УДК 531.01

СТОХАСТИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ОПИСАНИЮ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ОСНОВНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

О. А. ИЗОТОВА
Филиал федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ИНДУСТРИАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Рославль, Россия

Как известно, краевые задачи для бианалитических функций и их обобщений достаточно хорошо моделируют задачи теории упругости в классической постановке. Однако, при определенных условиях, классические математические модели основных задач теории упругости не могут адекватно описывать напряженное состояние упругого тела. Поясним это на примерах.

1. Предполагалось, что заданные на границе тела нагрузки и смещения являются детерминированными функциями. На практике эти параметры, как правило, являются случайными функциями. Поэтому классические задачи теории упругости следует переформулировать следующим образом.

<u>Первая основная задача</u>. Пусть на контуре L, ограничивающим область D, занятую телом, заданы напряжения, представляющие собой случайные функции с известными моментами (назовем их «допуски»). Задача состоит в определении смещений, как случайных функций, вместе со своими моментами.

Математическая модель первой основной задачи имеет вид:

$$\varphi_0'(t) + \bar{t}\varphi_1'(t) + \varphi_1(t) = -\left[\overline{\varphi_0'(t) + \bar{t}\varphi_1'(t) + \varphi_1(t)}\right] + g_1(t),$$
$$\varphi_0'(t) + \bar{t}\varphi_1'(t) - \varphi_1(t) = \left[\overline{\varphi_0'(t) + \bar{t}\varphi_1'(t) - \varphi_1(t)}\right] + g_2(t), \quad t \in L,$$

где $g_k(t)$ $(k = 1, 2)$ – случайные функции.

<u>Вторая основная задача.</u> Пусть на контуре L, ограничивающим область D, занятую телом, заданы смещения, представляющие собой случайные функции с известными моментами. Задача состоит в определении напряжений, как случайных функций, вместе со своими моментами.

Математическая модель второй основной задачи имеет вид:

$$\varphi_0^{+\prime}(t) + \bar{t}\varphi_1^{+\prime}(t) + x\varphi_1^{+}(t) = -\left[\overline{\varphi_0^{+\prime}(t) + \bar{t}\varphi_1^{+\prime}(t) + x\varphi_1^{+}(t)}\right] + g_1(t),$$
$$\varphi_0^{+\prime}(t) + \bar{t}\varphi_1^{+\prime}(t) - x\varphi_1^{+}(t) = \left[\overline{\varphi_0^{+\prime}(t) + \bar{t}\varphi_1^{+\prime}(t) - x\varphi_1^{+}(t)}\right] + g_2(t),$$

где $g_k(t)$ $(k = 1, 2)$ – случайные функции; $x=\frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}$ – упругая постоянная материала, λ, μ – коэффициенты Ламе.

При такой постановке первой и второй основной задачи теории упругости появляется возможность по известным допускам одних характеристик упругого состояния тела определить допуски для других характеристик.

2. На практике допусками и «случайной природой» обладают не только упругие характеристики тела, но и сама форма тела. Поэтому необходимо расширить условия основных задач теории упругости, рассмотрев контур как случайную функцию.

Заметим, что такая необходимость возникает уже при численном решении некоторых классических краевых задач. Это связано с тем, что эффективное решение всех краевых задач возможно только на таких областях как круг или полуплоскость. Если область отличается от указанных, то ее переводят на внутренность круга по средствам конформных отображений. Однако определить конформноотображающую функцию в виде конечного полинома возможно не для всех областей. Для таких областей, как внутренность эллипса, точное выражение конформноотображающей функции заменяется на приближенное. При этом форма контура заменяется на другую, как правило, более волнистую. При этом точность вычислений определяется заданной погрешностью. Однако при этом возникает вопрос, как погрешность, при определении формы контура, влияет на распределение напряжений и смещений упругого тела, и при каких условиях математическая модель напряженного состояния тела будет устойчивой. Такие вопросы в рамках классической теории краевых задач для бианалитических функций и их обобщений решить невозможно.

3. Краевые задачи для бианалитических функций моделируют напряженное состояние упругого тела только для достаточно узкого спектра нагрузок и деформаций, подчиняющихся закону Гука. Они не могут описать процесс перехода упругого состояния в текучее, что бывает важно при решении задач теории упругости для плоскостей, ослабленных отверстиями. Это связано с тем, что математическая модель, основанная на краевых задачах для бианалитических функций, не учитывает вероятностного характера процесса деформации тела.

Таким образом, традиционную математическую модель основных задач теории упругости нужно усовершенствовать, придав процессу стохастическое толкование. Это позволит применить классические математические модели в случае, когда:

1) нагрузка на тело носит случайных характер;

2) форма тела задана с определенными допусками.