ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)
УДК 517.925
https://doi.org/10.29235/1561-2430-2019-55-1-50-61

Поступила в редакцию 09.11.2018
Received 09.11.2018

А. И. Кашпар[1], В. Н. Лаптинский[2]

[1]Белорусско-Российский университет, Могилев, Беларусь
[2]Институт технологии металлов Национальной академии наук Беларуси, Могилев, Беларусь

О РАЗРЕШИМОСТИ И ПОСТРОЕНИИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ВАЛЛЕ – ПУССЕНА ДЛЯ МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПАРАМЕТРОМ

Аннотация. Рассматриваются вопросы конструктивного анализа краевой задачи Валле – Пуссена для линейного матричного дифференциального уравнения Ляпунова второго порядка с параметром и переменными коэффициентами. Исходная задача сведена к эквивалентной интегральной задаче, для исследования разрешимости которой применяется модификация обобщенного принципа сжимающих отображений. Установлена связь используемого подхода с методом функций Грина. Получены коэффициентные достаточные условия однозначной разрешимости этой задачи. С помощью метода малого параметра Ляпунова – Пуанкаре разработан алгоритм построения решения. Исследованы сходимость, скорость сходимости этого алгоритма и дана конструктивная оценка области локализации решения. В качестве иллюстрации применения полученных результатов рассмотрена линейная задача стационарной теплопроводности для цилиндрической стенки, а также двумерная матричная модельная задача. С помощью разработанного общего алгоритма построены аналитические приближенные решения этих задач, и на основе их точных решений проведен сравнительный численный анализ.

Ключевые слова: матричное дифференциальное уравнение, краевая задача, однозначная разрешимость, алгоритм построения решения

Для цитирования. Кашпар, А. И. О разрешимости и построении решения задачи Валле – Пуссена для матричного уравнения Ляпунова второго порядка с параметром / А. И. Кашпар, В. Н. Лаптинский // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2019. – Т. 55, № 1. – С. 50–61. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2019-55-1-50-61

A. I. Kashpar[1], V. N. Laptinskiy[2]

[1]Belarusian-Russian University, Mogilev, Belarus
[2]Institute of Technology of Metals of the National Academy of Sciences of Belarus, Mogilev, Belarus

SOLVABILITY AND CONSTRUCTION OF SOLUTION TO THE DE LA VALLEE – POUSSIN PROBLEM FOR THE SECOND-ORDER MATRIX LYAPUNOV EQUATION WITH A PARAMETER

Abstract. The paper considers the issues of constructive analysis of the de la Vallee – Poussin boundary-value problem for the second-order linear matrix differential Lyapunov equation with a parameter and variable coefficients. The initial problem is reduced to an equivalent integral problem, and to study its solvability a modification of the generalized contraction mapping principle is used. A connection between the approach used and the Green's function method is established. The coefficient sufficient conditions for the unique solvability of this problem are obtained. Using the Lyapunov – Poincaré small parameter method, an algorithm for constructing a solution has been developed. The convergence and the rate of convergence of this algorithm have been investigated, and a constructive estimation of the region of solution localization is given. To illustrate the application of the results obtained, the linear problem of steady heat conduction for a cylindrical wall, as well as a two-dimensional matrix model problem is considered. With the help of the developed general algorithm, analytical approximate solutions of these problems have been constructed and on the basis of their exact solutions a comparative numerical analysis has been carried out.

Keywords: matrix differential equation, boundary-value problem, unique solvability, algorithm for constructing solutions

For citation. Kashpar A. I., Laptinskiy V. N. Solvability and construction of solution to the de la Vallee – Poussin problem for the second-order matrix Lyapunov equation with a parameter. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2019, vol. 55, no. 1, pp. 50–61 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2019-55-1-50-61

Введение. В работе изучаются важные для приложений вопросы конструктивного анализа краевой задачи Валле – Пуссена для матричного уравнения Ляпунова второго порядка с параметром (однозначная разрешимость, построение решения, оценка области его локализации).

Предложен способ редукции этой задачи к эквивалентной интегральной задаче. Исследованы вопросы существования, единственности решения задачи и дана оценка области его возможного расположения. Предложен алгоритм решения задачи, основанной на использовании метода малого параметра.

