

07

## **Круговой фурье-анализ мод микроструктурных оптических волокон со сложным сечением образующих каналов**

© А.Б. Сотский, Л.И. Сотская, О.А. Паушкина

Могилевский государственный университет им. А.А. Кулешова, Могилев,  
Белоруссия

Белорусско-Российский университет, Могилев, Белоруссия

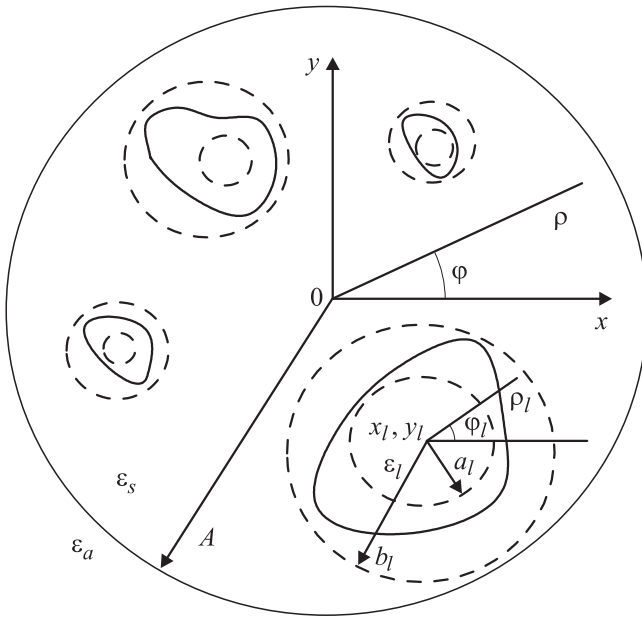
E-mail: AB\_Sotsky@mail.ru

*В окончательной редакции 22 января 2010 г.*

Развит метод расчета микроструктурных оптических волокон (МОВ) со сложным сечением образующих каналов. Исследованы вытекающие моды МОВ с каналами эллиптического сечения. Показано, что в данных волокнах возможна существенная анизотропия в затухании ортогонально-поляризованных мод.

Внимание к микроструктурным оптическим волокнам, образованным воздушными каналами в диэлектрической среде, вызвано их уникальными дисперсионными, поляризационными и нелинейными свойствами. Моды МОВ обычно являются вытекающими, поэтому особый интерес представляют методы расчета модовых характеристик МОВ, позволяющие учесть эффект изучения света из волноводного канала. Вместе с тем известные строгие методы такого рода [1–3] имеют ограниченную область применимости, так как они сформулированы только для простейшего случая образующих каналов с цилиндрической симметрией.

Для исследования мод МОВ со сложным сечением образующих каналов в [4] был предложен метод кругового фурье-анализа. Однако соответствующее рассмотрение базировалось на скалярном приближении. В настоящем сообщении представлено обобщение данного подхода с целью решения волноводной задачи в неупрощенной векторной постановке. Разработанный метод применен к исследованию вытекающих мод МОВ с каналами эллиптического сечения. Показано, что в данных



**Рис. 1.** Поперечное сечение исследуемых волокон.

волокна может наблюдаться существенное различие в коэффициентах затухания ортогонально-поляризованных мод.

Поперечное сечение исследуемых МОВ представлено на рис. 1. Здесь имеется круговая область радиуса  $A$  (оболочка волокна), окруженная однородной средой с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_a$ . Внутри указанной области располагаются  $k$  включений произвольной формы (сечения образующих каналов). Включения окружены однородной средой с проницаемостью  $\epsilon_s$ . Предполагается, что  $l$ -е включение ( $l = \overline{1, k}$ ) может быть заключено в некоторую окружность радиуса  $b_l$ , причем такие окружности, относящиеся к различным включениям, не пересекаются. Диэлектрическая проницаемость внутри включений может быть произвольной функцией поперечных координат (направляющие каналы в общем случае могут иметь неоднородное заполнение). В дальнейшем мы будем использовать декартовы координаты  $x, y$ , полярные координаты  $\rho, \phi$  и локальные полярные координаты  $\rho_l, \phi_l$  для каждого из включений (рис. 1).

