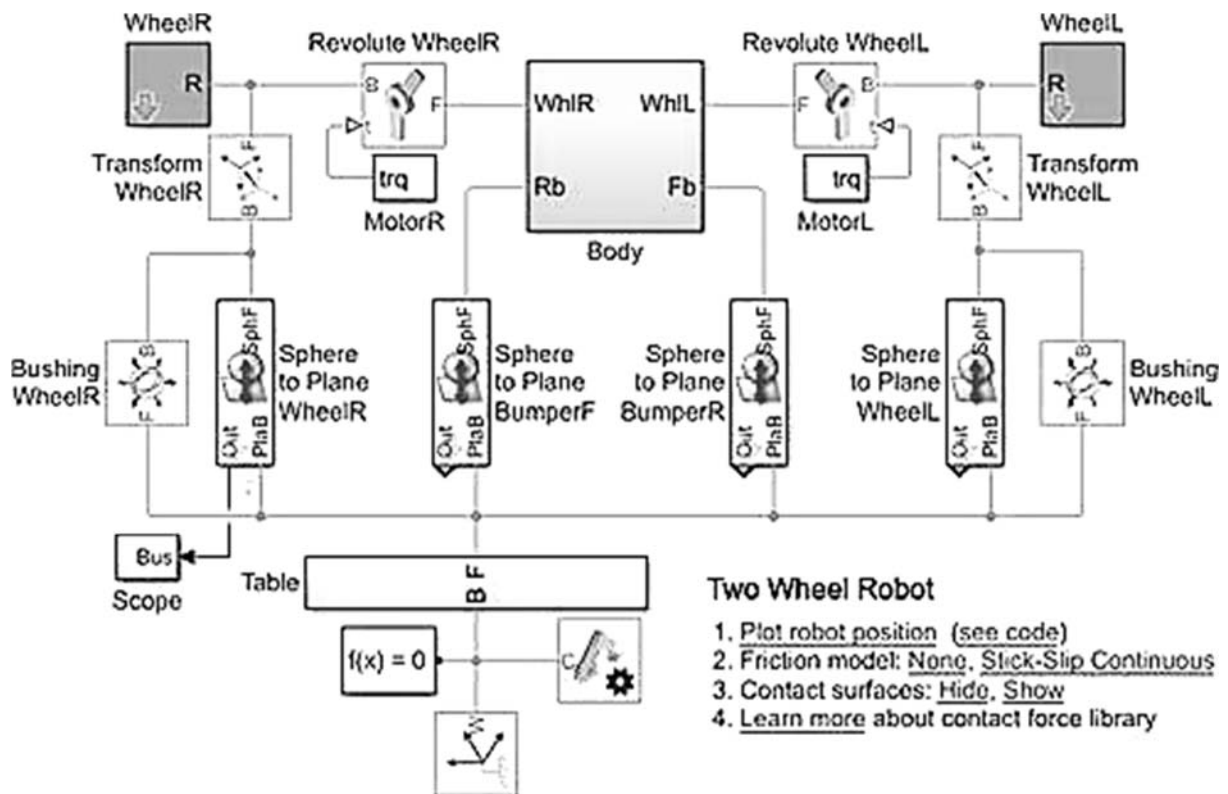


Рисунок 11.6 – Модель двухколесного робота в Matlab Multibody

На вход данного робота подается две матрицы моментов для правого и левого колеса:

$[0; 0; 0; -0,001; 0; 0; 0; 0,001; -0,0005; 0; 0; 0; 0,0005; -0,0005; 0; 0; 0; 0,0005; 0,00075; 0; 0; 0; -0,00075]$  – правое колесо,

$[0; 0; 0; -0,00025; 0; 0; 0; 0,00025; -0,0005; 0; 0; 0; 0,0005; -0,00025; 0; 0; 0; 0,00025; 0,00075; 0; 0; 0; -0,00075]$  – левое колесо.

При движении робот описывает траекторию, показанную на рисунке 11.7.

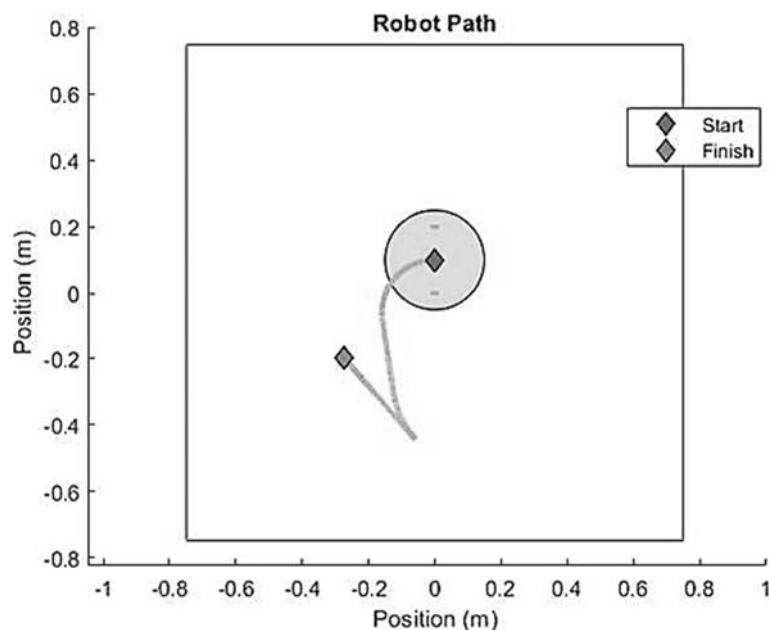


Рисунок 11.7 – Траектория двухколесного робота



Разрабатываемая модель включает в себя два блока: прямая динамика и кинематика (рисунок 11.8). На вход подаются моменты  $T_l$  и  $T_r$  на оба колеса. С помощью блока кинематики мы сможем снять значения положения  $x$  и  $y$  робота на плоскости. Блоки прямой динамики и кинематики были разработаны с учетом приведенной ранее системы уравнений (рисунки 11.9 и 11.10).