1. Постановка задачи. Рассмотрим краевую задачу

$$\frac{d^2\mathbf{X}}{dt^2}=\mathbf{A}(t)\frac{d\mathbf{X}}{dt}+\frac{d\mathbf{X}}{dt}\mathbf{B}(t)+\lambda\left(\mathbf{A}_1(t)\mathbf{X}+\mathbf{X}\mathbf{B}_1(t)\right)+\lambda\left(\mathbf{A}_2(t)\frac{d\mathbf{X}}{dt}+\frac{d\mathbf{X}}{dt}\mathbf{B}_2(t)\right)+\mathbf{F}(t), \tag{1}$$

$$\mathbf{X}(0,\lambda)=\mathbf{M}, \tag{2}$$

$$\mathbf{X}(\omega,\lambda)=\mathbf{N}, \tag{3}$$

где $t\in[0,\omega]$, $\mathbf{F}(t), \mathbf{A}(t), \mathbf{B}(t), \mathbf{A}_i(t), \mathbf{B}_i(t)\ (i=1,2)$ – матрицы класса $\mathbb{C}[0,\omega]$ соответствующих размерностей; $\omega>0$, $\lambda\in\mathbb{R}$, $\mathbf{X}\in\mathbb{R}^{n\times m}$, $\mathbf{M}, \mathbf{N}$ – постоянные вещественные матрицы.

Задача (1)–(3) представляет собой задачу Валле – Пуссена [1, с. 155] в матричной постановке. В векторной постановке нелинейная задача такого типа сравнительно хорошо изучена качественными методами (см., напр., [2, с. 491]). Задачи типа (1)–(3) в скалярном случае встречаются в ряде проблем математической физики и прикладной математики. Весьма важную роль эти задачи играют в теплофизике [3, 4]. Отметим, что структурные свойства уравнений типа (1) и их решений исследовались в работах [5–9]; задача (1)–(3) ранее никем не изучалась.

2. Анализ разрешимости задачи и построение решения. Сначала опишем сведение задачи (1)–(3) к эквивалентной интегральной задаче, при этом вместо уравнения (1) будем рассматривать эквивалентную ему систему уравнений

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt}=\mathbf{Y}, \tag{4}$$

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt}=\mathbf{A}(t)\mathbf{Y}+\mathbf{Y}\mathbf{B}(t)+\tilde{\mathbf{H}}(t,\lambda,\mathbf{X},\mathbf{Y}), \tag{5}$$

где $\tilde{\mathbf{H}}(t,\lambda,\mathbf{X},\mathbf{Y})=\lambda\left(\mathbf{A}_1(t)\mathbf{X}(t,\lambda)+\mathbf{X}(t,\lambda)\mathbf{B}_1(t)\right)+\lambda\left(\mathbf{A}_2(t)\mathbf{Y}(t,\lambda)+\mathbf{Y}(t,\lambda)\mathbf{B}_2(t)\right)+\mathbf{F}(t)\equiv\mathbf{H}(t,\lambda).$

Пусть $\mathbf{X}(t,\lambda), \mathbf{Y}(t,\lambda)$ – решение задачи (2)–(5). Из (2), (4) имеем

$$\mathbf{X}(t,\lambda)=\mathbf{M}+\int_0^t\mathbf{Y}(\tau,\lambda)d\tau. \tag{6}$$

Из (6) на основании (3) получим

$$\int_0^\omega\mathbf{Y}(\tau,\lambda)d\tau=\mathbf{N}-\mathbf{M}. \tag{7}$$

Согласно двусторонней формуле Коши, из (5) имеем

$$\mathbf{Y}(t,\lambda)=\mathbf{U}(t)\mathbf{Y}(0,\lambda)\mathbf{V}(t)+\mathbf{U}(t)\int_0^t\mathbf{U}^{-1}(s)\mathbf{H}(s,\lambda)\mathbf{V}^{-1}(s)ds\mathbf{V}(t), \tag{8}$$

где $\mathbf{U}(t), \mathbf{V}(t)$ – интегральные матрицы уравнений соответственно $d\mathbf{U}(t)/dt=\mathbf{A}(t)\mathbf{U}(t)$ $\left(\mathbf{U}(0)=\mathbf{E}_n\right)$, $d\mathbf{V}(t)/dt=\mathbf{V}(t)\mathbf{B}(t)$ $\left(\mathbf{V}(0)=\mathbf{E}_m\right)$; $\mathbf{E}_k$ – единичная матрица порядка k.