Предположим, что МОВ направляет моду с зависимостью от времени  $t$  и продольной координаты  $z$  в форме  $\exp[i(\omega t - \beta z)]$ , где  $\beta$  — комплексная постоянная распространения моды. Тогда уравнения Максвелла могут быть сведены к системе уравнений второго порядка относительно поперечных компонент магнитного поля моды  $H_x, H_y$ :

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_0^2 \varepsilon_s - \beta^2 \right) H_{\pm} = -k_0^2 (\varepsilon(x, y) - \varepsilon_s) H_{\pm} \pm E \left( i \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \mp \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right), \quad (1)$$

где  $k_0 = 2\pi/\lambda_0$  — волновое число вакуума,  $H_{\pm} = H_x \pm iH_y$ ,  $E = \varepsilon^{-1}(\partial H_y/\partial x - \partial H_x/\partial y)$ . Применяя к (1) теорему Грина, получаем уравнения

$$\sum_{l=1}^k \Omega_l^{\pm}(x, y) + \Omega^{\pm}(x, y) = F_{\pm}(x, y), \quad (2)$$

$$\Omega_l^{\pm}(x, y) = b_l \int_0^{2\pi} d\varphi_l \left( G \frac{\partial}{\partial \rho_l} H_{\pm} - H_{\pm} \frac{\partial}{\partial \rho_l} G \right)_{\rho_l=b_l}, \quad (3)$$

$$\Omega^{\pm}(x, y) = -A \int_0^{2\pi} d\varphi' \left( G \frac{\partial}{\partial \rho'} H_{\pm} - H_{\pm} \frac{\partial}{\partial \rho'} G \right)_{\rho'=A}, \quad (4)$$

где  $F_{\pm}(x, y) \equiv 0$  при  $\rho > A$ , а также при  $\rho < A$  в областях включений,  $F_{\pm}(x, y) \equiv H_{\pm}(x, y)$  при  $\rho < A$  вне включений;  $G = 0.25iH_0^{(2)}(\chi_s, r)$ ,  $H_0^{(2)}(\chi_s, r)$  — функция Ханкеля,  $\chi_s = \sqrt{k_0^2 \varepsilon_s - \beta^2}$ ,  $r = \sqrt{(x_l + \rho_l \cos \varphi_l - x)^2 + (y_l + \rho_l \sin \varphi_l - y)^2}$  в (3),  $r = \sqrt{(\rho' \cos \varphi' - x)^2 + (\rho' \sin \varphi' - y)^2}$  в (4),  $x_l, y_l$  — координаты центра  $l$ -го включения.

Для алгебраизации уравнений (2) заметим, что в области  $\rho > A$  поле моды может быть представлено полиномом Фурье [3]:

$$H_{\pm} = \sum_{v=-m}^m C_v^{\pm} \exp(iv\varphi) H_v^{(2)}(\chi_a \rho), \quad (5)$$

где  $m$  — порядок редукции ряда Фурье по угловой переменной,  $C_v^{\pm}$  — некоторые коэффициенты,  $\chi_a = \sqrt{k_0^2 \varepsilon_a - \beta^2}$  ( $\text{Re } \chi_a > 0$  для вытекающих

мод,  $\text{Im } \chi_a < 0$  для собственных мод). Подставляя (5) в (4) и учитывая, что в (4) при  $x = \rho \cos \varphi$ ,  $y = \rho \sin \varphi$

$$H_0^{(2)}(\chi_s r) = \sum_{v=-\infty}^{\infty} \exp(i\nu(\varphi - \varphi')) \begin{cases} H_v^{(2)}(\chi_s \rho') J_v(\chi_s \rho) & \text{при } \rho < \rho' \\ J_v(\chi_s \rho') H_v^{(2)}(\chi_s \rho) & \text{при } \rho > \rho' \end{cases} \quad (6)$$