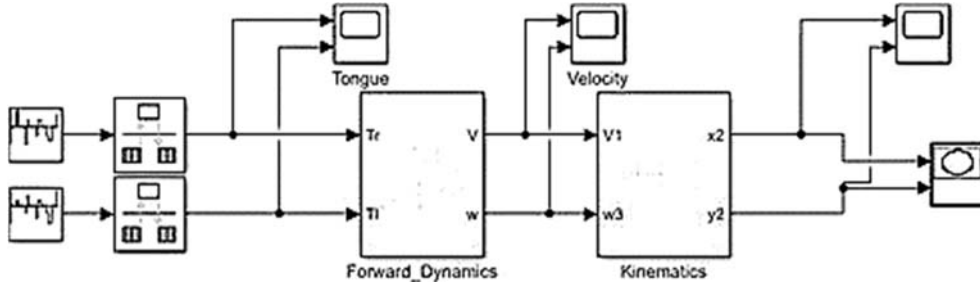


Рисунок 11.8 – Разработанная модель

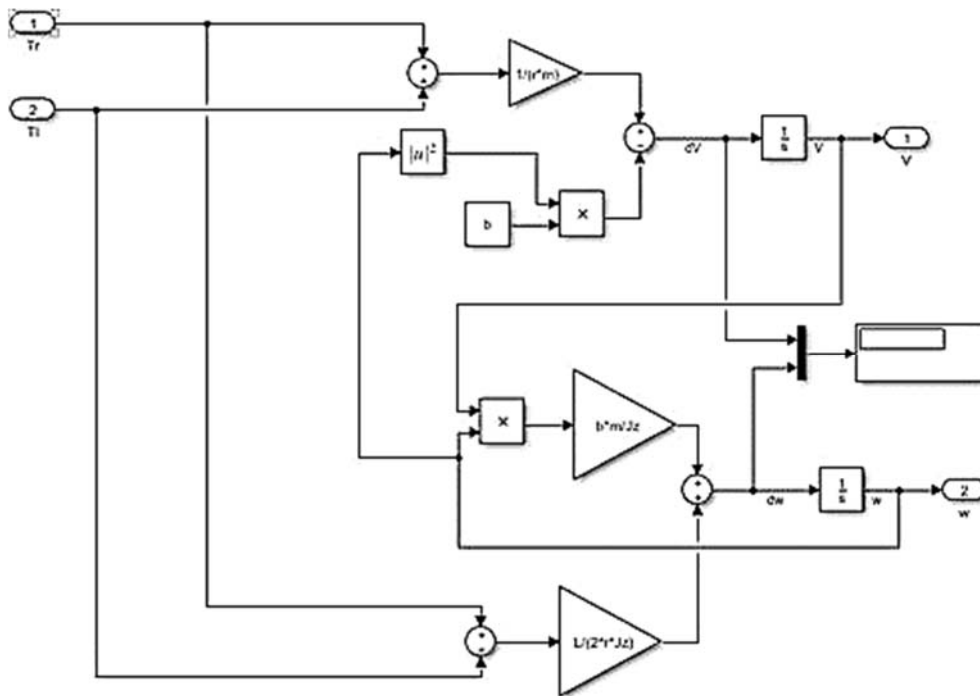


Рисунок 11.9 – Блок прямой динамики

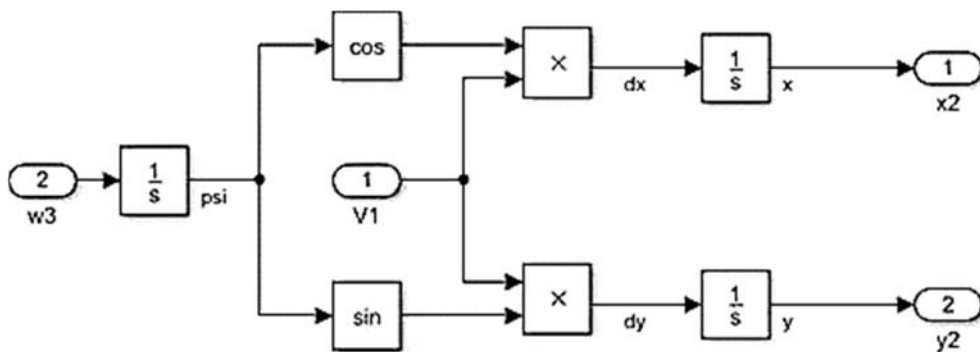


Рисунок 11.10 – Блок кинематики

На вход системы подаем те же значения моментов  $T_l$  и  $T_r$  для левого и правого колеса. При движении робот описывает траекторию, показанную на рисунке 11.11.

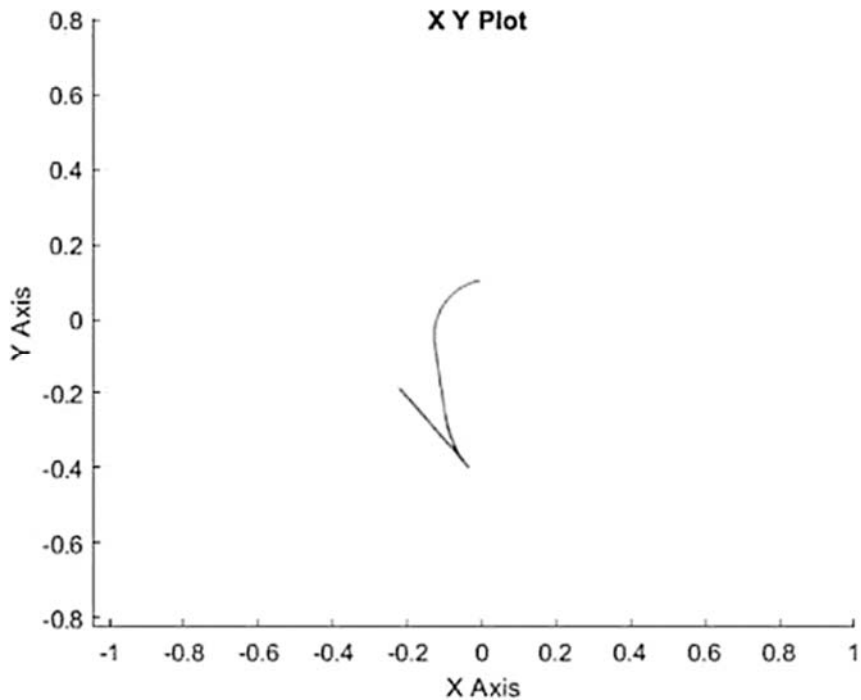


Рисунок 11.11 – Траектория движения разработанного робота

Сравнив два графика (см. рисунки 11.7 и 11.11), можно сделать вывод, что разработанная система повторяет готовую модель с большой степенью точности.

### ***Контрольные вопросы***

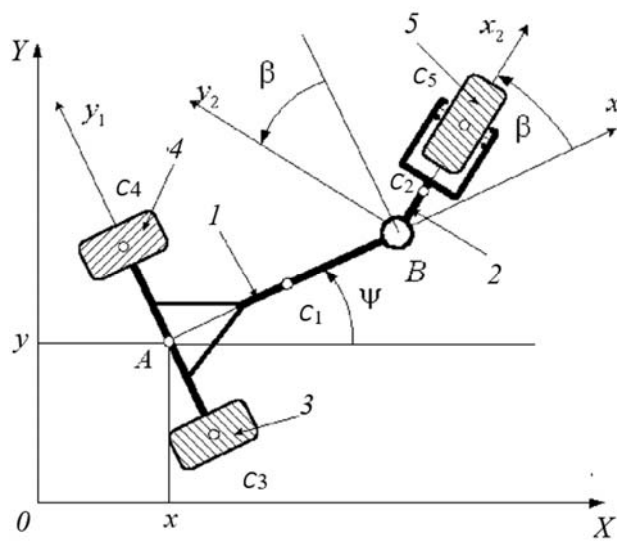
- 1 Какие задачи требуется решать при математическом моделировании кинематики и динамики колесного дифференциального робота?
- 2 Опишите схему движения и уравнения кинематической модели колесного робота.
- 3 Опишите блоки прямой динамики и кинематики.
- 4 Опишите блок обратной кинематики.

## 12 Практическое занятие № 12. Задачи управляемости и наблюдаемости для мобильных колесных роботов

**Цель работы:** анализ управляемости и наблюдаемости при движении мобильного колесного робота вдоль полосы по сигналу оптронной линейки.

### 12.1 Уравнения свободного движения трёхколёсного робота с двумя независимыми весомыми ведущими колёсами по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости

Составим уравнения движения трёхколёсного робота с весомыми колёсами, выполненного по схеме трицикла [6] (рисунок 12.1).