Такой подход широко используется при изучении многомерных краевых задач (см. напр., [5]). Подставляя (8) в (7), получим

$$\mathbf{\Phi}\mathbf{Y}(0,\lambda)=-\int_0^\omega\mathbf{U}(\tau)\left(\int_0^\tau\mathbf{U}^{-1}(s)\mathbf{H}(s,\lambda)\mathbf{V}^{-1}(s)ds\right)\mathbf{V}(\tau)d\tau+\mathbf{N}-\mathbf{M}, \tag{9}$$

где $\mathbf{\Phi}$ – линейный матричный оператор типа [5],

$$\mathbf{\Phi Y}(0,\lambda)=\int_0^{\omega}\mathbf{U}(\tau)\mathbf{Y}(0,\lambda)\mathbf{V}(\tau)d\tau.$$

Уравнения (6), (8), (9) представляют собой систему, естественную для метода функций Грина в матричных задачах.

Заметим, что формальное матричное уравнение $\mathbf{\Phi Z}(t)=\mathbf{K}(t)$ относительно $(n\times m)$-матрицы $\mathbf{Z}(t)$ эквивалентно уравнению $\widetilde{\mathbf{\Phi}}\widetilde{\mathbf{Z}}(t)=\widetilde{\mathbf{K}}(t)$ с квадратной матрицей $\widetilde{\mathbf{\Phi}}$ порядка nm и векторами $\widetilde{\mathbf{Z}}(t)$, $\widetilde{\mathbf{K}}(t)$ соответствующей размерности. Очевидно, условие $\det\widetilde{\mathbf{\Phi}}\neq 0$ представляет собой условие однозначной обратимости оператора $\mathbf{\Phi}$. Некоторые способы построения $\mathbf{\Phi}^{-1}$ предложены в [10]. Поэтому в случае обратимости $\mathbf{\Phi}$ из (9) имеем

$$\mathbf{Y}(0,\lambda)=\mathbf{\Phi}^{-1}\left[\mathbf{N}-\mathbf{M}-\int_0^{\omega}\mathbf{U}(\tau)\left(\int_0^{\tau}\mathbf{U}^{-1}(s)\mathbf{H}(s,\lambda)\mathbf{V}^{-1}(s)ds\right)\mathbf{V}(\tau)d\tau\right]. \tag{10}$$

Подход [11] позволяет получать более простые и удобные для анализа эквивалентные интегральные задачи. Опишем связь между методом функций Грина и методом [11].

Подставляя (10) в (8), получим последовательно

$$\mathbf{Y}(t,\lambda)=\mathbf{U}(t)\left\{\mathbf{\Phi}^{-1}\left[\mathbf{N}-\mathbf{M}-\int_0^{\omega}\mathbf{U}(\tau)\left(\int_0^{\tau}\mathbf{U}^{-1}(s)\mathbf{H}(s,\lambda)\mathbf{V}^{-1}(s)ds\right)\mathbf{V}(\tau)d\tau\right]\right\}\mathbf{V}(t)+$$

$$+\mathbf{U}(t)\int_0^{t}\mathbf{U}^{-1}(s)\mathbf{H}(s,\lambda)\mathbf{V}^{-1}(s)ds\mathbf{V}(t)=\mathbf{U}(t)\Big(\mathbf{\Phi}^{-1}(\mathbf{N}-\mathbf{M})\Big)\mathbf{V}(t)+$$