( $J_v(\dots)$  — функции Бесселя) [3], находим

$$\Omega^{\pm}(\rho, \varphi) = \sum_{v=-m}^m [Z_v U_v^{\pm} C_v^{\pm} + Z_{v\pm 2} V_v^{\pm} C_v^{\pm}], \quad (7)$$

где

$$U_v^{\pm} = \mp 0.25 i A \pi [\chi_a (1 + \varepsilon_s \varepsilon_a^{-1}) H_{v\mp 1}^{(2)}(\chi_a A) \bar{Z}_v - 2 \chi_s H_v^{(2)}(\chi_a A) \bar{Z}_{v\mp 1}],$$

$$V_v^{\pm} = \pm 0.25 i A \pi \chi_a (1 - \varepsilon_s \varepsilon_a^{-1}) H_{v\pm 1}^{(2)}(\chi_a A) \bar{Z}_{v\pm 2},$$

$$Z_v = J_v(\chi_s \rho) \exp(i\nu\varphi), \quad \bar{Z}_v = H_v^{(2)}(\chi_s A) \quad \text{при } \rho < A,$$

$$Z_v = H_v^{(2)}(\chi_s \rho) \exp(i\nu\varphi), \quad \bar{Z}_v = J_v(\chi_s A) \quad \text{при } \rho > A.$$

В области  $l$ -го включения ( $l = \overline{1, n}$ ) поле моды представим в виде полиномов Фурье

$$H_{\pm} = \sum_{v=-m}^m D_{lv}^{\pm}(\rho_l) \exp(i\nu\varphi_l), \quad E, H = \sum_{v=-m-1}^{m+1} D_{lv}^{(e),(h)}(\rho_l) \exp(i\nu\varphi_l), \quad (8)$$

где  $H = \partial H_x / \partial x - \partial H_y / \partial y$  — функция, пропорциональная продольной компоненте магнитного поля. После подстановки (8) в (3) и использования соотношений ортогональности для экспонент приходим к обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$\frac{d}{d\rho_l} D_{lv}^{(h)} = 0.5\beta^2 P_{lv} + i\rho_l^{-1} \sum_{\mu=-m-1}^{m+1} \varepsilon_{v\mu} \mu D_{l\mu}^{(e)} - 0.5k_0^2 \sum_{\mu=-m-1}^{m+1} \varepsilon_{v\mu} P_{l\mu}, \quad (9)$$

$$\frac{d}{d\rho_l} D_{lv}^{(e)} = 0.5ik_0^2 M_{lv} - i\rho_l^{-1} \sum_{\mu=-m-1}^{m+1} \varepsilon_{v\mu}^{-1} \mu D_{l\mu}^{(h)} - 0.5i\beta^2 \sum_{\mu=-m-1}^{m+1} \varepsilon_{v\mu}^{-1} M_{l\mu}, \quad (10)$$

$$\frac{d}{d\rho_l} P_{lv} = 2D_{lv}^{(h)} - v\rho_l^{-1}M_{lv} - \rho_l^{-1}P_{lv}, \quad (11)$$

$$\frac{d}{d\rho_l} M_{lv} = -v\rho_l^{-1}P_{lv} - \rho_l^{-1}M_{lv} + 2i \sum_{\mu=-m-1}^{m+1} \varepsilon_{v\mu} D_{l\mu}^{(e)}, \quad (12)$$

где

$$P_{lv} = D_{lv+1}^+ + D_{lv-1}^-, \quad M_{lv} = D_{lv+1}^+ - D_{lv-1}^-,$$

$$(\varepsilon_{v\mu}, \varepsilon_{v\mu}^{-1}) = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} \exp[i(\mu - v)\varphi_l](\varepsilon, \varepsilon^{-1})d\varphi_l.$$