1 – шасси; 2 – вилка рояльного колеса; 3, 4 – задние колёса; 5 – рояльное колесо

Рисунок 12.1 – Конструктивная схема трёхколёсного робота

В неподвижной системе координат  $Ox_0y_0z_0$  плоскость  $Ox_0y_0$  совпадает с горизонтальной плоскостью, по которой катятся абсолютно жёсткие колёса робота.

Согласно рисунку 12.1 робот будем рассматривать как систему пяти абсолютно твёрдых тел, положение которых определяется семью обобщёнными координатами  $\mathbf{q} = \mathbf{x} = [x \ y \ \psi \ \beta \ \varphi_3 \ \varphi_4 \ \varphi_5]^T$ , где  $x, y$  – координаты точки  $A$  – середины отрезка, соединяющего центры  $C_3, C_4$  задних колёс 3, 4;  $\psi$  – угол поворота вокруг вертикали шасси 1, отсчитываемый от оси  $x$ ;  $\beta$  – угол поворота вилки 2 рояльного колеса 5 относительно шасси 1;  $\varphi_3, \varphi_4, \varphi_5$  – углы поворота колёс относительно горизонтальных осей.

Подвижная система координат  $Ax_1y_1z_1$  с началом в точке  $A$  жёстко связана с шасси робота, причём ось  $y_1$  направлена вдоль отрезка  $C_3C_4$ , а центр масс шасси  $C_1$  лежит на оси  $x_1$ . С вилкой 2 связана система координат  $Bx_2y_2z_2$  так, что центр масс  $C_5$  переднего колеса 5 лежит на оси  $Bx_2$ .

Координаты центров масс  $C_k$  ( $k = 1, \dots, 5$ ) тел, входящих в состав робота, в неподвижной системе  $Ox_0y_0z_0$  определяются формулами

$$\begin{aligned}
x_{C_1} &= x + a \cos \psi; & y_{C_1} &= y + a \sin \psi; \\
x_{C_2} &= x + b \cos \psi + d_2 \cos(\beta + \psi); & y_{C_2} &= y + b \sin \psi + d_2 \sin(\beta + \psi); \\
x_{C_3} &= x + l \sin \psi; & y_{C_3} &= y + l \cos \psi; \\
x_{C_4} &= x - l \sin \psi; & y_{C_4} &= y - l \cos \psi; \\
x_{C_5} &= x + b \cos \psi + d_5 \cos(\beta + \psi); & y_{C_5} &= y + b \sin \psi + d_5 \sin(\beta + \psi).
\end{aligned} \tag{12.1}$$

где  $a = AC_1$ ;  $b = AB$ ;  $d_2 = BC_2$ ;

$l$  – половина расстояния между колёсами 3, 4 робота,  $l = AC_3 = AC_4$ ;

$d_5$  – вынос вилки 2 переднего колеса 5 робота,  $d_5 = BC_5$ .

Угловые скорости платформы и вилки имеют вертикальные составляющие

$$\Omega_{1z} = \dot{\psi}; \quad \Omega_{2z} = \dot{\psi} + \dot{\beta}, \tag{12.2}$$

а угловые скорости колёс определяются формулами

$$\Omega_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\phi}_3 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}; \quad \Omega_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\phi}_4 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}; \quad \Omega_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\phi}_5 \\ \dot{\psi} + \dot{\beta} \end{pmatrix}, \tag{12.3}$$

где векторы  $\Omega_3, \Omega_4$  заданы проекциями на оси  $Ax_1y_1z_1$ , а вектор  $\Omega_5$  – проекциями на оси  $Bx_2y_2z_2$ .

Скорости точек контакта колёс с поверхностью можно найти по формулам

$$V_{P_3} = V_A + [\Omega_1, AC_3] + [\Omega_3, C_3P_3];$$

$$V_{P_4} = V_A + [\Omega_1, AC_4] + [\Omega_4, C_4P_4];$$

$$x_{C_3} = V_A + [\Omega_1, AB] + [\Omega_2, BC_5] + [\Omega_5, C_5P_5], \tag{12.4}$$

где  $P_k$  – точка контакта (мгновенный центр скоростей)  $k$ -го колеса робота ( $k = 3, 4, 5$ ) с горизонтальной поверхностью.

Движение колёс происходит без проскальзывания, что после проектирования первых двух уравнений (12.4) на оси  $Ax_1y_1z_1$ , а последнего уравнения (12.4) на оси  $Bx_2y_2z_2$  приводит к пяти независимым уравнениям неголономных связей:

$$v_{P_{3y1}} = v_{P_{4y1}} = -\dot{x} \sin \psi + \dot{y} \cos \psi = 0;$$

$$v_{P_{3x1}} = \dot{x} \cos \psi + \dot{y} \sin \psi + l\dot{\psi} - r\dot{\phi}_3 = 0;$$

$$v_{P_{4x1}} = \dot{x} \cos \psi + \dot{y} \sin \psi - l\dot{\psi} - r\dot{\phi}_4 = 0;$$

$$v_{P_{5y2}} = -\dot{x} \sin(\psi + \beta) + \dot{y} \cos(\psi + \beta) + d_5(\dot{\psi} + \dot{\beta}) + \dot{\psi} b \cos \beta = 0;$$

$$v_{P_{3x2}} = \dot{x} \cos(\psi + \beta) + \dot{y} \sin(\psi + \beta) + \dot{\psi} b \sin \beta - \dot{\phi}_5 r_5 = 0, \quad (12.5)$$

где  $r$  – радиус задних колёс;

$r_5$  – радиус переднего колеса;

$d_5$  – вынос вилки переднего колеса,  $d_5 = BC_5$ .

Пусть на робот установлены два электродвигателя 6, 7 постоянного тока, которые обеспечивают вращение ведущих колёс платформы (рисунок 12.2). Пренебрежем влиянием инерционности роляного колеса 5 и его вилки 2 на динамику робота и будем считать, что в точке  $B$  платформа имеет абсолютно гладкую опору. Это допущение позволяет исключить из числа обобщённых координат механической подсистемы углы  $\beta$ ,  $\phi_5$ . Электрическая подсистема содержит два контура с током, и, следовательно, вектор обобщённых координат электромеханической подсистемы  $\mathbf{x} = [x \ y \ \psi \ \phi_3 \ \phi_4 \ e_1 \ e_2]^T$  содержит заряды  $e_1$ ,  $e_2$ , которые вводятся только на этапе составления уравнений так, что  $i_1 = \dot{e}_1$ ;  $i_2 = \dot{e}_2$  представляют собой токи, протекающие во внешних цепях питания соответствующих двигателей.