$$+\mathbf{U}(t)\mathbf{\Phi}^{-1}\left(\int_0^{\omega}\mathbf{U}(\tau)\left(\int_{\tau}^{0}\mathbf{U}^{-1}(s)\mathbf{H}(s,\lambda)\mathbf{V}^{-1}(s)ds\right)\mathbf{V}(\tau)d\tau\right)\mathbf{V}(t)+\mathbf{U}(t)\mathbf{\Phi}^{-1}\mathbf{\Phi}\int_0^{t}\mathbf{U}^{-1}(s)\mathbf{H}(s,\lambda)\mathbf{V}^{-1}(s)ds\mathbf{V}(t)=$$

$$=\mathbf{U}(t)\Big(\mathbf{\Phi}^{-1}(\mathbf{N}-\mathbf{M})\Big)\mathbf{V}(t)+\mathbf{U}(t)\mathbf{\Phi}^{-1}\left(\int_0^{\omega}\mathbf{U}(\tau)\left(\int_{\tau}^{0}\mathbf{U}^{-1}(s)\mathbf{H}(s,\lambda)\mathbf{V}^{-1}(s)ds\right)\mathbf{V}(\tau)d\tau\right)\mathbf{V}(t)+$$

$$+\mathbf{U}(t)\mathbf{\Phi}^{-1}\left(\int_0^{\omega}\mathbf{U}(\tau)\left(\int_0^{t}\mathbf{U}^{-1}(s)\mathbf{H}(s,\lambda)\mathbf{V}^{-1}(s)ds\right)\mathbf{V}(\tau)d\tau\right)\mathbf{V}(t)=$$

$$=\mathbf{U}(t)\Big(\mathbf{\Phi}^{-1}(\mathbf{N}-\mathbf{M})\Big)\mathbf{V}(t)+\mathbf{U}(t)\mathbf{\Phi}^{-1}\left(\int_0^{\omega}\mathbf{U}(\tau)\left(\int_{\tau}^{t}\mathbf{U}^{-1}(s)\mathbf{H}(s,\lambda)\mathbf{V}^{-1}(s)ds\right)\mathbf{V}(\tau)d\tau\right)\mathbf{V}(t).$$

Таким образом, получена система типа [11, с. 170] матричных интегральных уравнений, состоящая из уравнения (6) и уравнения

$$\mathbf{Y}(t,\lambda)=\mathbf{U}(t)\Big(\mathbf{\Phi}^{-1}(\mathbf{N}-\mathbf{M})\Big)\mathbf{V}(t)+\mathbf{U}(t)\mathbf{\Phi}^{-1}\left(\int_0^{\omega}\mathbf{U}(\tau)\left(\int_{\tau}^{t}\mathbf{U}^{-1}(s)\mathbf{H}(s,\lambda)\mathbf{V}^{-1}(s)ds\right)\mathbf{V}(\tau)d\tau\right)\mathbf{V}(t). \tag{11}$$

Верно и обратное: всякое непрерывное решение системы уравнений (6), (11) является решением задачи (2)–(5).

Как видно, используемый подход [11] позволяет вместо системы уравнений (6), (8), (9) вывести уравнения (6), (11), на основе анализа которых можно получить более простые, чем из (6), (8), (9), коэффициентные условия однозначной разрешимости и алгоритмы построения решения задачи (1)–(3).

Запишем интегральную задачу (6), (11) в следующем виде:

$$\mathbf{X}(t,\lambda)=\mathbf{M}+\mathbf{P}_{\mathbf{UV}}(t)+\int_0^{t}\mathbf{U}(\varphi)\mathbf{\Phi}^{-1}\left(\int_0^{\omega}\mathbf{U}(\tau)\left(\int_{\tau}^{\varphi}\mathbf{U}^{-1}(s)\mathbf{H}(s,\lambda)\mathbf{V}^{-1}(s)ds\right)\mathbf{V}(\tau)d\tau\right)\mathbf{V}(\varphi)d\varphi, \tag{12}$$

$$\mathbf{Y}(t,\lambda)=\mathbf{Q}_{\mathbf{UV}}(t)+\mathbf{U}(t)\mathbf{\Phi}^{-1}\left(\int_0^\omega \mathbf{U}(\tau)\left(\int_\tau^t \mathbf{U}^{-1}(s)\mathbf{H}(s,\lambda)\mathbf{V}^{-1}(s)ds\right)\mathbf{V}(\tau)d\tau\right)\mathbf{V}(t), \tag{13}$$