Предположим, что в  $l$ -м включении может быть выделена некоторая окружность радиусом  $a_l$  (рис. 1), в пределах которой диэлектрическая проницаемость не зависит от координат и равна  $\varepsilon_l$  (в случае направляющих каналов с неоднородным заполнением  $a_l \rightarrow 0$ ). Внутри данной окружности  $\varepsilon_{v\mu} = \delta_{v\mu}\varepsilon_l$ ,  $\varepsilon_{v\mu}^{-1} = \delta_{v\mu}\varepsilon_l^{-1}$  ( $\delta_{v\mu}$  — символ Кронекера), и уравнения (9)–(12) сводятся к уравнениям Бесселя относительно функций  $D_{lv}^{\pm}(\rho_l)$ ,  $D_{lv}^{(h),(e)}(\rho_l)$ . В результате при  $\rho_l < a_l$

$$D_{lv}^{\pm}(\rho_l) = C_{lv}^{\pm} J_v(\chi_l \rho_l), \quad D_{lv}^{(h),(e)}(\rho_l) = C_{lv}^{(h),(e)} J_v(\chi_l \rho_l), \quad (13)$$

где  $\chi_l = \sqrt{k_0^2 \varepsilon_l - \beta^2}$ ,  $C_{lv}^{\pm}$ ,  $C_{lv}^{(h),(e)}$  — некоторые коэффициенты,  $J_v(\chi_l \rho_l)$  — функции Бесселя. Заметим также, что в соответствии с (9)–(12)

$$C_{lv}^{(h)} = 0.5\chi_l(C_{lv+1}^+ - C_{lv-1}^-), \quad C_{lv}^{(e)} = 0.5\chi_l(i\varepsilon_l)^{-1}(C_{lv+1}^+ + C_{lv-1}^-). \quad (14)$$

Полагая в (13)  $\rho_l = a_l$  и учитывая (14), приходим к задаче Коши для уравнений (9)–(12). Интегрирование этой задачи позволяет выразить величины  $H_{\pm}(b_l)$  и  $dH_{\pm}(b_l)/d\rho_l$ , фигурирующие в (3), через коэффициенты  $C_{lv}^{\pm}$  посредством линейных соотношений. Далее, переходя в (3) к локальной системе координат  $l$ -го включения и используя представление, аналогичное (6), получаем выражения

$$\Omega_l^{\pm}(\rho_l, \varphi_l) = \sum_{v=-m}^m Z_{lv} \sum_{\mu=-m}^m (S_{2v\mu}^{\pm} C_{l\mu}^+ + S_{1v\mu}^{\pm} C_{l\mu}^-), \quad (15)$$

$$S_{kv\mu}^{\pm} = 0.5i\pi b_l [(D_{lv\mp 1}^{(h)} \pm i\varepsilon_s D_{lv\mp 1}^{(e)}) \bar{Z}_{lv} \mp 0.5\chi_s (P_{lv\mp 1} \pm M_{lv\mp 1}) \bar{Z}_{lv\mp 1}]_{\rho_l=b_l}, \quad (16)$$

где  $k = 1, 2$ ,

$$Z_{lv} = J_v(\chi_s \rho_l) \exp(iv\varphi_l), \quad \bar{Z}_{lv} = H_v^{(2)}(\chi_s b_l) \quad \text{при } \rho_l < b_l,$$

$$Z_{lv} = H_v^{(2)}(\chi_s \rho_l) \exp(iv\varphi_l), \quad \bar{Z}_{lv} = J_v(\chi_s b_l) \quad \text{при } \rho_l > b_l.$$

Коэффициенты  $D_{lv}^{(h),(e)}(b_l)$ ,  $P_{lv}(b_l)$  и  $M_{lv}(b_l)$  в (16) рассчитываются в результате интегрирования уравнений (9)–(12) на отрезке  $a_l \leq \rho_l \leq b_l$  с начальными условиями

$$M_v(a_l) = -P_v(a_l), \quad C_v^{(e)}(a_l) = -\frac{C_v^{(h)}(a_l)}{i\varepsilon_l},$$

$$P_v(a_l) = \delta_{v\mu+1} J_\mu(\chi_l a_l), \quad C_v^{(h)}(a_l) = -\frac{\chi_l}{2} \delta_{v\mu+1} J_{\mu+1}(\chi_l a_l)$$