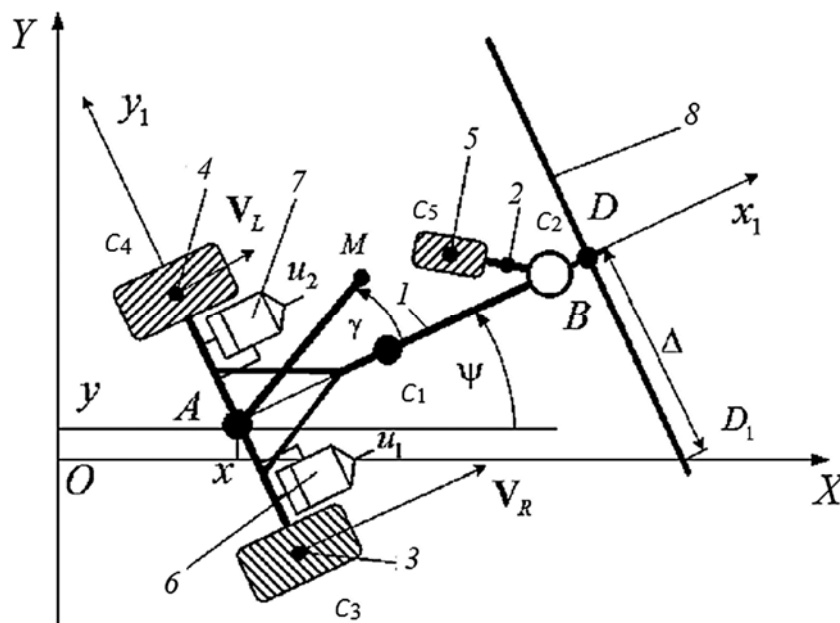


Рисунок 12.2 – Мобильный робот с двумя электродвигателями постоянного тока

Движение ведущих колёс происходит без проскальзывания, приводит к трём независимым уравнениям неголономных связей (первые три уравнения в (12.5)).

Матрица  $\mathbf{B}$ , входящая в уравнение неголономных связей (1.1), имеет вид

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -\sin \psi & \cos \psi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cos \psi & \sin \psi & l & -r & 0 & 0 & 0 \\ \cos \psi & \sin \psi & -l & 0 & -r & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (12.6)$$

Так как вектор обобщённых координат  $\mathbf{q}$  содержит семь компонент, а скорости системы удовлетворяют первым трём уравнениям связи (12.5), то рассматриваемая электромеханическая система имеет четыре степени свободы и в качестве компонент вектора псевдоскоростей  $\dot{\pi} = (V \ \Omega \ i_1 \ i_2)^T$  выбирают величину  $V = \dot{x} \cos \psi + \dot{y} \sin \psi$  скорости точки  $A$ , угловую скорость платформы  $\Omega = \dot{\psi}$ , токи  $i_1 = \dot{e}_1$ ,  $i_2 = \dot{e}_2$  во внешних цепях электродвигателей. При этом связь между обобщёнными и псевдоскоростями определяется прямоугольной матрицей  $\mathbf{H}$  так, что

$$\dot{x} = \mathbf{H}\dot{\pi}; \quad (12.7)$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} r \cos \psi & 0 & 0 & 0 \\ r \sin \psi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 & 0 \\ 1 & l & 0 & 0 \\ 1 & -l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r \end{pmatrix}.$$

Уравнения (12.7) в скалярной форме имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= V \cos \psi; \quad \dot{y} = V \sin \psi; \quad \psi = \Omega; \\ \dot{\phi}_1 &= \frac{V + l\Omega}{r}; \quad \dot{\phi}_2 = \frac{V - l\Omega}{r}; \quad \dot{e}_2 = i_1; \quad \dot{e}_2 = i_2. \end{aligned} \quad (12.8)$$

Считая масс-инерционные характеристики ведущих колёс идентичными, подсчитаем кинетическую энергию системы:

$$\begin{aligned} 2T &= (m_1 + 2m_k)(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - 2m_1 a(\dot{x} \sin \psi - \dot{y} \cos \psi)\dot{\psi} + \\ &+ (m_1 a^2 + J_1 + 2m_k l^2 + 2J_{kz})\dot{\psi}^2 + J(\dot{\phi}_3^2 + \dot{\phi}_4^2), \end{aligned} \quad (12.9)$$

где  $m_1$  – масса платформы робота;

$m_k$  – суммарная масса ведущего колеса и ротора электродвигателя;

$J_1$  – момент инерции платформы относительно вертикальной оси, проходящей через центр масс  $C$ ;

$J_{kz}$  – момент инерции ведущего колеса относительно вертикальной оси;

$J_y$  – «приведённый» момент инерции колеса,  $J_y = J_{ky} + n^2 J_{ry}$ ;

$J_{ky}$  – момент инерции колеса относительно горизонтальной оси;

$J_{ry}$  – момент инерции ротора электродвигателя;

$n$  – передаточное число редуктора.

Магнитную энергию и диссипативную функцию зададим в виде [6]

$$2W_m = L(\dot{e}_1^2 + \dot{e}_2^2) + 2cn(\varphi_3 \dot{e}_1 + \varphi_4 \dot{e}_2); \quad (12.10)$$

$$\Psi = \frac{1}{2} R(\dot{e}_1^2 + \dot{e}_2^2), \quad (12.11)$$

где  $L$  – обобщённая индуктивность цепи электродвигателя;

$c$  – коэффициент электромеханического взаимодействия;

$R$  – активное электрическое сопротивление цепи ротора.

Потенциальная и электрическая энергия равны нулю, поэтому лагранжиан рассматриваемой электромеханической системы определяется суммированием только кинетической и магнитной энергий:

$$\begin{aligned} 2L = & (m_1 + 2m_k)(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - 2m_1 a(\dot{x} \sin \psi - \dot{y} \cos \psi) \dot{\psi} + J(\dot{\phi}_3^2 + \dot{\phi}_4^2) + \\ & + (m_1 a^2 + J_1 + 2m_k l^2 + 2J_{kz}) \dot{\psi}^2 + L(\dot{i}_1^2 + \dot{i}_2^2) + 2cn\varphi_3 \dot{i}_1 + 2cn\varphi_4 \dot{i}_2. \end{aligned} \quad (12.12)$$

Вектор обобщённых сил включает сторонние ЭДС  $U_1, U_2$ , приложенные к электродвигателям:

$$Q = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ U_1 \ U_2)^T. \quad (12.13)$$

Принимая во внимание (12.7), (12.12), (12.13) и проделывая необходимые вычисления, получаем динамические уравнения движения робота [6]:

$$m\dot{V} - m_1 a \Omega^2 - \frac{nc}{r}(i_1 + i_2) = 0;$$

$$J\dot{\Omega} + m_1 a V \Omega - \frac{nc l}{r}(i_1 - i_2) = 0;$$

$$L \frac{di_1}{dt} + R_{i_2} + \frac{nc}{r}(V + l\Omega) = U_1;$$

$$L \frac{di_2}{dt} + R_{i_2} + \frac{nc}{r}(V - l\Omega) = U_2, \quad (12.14)$$

где

$$m = m_1 + 2m_k + 2\frac{J_y}{r^2};$$

$$J = J_1 + 2J_{kz} + (m - m_1)l^2 + m_1a^2.$$

Углы поворотов ведущих колёс  $\varphi_3$ ,  $\varphi_4$  и заряды  $e_1$ ,  $e_2$  не входят в уравнения (12.14), поэтому из кинематических уравнений (12.8) для дальнейшего оказываются существенными только первые три уравнения:

$$\dot{x} = V \cos \psi; \quad \dot{y} = V \sin \psi; \quad \dot{\psi} = \Omega. \quad (12.15)$$