где $\mathbf{P}_{\mathbf{UV}}(t)=\int_0^t \mathbf{U}(\tau)\left(\mathbf{\Phi}^{-1}(\mathbf{N}-\mathbf{M})\right)\mathbf{V}(\tau)d\tau,\ \mathbf{Q}_{\mathbf{UV}}(t)=d\mathbf{P}_{\mathbf{UV}}(t)dt=\mathbf{U}(t)\left(\mathbf{\Phi}^{-1}(\mathbf{N}-\mathbf{M})\right)\mathbf{V}(t).$

Заметим, что для функции $\mathbf{P}_{\mathbf{UV}}(t)$ при $t=\omega$ имеет место соотношение $\mathbf{P}_{\mathbf{UV}}(\omega)=\mathbf{N}-\mathbf{M},$ поскольку

$$\mathbf{P}_{\mathbf{UV}}(\omega)=\int_0^\omega \mathbf{U}(\tau)\left(\mathbf{\Phi}^{-1}(\mathbf{N}-\mathbf{M})\right)\mathbf{V}(\tau)d\tau=\mathbf{\Phi}\left(\mathbf{\Phi}^{-1}(\mathbf{N}-\mathbf{M})\right).$$

Ввиду внешней громоздкости интегральной задачи (12), (13), разрешимость и вычислительную схему алгоритма отыскания решения будем строить на основе системы операторных уравнений

$$\mathbf{X}=\mathbf{M}+\mathbf{P}_{\mathbf{UV}}+\mathcal{L}_1(\mathbf{X},\mathbf{Y}), \tag{14}$$

$$\mathbf{Y}=\mathbf{Q}_{\mathbf{UV}}+\mathcal{L}_2(\mathbf{X},\mathbf{Y}), \tag{15}$$

где через $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ обозначены соответствующие линейные интегральные операторы в (12), (13). Эти операторы действуют на множестве $G=\left\{(\mathbf{X}(t,\lambda),\ \mathbf{Y}(t,\lambda))\in\mathbb{R}^{n\times m}\times\mathbb{R}^{n\times m}:\|\mathbf{X}\|_C<\infty, \|\mathbf{Y}\|_C<\infty\right\}$, где $(t,\lambda)\in[0,\omega]\times\mathbb{R},\ \|\mathbf{Z}\|_C=\max\limits_{0\le t\le\omega}\|\mathbf{Z}(t,\lambda)\|;\ \|\cdot\|$ – согласованная норма матриц.

Введем следующие обозначения:

$$\alpha_i=\max_t\|\mathbf{A}_i(t)\|,\ \beta_i=\max_t\|\mathbf{B}_i(t)\|\ (i=1,2;\ t\in[0,\omega]),\ h=\max_t\|\mathbf{F}(t)\|,\ \varepsilon=|\lambda|,\ \gamma=\left\|\mathbf{\Phi}^{-1}\right\|,$$

$$\widetilde{\mathbf{P}}_{\mathbf{UV}}=\mathbf{M}+\mathbf{P}_{\mathbf{UV}}+\mathcal{L}_1(\mathbf{0},\mathbf{0}),\ \widetilde{\mathbf{Q}}_{\mathbf{UV}}=\mathbf{Q}_{\mathbf{UV}}+\mathcal{L}_2(\mathbf{0},\mathbf{0}),\ \lambda_U=\max_{0\le s\le\tau\le\omega}\left\|\mathbf{U}(\tau)\mathbf{U}^{-1}(s)\right\|,\ \lambda_V=\max_{0\le s\le\tau\le\omega}\left\|\mathbf{V}^{-1}(s)\mathbf{V}(\tau)\right\|,$$

$$a_1=\frac{\omega^3}{3}\gamma\lambda_U^2\lambda_V^2(\alpha_1+\beta_1),\ \ b_1=\gamma\frac{\omega^3}{3}\lambda_U^2\lambda_V^2(\alpha_2+\beta_2),\ \ a_2=\frac{\omega^2}{2}\gamma\lambda_U^2\lambda_V^2(\alpha_1+\beta_1),\ \ b_2=\frac{\omega^2}{2}\gamma\lambda_U^2\lambda_V^2(\alpha_2+\beta_2),$$

$$D=\left\{t\in[0,\omega],|\lambda|<\lambda_0,\|\mathbf{X}\|<\infty,\|\mathbf{Y}\|<\infty\right\},\ \ \lambda_0=1/(a_1+b_2).$$

Далее воспользуемся методом разложения в ряд по степеням параметра λ применительно к системе уравнений (14), (15) либо к (12), (13).