при построении матриц  $S_{1v\mu}^{\pm}$  и

$$M_v(a_l) = P_v(a_l), \quad C_v^{(e)}(a_l) = \frac{C_v^{(h)}(a_l)}{i\varepsilon_l},$$

$$P_v(a_l) = \delta_{v\mu-1} J_\mu(\chi_l a_l), \quad C_v^{(h)}(a_l) = \frac{\chi_l}{2} \delta_{v\mu-1} J_{\mu-1}(\chi_l a_l)$$

при построении матриц  $S_{2v\mu}^{\pm}$ . В общем случае данное интегрирование должно осуществляться численно. Расчеты упрощаются, если  $l$ -е включение обладает круговой симметрией, поскольку в этом случае матрицы  $S_{kv\mu}^{\pm}$  являются диагональными. Дальнейшее упрощение имеет место при рассмотрении МОВ, образованных однородными круговыми каналами либо капиллярами. Для таких волокон система уравнений (9)–(12) интегрируется в цилиндрических функциях, а уравнения (2) переходят в соответствующие аналитические выражения, полученные ранее в [2,3].

После поочередного перехода к локальным системам координат включений  $\rho_l, \varphi_l$  ( $l = \bar{1}, \bar{k}$ ) в (7) и к системам координат  $\rho, \varphi$  и  $\rho_j, \varphi_j$  ( $j \neq l$ ) в (15) на основании теоремы сложения цилиндрических функций Графа функциональное уравнение (2) преобразуется в однородную алгебраическую систему  $MX = 0$ , где под  $X$  понимается вектор-столбец размерности  $(2k+1)(2m+1)$ , составленный из коэффициентов  $C_v^{\pm}$  и  $C_{lv}^{\pm}$  (преобразования такого типа рассмотрены в [3]). Расчет

Зависимость расчетных значений постоянных распространения основных  $H_x$ - и  $H_y$ -мод от порядка полиномов Фурье  $m$

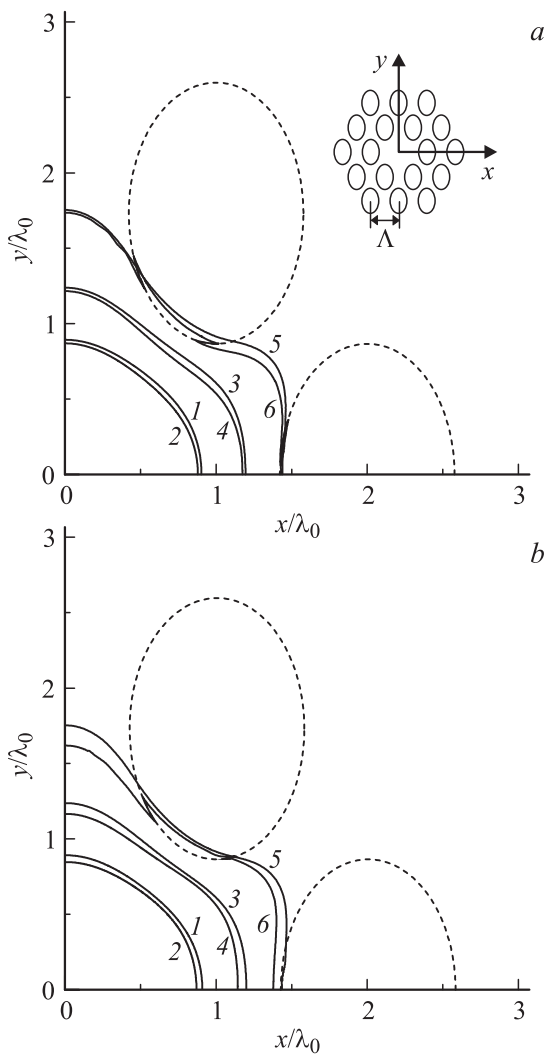
$H_x$			$H_y$		
$m$	$k_0^{-1} \text{Re} \beta$	$k_0^{-1} \text{Im} \beta \cdot 10^{10}$	$m$	$k_0^{-1} \text{Re} \beta$	$k_0^{-1} \text{Im} \beta \cdot 10^{10}$
4	1.428355	-1.22	4	1.428169	-1.55
8	1.428360	-6.04	8	1.428162	-1.41
12	1.428376	-5.65	12	1.428154	-1.41
16	1.428384	-5.59	16	1.428150	-1.41
20	1.428388	-5.58	20	1.428147	-1.41