Последние два уравнения в (12.14) описывают переходные процессы в цепях электродвигателя, причём постоянную времени этого переходного процесса  $\tau_0 = L/R$  естественно рассматривать как «время запаздывания» в цепях управления ведущими колёсами. Заметим, что при  $L = 0$ , когда указанное «время запаздывания» равно нулю, из последних двух уравнений (12.14) определяются токи в электродвигателях:

$$i_1 = \frac{U_1}{R} - \frac{nc}{rR}(V + l\Omega); \quad i_2 = \frac{U_2}{R} - \frac{nc}{rR}(V - l\Omega). \quad (12.16)$$

Подстановка токов (12.16) в первые два уравнения (12.14) приводит к системе дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} m\dot{V} - m_0a\Omega^2 + \frac{2n^2c^2}{r^2R}V = \frac{nc}{rR}(U_1 + U_2); \\ J\dot{\Omega} + m_0a\Omega + \frac{2n^2c^2l^2}{r^2R}\Omega = \frac{ncl}{rR}(U_1 - U_2). \end{cases} \quad (12.17)$$

Если ввести обозначения

$$c_1 = \frac{c}{R}; \quad c_2 = \frac{c^2}{R}, \quad (12.18)$$

то из (12.18) находим



$$c = \frac{c_2}{c_1}; \quad R = \frac{c_2}{c_1^2}. \quad (12.19)$$

Для моментов, развиваемых электродвигателями, использовалась следующая линейная аппроксимация:

$$M(U, \dot{\gamma}) = c_1 U - c_2 \dot{\gamma}, \quad (12.20)$$

где  $U$  – напряжение, подаваемое на двигатель;  
 $c_2 \dot{\gamma}$  – момент противоэлектродвижущей силы;  
 $\dot{\gamma}$  – угловая скорость ротора.

Для задания коэффициентов  $c_1, c_2$  в (12.19) для двигателя используются приведённые в его паспорте величины пускового  $M_1$  и номинального  $M_2$  моментов, номинальной угловой скорости  $\dot{\gamma}_H$  и номинального напряжения  $U_H$ :

$$c_1 = \frac{M_1}{U_H}; \quad c_2 = \frac{M_1 - M_2}{\dot{\gamma}_H}. \quad (12.21)$$

В системе уравнений (12.14) удобно ввести новые токи и напряжения:

$$i_\sigma = i_1 + i_2; \quad i_\delta = i_1 - i_2;$$

$$U_\sigma = U_1 + U_2; \quad U_\delta = U_1 - U_2.$$

Уравнения для новых переменных  $i_\sigma, i_\delta$  получаются соответственно суммированием и вычитанием двух последних уравнений системы (12.14):

$$m\dot{V} = am_0\Omega^2 + \frac{nc}{r}i_\sigma; \quad J\dot{\Omega} = -am_0V\Omega - \frac{ln c}{r}i_\delta;$$

$$L\frac{di_\sigma}{dt} = -Ri_\delta - \frac{2nc}{r}V + U_\sigma; \quad L\frac{di_\delta}{dt} = -Ri_\delta - \frac{2ncl}{r}\Omega + U_\delta. \quad (12.22)$$

Для перехода к безразмерным переменным сделаем в (12.22) замену

$$V = \frac{L_h}{T_h}\xi_1; \quad V' = \frac{L_h}{T_h^2}\xi_1'; \quad \Omega = \frac{\Psi_h}{T_h}\xi_2; \quad \Omega' = \frac{\Psi_h}{T_h^2}\xi_2';$$

$$i_\sigma = I_{\sigma h}\xi_3; \quad i'_\sigma = I_{\sigma h}\xi_3'; \quad i_\delta = I_{\delta h}\xi_4; \quad i'_\delta = I_{\delta h}\xi_4';$$

$$t = T_h\tilde{t}; \quad T_h = \frac{r^2 m R}{2n^2 c^2}; \quad L_h = \frac{J}{am_0}; \quad \Psi_h = \frac{\sqrt{Jm}}{am_0}; \quad I_{\sigma h} = \frac{rmL_h}{ncT_h^2};$$

$$I_{\delta h} = \frac{rJ\sqrt{Jm}}{am_0 lncT_h^2}; \quad U_{\sigma} = \frac{4Jn^3 c^3 u_{\sigma}}{amm_0 r^3 R}; \quad U_{\delta} = \frac{4J^2 n^3 c^3 u_{\delta}}{amm_0 l r^3 R \sqrt{Jm}};$$

$$\tau = \frac{L}{RT_h}; \quad \nu = \frac{ml^2}{J}. \quad (12.23)$$

Подставляя (12.23) в уравнения (12.22), получим безразмерные уравнения движения робота, в которых штрихом обозначено дифференцирование по безразмерному времени  $t$ :

$$\begin{cases} \xi_1' = \xi_2^2 + \xi_3; \\ \xi_2' = -\xi_1 \xi_2 + \xi_4; \\ \tau \xi_3' = -\xi_1 - \xi_3 + u_{\sigma}; \\ \tau \xi_4' = -\nu \xi_2 - \xi_4 + u_{\delta}. \end{cases} \quad (12.24)$$

Предположим, что в системе уравнений (12.24)  $u_{\sigma} = \alpha = \text{const}$ ,  $u_{\delta} = 0$ , т. е. рассмотрим неуправляемое движение робота. Для анализа свойств неуправляемого движения определим особые точки системы (12.24).

Если выполнено условие  $\alpha > -\nu$ , то уравнения (12.24) будут иметь единственную особую точку

$$\xi_1 = \alpha; \quad \xi_2 = 0; \quad \xi_3 = 0; \quad \xi_4 = 0. \quad (12.25)$$

Если  $\alpha < -\nu$ , то к особой точке (12.25) добавляются ещё две новые особые точки, проекции которых на плоскость  $\xi_1 \xi_2$  симметричны относительно оси абсцисс  $\xi_2 = 0$ :

$$\xi_1 = -\nu; \quad \xi_2 = \pm \sqrt{-\alpha - \nu}; \quad \xi_3 = \alpha + \nu; \quad \xi_4 = \mp \nu \sqrt{-\alpha - \nu}. \quad (12.26)$$

## ***12.2 Управляемость и наблюдаемость при движении мобильного робота вдоль полосы по сигналу оптронной линейки***

Пусть для движения робота вдоль полосы, нанесённой на горизонтальную поверхность, по которой катятся колёса, на платформе установлена оптронная линейка на расстоянии  $h$  от оси ведущих колёс [6].

Для линеаризации нелинейных уравнений (12.24) в окрестности особой точки (12.25), отвечающей поступательному равномерному прямолинейному движению платформы робота, сделаем в (12.24) замену переменных:

$$\xi_1 = \alpha + \eta_3; \quad \xi_2 = \eta_1; \quad \xi_3 = \eta_4; \quad \xi_4 = \eta_2; \quad u_{\sigma} = \alpha + u_2; \quad u_{\delta} = u_1, \quad (12.27)$$

где  $u_1, u_2$  – отклонения напряжений от их стационарных значений.

Подставляя (12.27) в (12.24) и пренебрегая нелинейными слагаемыми, приходим к системе уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} \eta_1' = -\alpha\eta_1 + \eta_2; \\ \tau\eta_2' = -\nu\eta_1 - \eta_2 + u_1; \\ \eta_3' = \eta_4; \\ \tau\eta_4' = -\eta_3 - \eta_4 + u_2. \end{cases} \quad (12.28)$$

Система (12.28) распалась на две независимые подсистемы: первые два уравнения (12.28) описывают боковое движение робота, последние два – продольное.