Решение отыскиваем в виде

$$\mathbf{X}=\mathbf{X}_0+\lambda\mathbf{X}_1+\lambda^2\mathbf{X}_2+\ldots+\lambda^k\mathbf{X}_k+\ldots, \tag{16}$$

$$\mathbf{Y}=\mathbf{Y}_0+\lambda\mathbf{Y}_1+\lambda^2\mathbf{Y}_2+\ldots+\lambda^k\mathbf{Y}_k+\ldots\ . \tag{17}$$

Функцию $\tilde{\mathbf{H}}=\lambda(\mathbf{A}_1\mathbf{X}+\mathbf{X}\mathbf{B}_1)+\lambda(\mathbf{A}_2\mathbf{Y}+\mathbf{Y}\mathbf{B}_2)+\mathbf{F}$ с учетом (16), (17) можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{H}}=\mathbf{F}+\lambda(\mathbf{A}_1\mathbf{X}_0+\mathbf{X}_0\mathbf{B}_1+\mathbf{A}_2\mathbf{Y}_0+\mathbf{Y}_0\mathbf{B}_2)+\lambda^2(\mathbf{A}_1\mathbf{X}_1+\mathbf{X}_1\mathbf{B}_1+\mathbf{A}_2\mathbf{Y}_1+\mathbf{Y}_1\mathbf{B}_2)+\ldots+\\+\lambda^k(\mathbf{A}_1\mathbf{X}_{k-1}+\mathbf{X}_{k-1}\mathbf{B}_1+\mathbf{A}_2\mathbf{Y}_{k-1}+\mathbf{Y}_{k-1}\mathbf{B}_2)+\ldots\end{aligned} \tag{18}$$

или

$$\tilde{\mathbf{H}}=\mathbf{H}_0(t)+\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^{k+1}\mathbf{H}_k(t),$$

где $\mathbf{H}_0(t)=\mathbf{F}(t),\ \mathbf{H}_k(t)=\mathbf{A}_1\mathbf{X}_k+\mathbf{X}_k\mathbf{B}_1+\mathbf{A}_2\mathbf{Y}_k+\mathbf{Y}_k\mathbf{B}_2.$

Подставляя (16), (17), (18) в (14), (15) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ, получим последовательно

$$\mathbf{X}_0=\mathbf{M}+\mathbf{P}_{\mathbf{UV}}+\mathcal{L}_1(\mathbf{0},\mathbf{0})\equiv\widetilde{\mathbf{P}}_{\mathbf{UV}},\quad \mathbf{Y}_0=\mathbf{Q}_{\mathbf{UV}}+\mathcal{L}_2(\mathbf{0},\mathbf{0})\equiv\widetilde{\mathbf{Q}}_{\mathbf{UV}},\tag{19}$$

$$\mathbf{X}_{m+1}=\mathcal{L}_1(\mathbf{A}_1\mathbf{X}_m+\mathbf{X}_m\mathbf{B}_1+\mathbf{A}_2\mathbf{Y}_m+\mathbf{Y}_m\mathbf{B}_2),\tag{20}$$

$$\mathbf{Y}_{m+1}=\mathcal{L}_2(\mathbf{A}_1\mathbf{X}_m+\mathbf{X}_m\mathbf{B}_1+\mathbf{A}_2\mathbf{Y}_m+\mathbf{Y}_m\mathbf{B}_2),\tag{21}$$

$$m=0,1,2,\dots .$$

Соотношения (19)–(21) представляют собой операторную вычислительную схему алгоритма построения решения системы уравнений (14), (15). При этом $\mathbf{X}_0(0)=\mathbf{M},\quad \mathbf{X}_0(\omega)=\mathbf{N}$, поскольку $\mathbf{P}_{\mathbf{UV}}(0)=\mathbf{0},\ \mathbf{P}_{\mathbf{UV}}(\omega)=\mathbf{N}-\mathbf{M}$.