модовых характеристик МОВ сводится к решению дисперсионного уравнения  $\det M = 0$  относительно возможных значений  $\beta$  и последующему построению полей мод на основании выражений (2), (5), (8). Заметим, что в частном случае МОВ, образованных однородными круговыми каналами либо капиллярами, система  $MX = 0$  полностью совпадает с аналогичными системами, полученными ранее в [2,3].

Мы применили изложенный метод к исследованию МОВ, сформированных из  $N$  гексагональных колец одинаковых воздушных каналов эллиптического сечения в кварцевом стекле. В геометрическом центре волокна канал отсутствует. Период гексагональной решетки равен  $\Lambda$ . Большие полуоси всех эллипсов ориентированы вдоль оси  $Oy$  (рис. 2). При расчетах радиусы введенных выше окружностей полагались равными  $b_l = b$ ,  $a_l = a$ , где  $b$  и  $a$  — большая и малая полуоси эллипсов соответственно. Отметим, что, поскольку в сечении данных волокон имеются две оси симметрии  $Ox$  и  $Oy$ , их моды имеют преимущественно линейную поляризацию с главными компонентами магнитного поля  $H_x$  ( $H_x$ -моды) либо  $H_y$  ( $H_y$ -моды) [3].

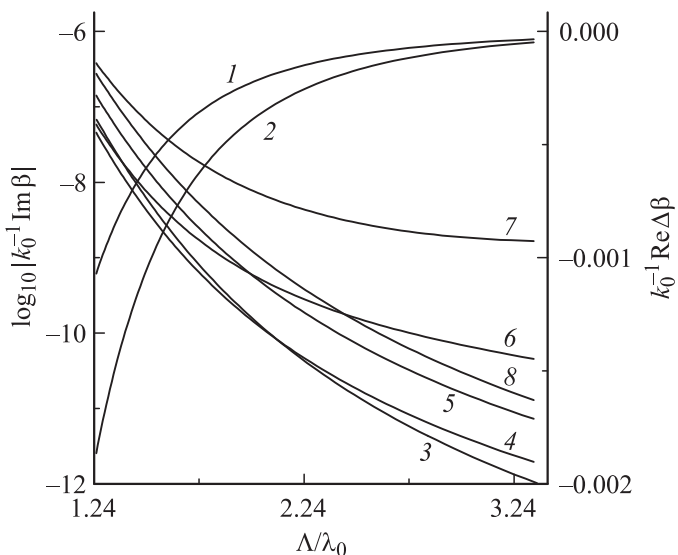
Результаты расчетов представлены в таблице и на рис. 2, 3. Они получены путем интегрирования уравнений (9)–(12) методом Рунге–Кутты четвертого порядка при значениях  $N = 2$ ,  $\varepsilon_s = \varepsilon_a = 2.1025 - i0$ ,  $\varepsilon_l = 1 - i0$  и с сохранением пропорции  $ab/\Lambda^2 = 1/8$ .