Добавим к системе уравнений бокового движения безразмерные кинематические уравнения, которые получаются из двух последних уравнений (12.15), линеаризованных в окрестности точки  $y = 0$ ,  $\psi = 0$ ,  $V = V_0 = \text{const}$ ,  $\Omega = 0$ :

$$\begin{cases} \zeta_1' = \alpha\zeta_2; \\ \zeta_2' = \eta_1; \\ \eta_1' = -\alpha\eta_1 + \eta_2; \\ \tau\eta_2' = -\nu\eta_1 - \eta_2 + u_1, \end{cases} \quad (12.29)$$

где  $\zeta_1$ ,  $\zeta_2$  – безразмерные отклонения от стационарных значений координаты  $y$  точки  $A$  и угла  $\psi$  (без ограничения общности предполагаем, что стационарным движением робота является равномерное движение вдоль оси  $OX$ ).

Для анализа управляемости и наблюдаемости уравнений бокового движения мобильного робота запишем уравнения (12.29) в матричной форме

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}_4\mathbf{z} + \mathbf{B}_4\mathbf{u}, \quad (12.30)$$

где

$$\mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{\nu}{\tau} & -\frac{1}{\tau} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}_4 = (0 \ 0 \ 0 \ 1)^T; \quad \mathbf{z} = (\zeta_1 \ \zeta_2 \ \eta_1 \ \eta_2).$$

В качестве датчика при движении вдоль прямой используется оптронная линейка. Выходной сигнал линейки представляет собой расстояние от центра линейки  $D$  до точки  $D_1$  пересечения линейки с осью  $OX$  (см. рисунок 12.2). При малых углах  $\psi$  можно считать, что выходной сигнал линейки имеет вид:

$$\Delta = y + h_0 \psi.$$

Уравнение (12.30) дополним скалярным уравнением наблюдения

$$\mathbf{p} = \mathbf{H}_4 \mathbf{z}; \quad \mathbf{H}_4 = (1 \quad h \quad 0 \quad 0). \quad (12.31)$$

где  $h$  – безразмерное расстояние от точки  $A$  до центра оптронной линейки.

Для пары  $\mathbf{A}_4, \mathbf{B}_4$  матрица управляемости имеет вид

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{\alpha\tau+1}{\tau} \\ 0 & 1 & -\frac{\alpha\tau+1}{\tau} & \frac{\alpha^2\tau^2 - \nu\tau + \alpha\tau + 1}{\tau^2} \\ 1 & -\frac{1}{\tau} & -\frac{1-\nu\tau}{\tau^2} & \frac{\alpha\nu\tau^2 + 2\nu\tau - 1}{\tau^3} \end{pmatrix}. \quad (12.32)$$

Определитель матрицы управляемости (12.32) равен  $\Delta_{\mathbf{K}} = \alpha$ , поэтому система (12.30) вполне управляема.

Для пары  $\mathbf{A}_4, \mathbf{H}_4$  матрица наблюдаемости определяется выражением

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 1 & h & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & h & 0 \\ 0 & 0 & \alpha(1-h) & h \\ 0 & 0 & \frac{\tau\alpha(h-1) - h\nu}{\tau} & -\frac{\tau\alpha(h-1) + h}{\tau} \end{pmatrix}. \quad (12.33)$$

Определитель матрицы наблюдаемости (12.33) равен

$$\Delta_{\mathbf{N}} = \frac{\alpha[(\nu + \alpha)h^2 - \alpha(1 + \alpha\tau)h + \alpha^2\tau]}{\tau}. \quad (12.34)$$

Таким образом, учёт переходных процессов в электроприводе  $\tau > 0$  может привести к появлению «критических» значений безразмерной длины установки оптронной линейки  $h$ , при которых система становится ненаблюдаемой:

$$h_{1,2} = \frac{\alpha}{2(\nu + \alpha)} \left( 1 + \alpha\tau \mp \sqrt{\alpha^2\tau^2 - 2(\nu + \alpha)\tau + 1} \right). \quad (12.35)$$

### Контрольные вопросы

1 Опишите уравнения свободного движения трёхколёсного робота с двумя независимыми весомыми ведущими колесами по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости.

2 Опишите динамические уравнения движения робота с учетом переходных процессов в электроприводе.

3 Опишите уравнения для анализа управляемости и наблюдаемости бокового движения мобильного робота вдоль полосы по сигналу оптронной линейки.

## 13 Практическое занятие № 13. Применение фильтра Калмана в задачах навигации мобильных колесных роботов

**Цель работы:** решение задачи навигации мобильного колесного робота с применением фильтра Калмана.

### 13.1 Нахождение координат объектов

Одна из проблем, возникающих при решении задачи навигации мобильного робота, состоит в определении декартовых координат объектов внешней среды на основе некоторых измерений, при этом используются датчики различного типа. Рассмотрим следующую задачу: по измерениям, производимым телевизионной системой, требуется определить координаты маяков, попавших в поле зрения  $TV$ -камеры. Эта задача является весьма важной для планирования движения робота. В основе ее решения лежит простой метод триангуляции, состоящий в следующем. Если известны координаты двух точек  $R_1$  и  $R_2$  (рисунок 13.1), в которые помещены измерители, а также углы  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  на некоторый объект  $M$ , то нахождение координат последнего является простой тригонометрической задачей. Она сводится к нахождению координат точки пересечения прямых  $l_1$  и  $l_2$ , проведенных через точки  $R_1$  и  $R_2$  под углами  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ .

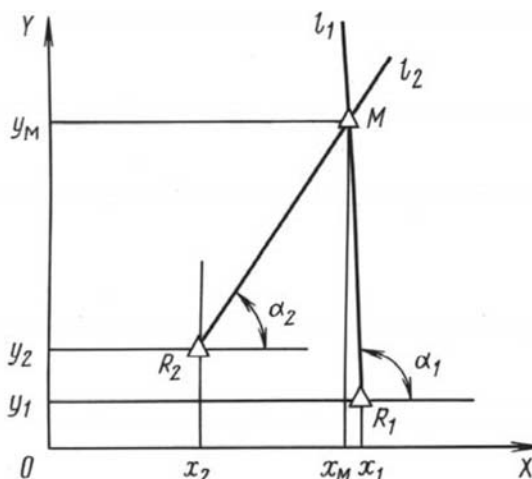


Рисунок 13.1 – Метод оценки декартовых координат

Специфика применения этого подхода для решения задачи навигации состоит в следующем:

- 1) *TV*-камера, установленная на роботе, – один измеритель;
- 2) измеритель перемещается в плоскости, измеряя углы.

Результаты являются дискретными, поскольку роботу требуется конечное время на обработку видеоинформации, поступающей с системы технического зрения (СТЗ). Поэтому использование рекуррентных методов фильтрации случайных процессов представляется весьма целесообразным.

### **13.2 Фильтр Калмана для линейного непрерывного объекта с дискретными измерениями**

Известны соотношения для рекуррентного оценивания фазового вектора непрерывной линейной системы по дискретным измерениям. Поведение объекта и измерения в системе описывается следующим образом [7]:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x} + f(t); \\ \mathbf{z}_k = H_k \mathbf{x}_k + \xi_k, \end{cases} \quad (13.1)$$

где  $\mathbf{x}$  – фазовый вектор;

$f(t)$  – известная функция времени;

$\mathbf{x}_k$  – значение фазового вектора в момент  $t = t_k$ ,  $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}(t_k)$ ;

$\mathbf{z}_k$  – вектор измерений.