Изучим вопросы сходимости, скорости сходимости рядов (16), (17). Для этого построим для них соответствующие мажорантные ряды с использованием явного выражения для операторов $\mathcal{L}_1,\mathcal{L}_2$:

$$\mathbf{X}_0(t)=\mathbf{M}+\int_0^t\mathbf{U}(\tau)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(\mathbf{N}-\mathbf{M})\mathbf{V}(\tau)d\tau+\int_0^t\mathbf{U}(\varphi)\boldsymbol{\Phi}^{-1}\left(\int_0^\omega\left(\int_\tau^\varphi\mathbf{K}_{\mathbf{U}}(\tau,s)\mathbf{H}_0(s)\mathbf{K}_{\mathbf{V}}(s,\tau)ds\right)d\tau\right)\mathbf{V}(\varphi)d\varphi,$$

$$\mathbf{Y}_0(t)=\mathbf{U}(t)\left(\boldsymbol{\Phi}^{-1}(\mathbf{N}-\mathbf{M})\right)\mathbf{V}(t)+\mathbf{U}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}\left(\int_0^\omega\left(\int_\tau^t\mathbf{K}_{\mathbf{U}}(\tau,s)\mathbf{H}_0(s)\mathbf{K}_{\mathbf{V}}(s,\tau)ds\right)d\tau\right)\mathbf{V}(t),$$

$$\mathbf{X}_{m+1}(t)=\int_0^t\mathbf{U}(\varphi)\boldsymbol{\Phi}^{-1}\left(\int_0^\omega\left(\int_\tau^\varphi\mathbf{K}_{\mathbf{U}}(\tau,s)\mathbf{H}_m(s)\mathbf{K}_{\mathbf{V}}(s,\tau)ds\right)d\tau\right)\mathbf{V}(\varphi)d\varphi,\tag{22}$$

$$\mathbf{Y}_{m+1}(t)=\mathbf{U}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}\left(\int_0^\omega\left(\int_\tau^t\mathbf{K}_{\mathbf{U}}(\tau,s)\mathbf{H}_m(s)\mathbf{K}_{\mathbf{V}}(s,\tau)ds\right)d\tau\right)\mathbf{V}(t),\tag{23}$$

$$m=0,1,2,\dots .$$

Выполним оценки по норме в (22), (23), используя соотношение

$$\|\mathbf{H}_m(s)\|\le(\alpha_1+\beta_1)\|\mathbf{X}_m\|_C+(\alpha_2+\beta_2)\|\mathbf{Y}_m\|_C,\quad s\in[0,\omega].$$

Сначала оценим $\|\mathbf{X}_{m+1}(t)\|$ в (22):

$$\|\mathbf{X}_{m+1}(t)\|\le\int_0^t\left\|\mathbf{U}(\varphi)\boldsymbol{\Phi}^{-1}\left(\int_0^\omega\left(\int_\tau^\varphi\mathbf{K}_{\mathbf{U}}(\tau,s)\mathbf{H}_m(s)\mathbf{K}_{\mathbf{V}}(s,\tau)ds\right)d\tau\right)\mathbf{V}(\varphi)\right\|d\varphi\le$$

$$\le\int_0^t\|\mathbf{U}(\varphi)\|\left\|\boldsymbol{\Phi}^{-1}\left(\int_0^\omega\left(\int_\tau^\varphi\mathbf{K}_{\mathbf{U}}(\tau,s)\mathbf{H}_m(s)\mathbf{K}_{\mathbf{V}}(s,\tau)ds\right)d\tau\right)\right\|\|\mathbf{V}(\varphi)\|d\varphi\le$$