Таблица и рис. 2 относятся к  $\Phi = b/a = 1.5$ ,  $\Lambda/\lambda_0 = 2$ . Согласно таблице, приемлемая для приложений точность расчетов достигается при  $m \geq 12$ . На рис. 2 представлены четверти симметричных распределений интенсивности  $S_z(x, y)$  ( $S_z$  — составляющая вектора Пойнтинга) основных  $H_x$ - и  $H_y$ -мод. Изолинии на рис. 2 соответствуют  $m \geq 12$



**Рис. 2.** Изолинии интенсивности  $S_z/S_{z \max} = e^{-1}$  (1, 2),  $e^{-2}$  (3, 4),  $e^{-4}$  (5, 6) основных  $H_x$  (a) и  $H_y$  (b) мод. Кривые 1, 3, 5 — приближение [4], 2, 4, 6 — разработанный метод. На вставке — поперечное сечение МОБ; пунктир — границы включений.





**Рис. 3.** Зависимости  $\text{Re} \Delta\beta(\lambda_0)$  (1, 2) при  $\Phi = 1.5$  (1),  $\Phi = 2$  (2) и  $\text{Im} \beta(\lambda_0)$  (3–8) при  $\Phi = 1$  (3),  $\Phi = 1.5$  (4, 5),  $\Phi = 2$  (6, 7), рассчитанные предлагаемым методом. Кривые 3, 4, 6 относятся к  $H_y$ -модам, 3, 5, 7 — к  $H_x$ -модам. Кривая 8 — приближение [4] для  $\Phi = 1.5$ .

(кривые, рассчитанные при различных значениях  $m$  из указанного диапазона, в масштабах рисунка неотличимы).

Рис. 3 иллюстрирует дисперсионные характеристики основных ортогонально-поляризованных мод волокон при различных значениях параметра эллиптичности каналов  $\Phi$ . Здесь использовано обозначение  $\Delta\beta = \beta_y - \beta_x$ , где  $\beta_y$  и  $\beta_x$  — постоянные распространения  $H_y$ - и  $H_x$ -мод ( $\text{Re} \Delta\beta$  характеризует модовое двулучепреломление). Согласно рис. 3, двулучепреломление увеличивается с ростом  $\Phi$  и с уменьшением отношения  $\Lambda/\lambda_0$ . Подобные закономерности уже отмечались ранее в [5,6]. Оригинальными являются дисперсионные зависимости для мнимых частей постоянных распространения (поскольку среды, формирующие волокна, прозрачны, приведенные графики характеризуют затухание мод, вызванное вытеканием излучения из сердцевины волокон). Из рис. 3 видно, что в отличие от поведения вещественных частей

постоянных распространения поляризация зависимость затухания мод становится резко выраженной при увеличении отношения  $\Lambda/\lambda_0$ . Данный эффект может быть использован при создании одномодовых однополяризационных МОВ для сенсорных приложений.

На рис. 2, 3 представлены также кривые, рассчитанные в скалярном приближении [4]. Как видно из рисунков, это приближение является довольно грубым, особенно при описании коэффициентов затухания вытекающих мод. Кроме того, поскольку  $H_x$ - и  $H_y$ -моды в скалярном приближении вырождены, оно не пригодно для описания модового двулучепреломления и поляризационной зависимости потерь.

Итак, предложен метод расчета модовых характеристик микроструктурных оптических волокон со сложным сечением образующих каналов. Сформулированная расчетная схема проста в программной реализации и позволяет исследовать векторную волноводную задачу как для собственных, так и для вытекающих мод.

## Список литературы

- [1] *White T.P., Kuhlmei B.T., McPhedran R.C.* et al. // J. Opt. Soc. Am. B. 2002. V. 19. N 10. P. 2322–2330.
- [2] *Сотский А.Б., Сотская Л.И.* // Письма в ЖТФ. 2003. Т. 29. В. 18. С. 37–44.
- [3] *Сотский А.Б., Сотская Л.И.* // ЖТФ. 2004. Т. 74. В. 23. С. 32–40.
- [4] *Сотский А.Б., Сотская Л.И.* // ЖТФ. 2008. Т. 78. В. 1. С. 90–97.
- [5] *Steel M.J., Osgood R.M.* // J. Lightwave Technol. 2001. V. 19. N 4. P. 495–503.
- [6] *Wang L., Yang D.* // Opt. Express. 2007. V. 15. N 14. P. 8892–8897.