Вектор  $\mathbf{x}(t)$  представляет собой случайный процесс со следующими характеристиками:

$$E(\mathbf{x}(t_0)) = m; \quad E(\mathbf{x}(t_0) \cdot \mathbf{x}^T(t_0)) = R_0.$$

Измерения содержат в своем составе шум  $\xi_k$ , представляющий собой случайную  $\delta$ -коррелированную нормально распределенную последовательность со следующими характеристиками:

$$E(\xi_k) = 0; \quad E(\xi_k \cdot \xi_k^T) = R_k.$$

Известно, что уравнения, описывающие поведение оценки  $\hat{\mathbf{x}}$  фазового вектора  $\mathbf{x}$ , имеют следующий вид:

– между измерениями ( $t_k < t < t_{k+1}$ )

$$\begin{cases} \dot{\hat{\mathbf{x}}} = A(t)\hat{\mathbf{x}} + f(t); \\ \dot{P} = A(t)P + PA^T(t); \end{cases} \quad (13.2)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k-1} = \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+; \quad \hat{\mathbf{x}}_0 = m;$$

$$P_{k-1} = P_{k-1}^+; \quad P_0 = R_0; \quad (13.3)$$

– в момент измерений ( $t = t_k$ )

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}_k^+ = \hat{\mathbf{x}}_k + P_k H_k^T R_k^{-1} (\mathbf{z}_k - H_k \hat{\mathbf{x}}_k); \\ P_k^+ = P_k - P_k H_k^T (R_k + H_k P_k H_k^T)^{-1} H_k P_k. \end{cases} \quad (13.4)$$

Между измерениями оценку получают интегрированием уравнения объекта, а в момент измерений происходит скачкообразное изменение оценки (по уравнению (13.4)), и ее значение используется как начальное условие для получения оценки на следующем интервале между измерениями (рисунок 13.2).

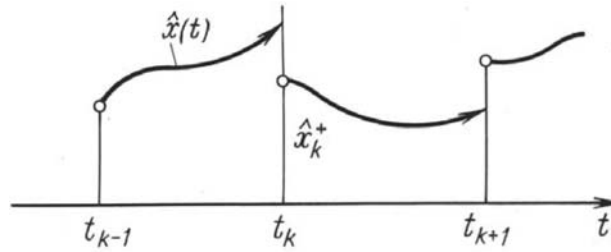


Рисунок 13.2 – Поведение оценок в случае непрерывного объекта с дискретными измерениями

### 13.3 Уравнение объекта и измерений

Для построения модели объекта используется кинематическая модель мобильного робота в следующей форме:

$$\begin{cases} \dot{x} = v \cos \varphi; \\ \dot{y} = v \sin \varphi; \\ \dot{\varphi} = \omega; \end{cases} \quad (13.5)$$

$$v = \frac{\rho}{2} (\omega_R + \omega_L); \quad (13.6)$$

$$\omega = \frac{\rho}{l} (\omega_R - \omega_L), \quad (13.7)$$

где  $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$  – декартовы координаты робота в абсолютной системе;

$v$ ,  $\omega$  – линейная и угловая скорости робота соответственно;

$\omega_R$ ,  $\omega_L$  – угловые скорости правого и левого колеса соответственно;

$\rho$  – радиус колеса;

$l$  – расстояние между ведущими колесами.

Пусть  $\dot{x}_m, \dot{y}_m$  – декартовы координаты маяка. Поскольку маяк неподвижен, то имеют место соотношения

$$\begin{cases} \dot{x}_m = 0; \\ \dot{y}_m = 0. \end{cases} \quad (13.8)$$

Системы (13.5) и (13.8) представляют собой уравнения объекта. Однако воспользоваться ими весьма затруднительно по двум причинам. Во-первых, модель является нелинейной. Фильтр, оценивающий фазовый вектор нелинейной системы, использует разложение в ряд в окрестности текущей оценки и является весьма чувствительным по отношению к начальным условиям. Во-вторых, размерность системы дифференциальных уравнений, описывающих фильтр, высока и равна 20 (5 – для объекта, 15 – для матрицы ковариаций ошибки оценки). Учитывая, что в ряде заданий, выполняемых мобильным роботом, необходимо оценивать координаты нескольких маяков, становится ясно, что этот подход является бесперспективным.

Воспользуемся тем обстоятельством, что для управления движением мобильного робота, вообще говоря, не обязательно знать абсолютные координаты маяков, но достаточно знать их координаты в связанной системе  $O'X'Y'$ .

Пусть однородная матрица перехода от связанной системы координат  $O'X'Y'$  к абсолютной системе  $OXY$  имеет вид матрицы:

$$T = \begin{bmatrix} R & p \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (13.9)$$

где

$$R = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}; \quad p = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Обозначим через  $\rho' = (x' \ y' \ 1)^T$ ,  $\rho'_M = (x'_M \ y'_M \ 1)^T$  – однородные векторы неподвижной точки  $M$  в связанной и абсолютной системах координат соответственно (рисунок 13.3), тогда имеем

$$\rho_M = T \cdot \rho'.$$

Дифференцируя это выражение по времени и учитывая (13.8), получим

$$\dot{\rho}' = -T^{-1} \cdot \dot{T} \cdot \rho'.$$

Учитывая, что

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} R^T & -R^T p \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$



а также уравнение объекта в абсолютной системе координат (13.5), получим

$$\begin{cases} \dot{x}' = \omega y' - v; \\ \dot{y}' = -\omega x', \end{cases} \quad (13.10)$$

где  $v$  и  $\omega$  – угловая и линейная скорости мобильного робота соответственно, заданные соотношениями (13.6), (13.7).

Соотношения (13.10) представляют собой уравнения объекта, фазовыми координатами которого являются декартовы координаты маяка  $x'$  и  $y'$  в связанной системе координат. Их эволюция вызывается собственным движением мобильного робота, обусловленным вращением ведущих колес с угловыми скоростями  $\omega_R$  и  $\omega_L$ . Если предположить, что  $\omega_R$  и  $\omega_L$  представляют собой программные управления, т. е.  $\omega_R = \omega_R(t)$ ,  $\omega_L = \omega_L(t)$ , а следовательно, и  $v = v(t)$ ,  $\omega = \omega(t)$ , тогда уравнения объекта представляют собой систему линейных нестационарных дифференциальных уравнений второго порядка.

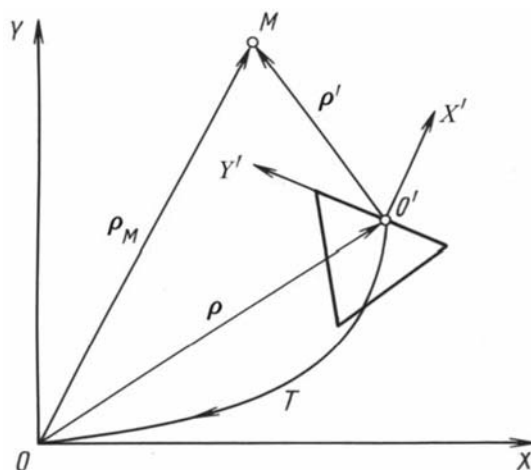


Рисунок 13.3 – Получение уравнений объекта в относительной системе координат

Получим теперь уравнения измерений. Считаем, что мобильный робот измеряет угол  $\alpha$ , используя  $TV$ -систему, установленную в точке  $C$  с координатами  $x' = 0$ ,  $y' = -d$ :

$$\alpha = \arctg \frac{y'}{x' + d}. \quad (13.11)$$

Однако это неудобно, поскольку уравнение (13.11) представляет собой нелинейную функцию относительно фазовых координат маяка  $x'$  и  $y'$ .

Вспользуемся другим подходом. Ясно, что каждое измерение угла  $\alpha$  означает, что маяк лежит на прямой, уравнение которой имеет вид

$$y' = (x' + d) \operatorname{tg} \alpha$$

или

$$d \sin \alpha = -x' \sin \alpha + y' \cos \alpha. \quad (13.12)$$

Соотношение (13.12) является прямым следствием уравнения (13.11). В терминах уравнения измерений это означает, что

$$z = -x' \sin \alpha + y' \cos \alpha + \xi,$$

а само измерение формируется как

$$z = d \sin \alpha.$$

Таким образом, окончательно уравнения объекта и измерений имеют вид

$$\begin{cases} \dot{x}' = \omega y' - v; \\ \dot{y}' = -\omega x'; \end{cases} \quad (13.13)$$

$$z_k = d \sin \alpha_k = -x'_k \sin \alpha_k + y'_k \cos \alpha_k + \xi_k. \quad (13.14)$$

### 13.4 Оценивание координат маяка

Фильтр Калмана строится в соответствии с соотношениями (13.2)–(13.3). Согласно выражениям (13.13), (13.14) матрицы  $A$  и  $H$  имеют вид

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \omega(t) \\ -\omega(t) & 0 \end{bmatrix}; \quad H_k = [-\sin \alpha_k \quad \cos \alpha_k]. \quad (13.15)$$

Выполняя все операции, получим следующие уравнения фильтра:

1) между измерениями

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}' = \omega \hat{y}' - v; \\ \dot{\hat{y}}' = -\omega \hat{x}'; \end{cases} \quad (13.16)$$

$$\begin{cases} \dot{p}_{11} = 2\omega p_{12}; \\ \dot{p}_{12} = \omega(p_{22} - p_{11}); \\ \dot{p}_{22} = -2\omega p_{12}. \end{cases} \quad (13.17)$$

Начальные условия для систем (13.16) и (13.17) ищутся по уравнениям (13.3). При этом сумма дисперсий ошибок оценок координат маяка постоянна;

2) в момент измерений

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \hat{x}_k^+ \\ \hat{y}_k^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x}_k \\ \hat{y}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} \left[ z_k - H_k \begin{bmatrix} \hat{x}_k \\ \hat{y}_k \end{bmatrix} \right]; \\ \begin{bmatrix} p_{11k}^+ & p_{12k}^+ \\ p_{21k}^+ & p_{22k}^+ \end{bmatrix} = \left[ 1 - \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} H_k \right] \begin{bmatrix} p_{11k} & p_{12k} \\ p_{21k} & p_{22k} \end{bmatrix}; \\ \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11k} & p_{12k} \\ p_{21k} & p_{22k} \end{bmatrix} H_k^T \left[ H_k \begin{bmatrix} p_{11k} & p_{12k} \\ p_{21k} & p_{22k} \end{bmatrix} H_k^T + \sigma^2 \right]^{-1}. \end{cases} \quad (13.18)$$

В уравнениях (13.16)–(13.18)  $\hat{x}'$ ,  $\hat{y}'$  – оценки координат маяка в связанной системе координат;  $p_{ij}$  – элементы матрицы ковариации ошибки оценки;  $z_k$  – измерения, формируемые в соответствии с соотношением (13.14);  $\omega$ ,  $\upsilon$  – программные угловая и линейная скорости робота соответственно;  $\sigma$  – среднеквадратическая ошибка в измерениях.

На рисунке 13.4 показаны результаты моделирования приведенного алгоритма оценивания координат маяков. Робот совершал вращательное движение с угловой скоростью  $\omega = \cos(3,5t)$ , при этом линейная скорость  $\upsilon = 0$ . Измерения угла на маяк проводились с частотой 5 Гц. Как видно, в этих условиях время сходимости оценок составляет 3,5...4 с.

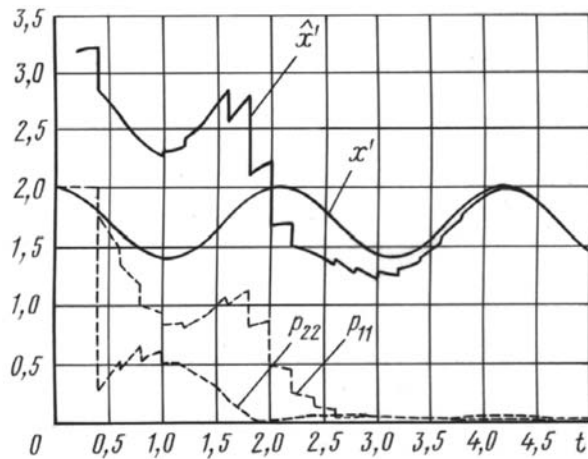


Рисунок 13.4 – Результаты моделирования поведения оценок декартовых координат маяка в относительном движении

### Контрольные вопросы

- 1 Опишите метод оценки декартовых координат при решении задачи навигации мобильного робота с помощью  $TV$ -камеры.
- 2 Опишите уравнения фильтра Калмана для линейного непрерывного объекта с дискретными измерениями.
- 3 Опишите способ получения уравнений объекта в относительной системе координат и уравнений измерений.
- 4 Каким образом происходит оценивание координат маяка с помощью фильтра Калмана?

## Список литературы

- 1 Система позиционирования и идентификации мобильной робототехнической платформы в ограниченном и открытом пространстве / Т. С. Евдокимова [и др.]. // Тр. НГТУ им. Р. Е. Алексеева. – 2018. – № 2 (121). – С. 16–25.
- 2 **Евстигнеев, Д. В.** Системы управления интеллектуальных мобильных роботов в среде Dyn-Soft RobSim 5: учебное пособие: в 4 ч. / Д. В. Евстигнеев. – Москва: ИНФРА-М, 2014. – Ч. 4. – 190 с.
- 3 **Урваев, И. Н.** Навигация мобильного робота на основе методов лазерной дальнометрии / И. Н. Урваев // Измерение. Мониторинг. Управление. Контроль. – 2021. – № 1 (35). – С. 44–51.
- 4 **Черноножкин, В. А.** Система локальной навигации для наземных мобильных роботов / В. А. Черноножкин, С. А. Половко // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. – 2008. – № 57. – С. 13–22.
- 5 Разработка математической модели кинематики и динамики колесного дифференциального робота / К. П. Марченко [и др.] // Научный аспект. – 2021. – Т. 3, № 1. – С. 277–294.
- 6 **Мартыненко, Ю. Г.** Управление движением мобильных колесных роботов / Ю. Г. Мартыненко // Фундаментальная и прикладная математика. – 2005. – Т. 11, № 8. – С. 29–80.
- 7 **Зенкевич, С. Л.** Система управления мобильного колесного робота / С. Л. Зенкевич, А. В. Назарова // Вестн. МГТУ им. Н. Э. Баумана. Приборостроение. – 2006. – № 3. – С. 31–51.