$$\le\lambda_U\lambda_V\int_0^t\left\|\boldsymbol{\Phi}^{-1}\right\|\left\|\int_0^\omega\left(\int_\tau^\varphi\mathbf{K}_{\mathbf{U}}(\tau,s)\mathbf{H}_m(s)\mathbf{K}_{\mathbf{V}}(s,\tau)ds\right)d\tau\right\|d\varphi\le\gamma\lambda_U\lambda_V\int_0^t d\varphi\int_0^\omega\left\|\int_\tau^\varphi\mathbf{K}_{\mathbf{U}}(\tau,s)\mathbf{H}_m(s)\mathbf{K}_{\mathbf{V}}(s,\tau)ds\right\|d\tau\le$$

$$\le\gamma\lambda_U\lambda_V\int_0^t d\varphi\int_0^\omega\left|\int_\tau^\varphi\|\mathbf{K}_{\mathbf{U}}(\tau,s)\mathbf{H}_m(s)\mathbf{K}_{\mathbf{V}}(s,\tau)\|ds\right|d\tau\le\gamma\lambda_U\lambda_V\int_0^t d\varphi\int_0^\omega\left|\int_\tau^\varphi\|\mathbf{K}_{\mathbf{U}}(\tau,s)\|\|\mathbf{H}_m(s)\|\|\mathbf{K}_{\mathbf{V}}(s,\tau)\|ds\right|d\tau\le$$

$$\le\gamma\lambda_U^2\lambda_V^2\int_0^\omega d\varphi\int_0^\omega\left|\int_\tau^\varphi\|\mathbf{H}_m(s)\|ds\right|d\tau\le\gamma\lambda_U^2\lambda_V^2\int_0^\omega d\varphi\int_0^\omega|\varphi-\tau|d\tau\left[(\alpha_1+\beta_1)\|\mathbf{X}_m\|_C+(\alpha_2+\beta_2)\|\mathbf{Y}_m\|_C\right]=$$

$$=\frac{\omega^3}{3}\gamma\lambda_U^2\lambda_V^2\left[(\alpha_1+\beta_1)\|\mathbf{X}_m\|_C+(\alpha_2+\beta_2)\|\mathbf{Y}_m\|_C\right]=a_1\|\mathbf{X}_m\|_C+b_1\|\mathbf{Y}_m\|_C.$$

Отсюда имеем оценку

$$\|\mathbf{X}_{m+1}\|_C\le a_1\|\mathbf{X}_m\|_C+b_1\|\mathbf{Y}_m\|_C,\quad m=0,1,2,\dots .\tag{24}$$

Аналогичные оценки выполним в (23):

$$\left\|\mathbf{Y}_{m+1}(t)\right\| \le \left\|\mathbf{U}(t)\right\| \left\| \mathbf{\Phi}^{-1} \left(\int_0^\omega \left(\int_\tau^t \mathbf{K}_\mathbf{U}(\tau,s)\mathbf{H}_m(s)\mathbf{K}_\mathbf{V}(s,\tau)ds \right) d\tau \right) \right\| \left\|\mathbf{V}(t)\right\| \le$$

$$\le \lambda_U \lambda_V \left\|\mathbf{\Phi}^{-1}\right\| \left(\int_0^\omega \left\| \int_\tau^t \mathbf{K}_\mathbf{U}(\tau,s)\mathbf{H}_m(s)\mathbf{K}_\mathbf{V}(s,\tau)ds \right\| d\tau \right) \le \gamma\lambda_U\lambda_V \int_0^\omega \left| \int_\tau^t \left\|\mathbf{K}_\mathbf{U}(\tau,s)\mathbf{H}_m(s)\mathbf{K}_\mathbf{V}(s,\tau)\right\| ds \right| d\tau \le$$

$$\le \gamma\lambda_U\lambda_V \int_0^\omega \left| \int_\tau^t \left\|\mathbf{K}_\mathbf{U}(\tau,s)\right\| \left\|\mathbf{H}_m(s)\right\| \left\|\mathbf{K}_\mathbf{V}(s,\tau)\right\| ds \right| d\tau \le \gamma\lambda_U^2\lambda_V^2 \int_0^\omega \left| \int_\tau^t \left\|\mathbf{H}_m(s)\right\| ds \right| d\tau \le$$

$$\le \gamma\lambda_U^2\lambda_V^2 \int_0^\omega |\varphi-\tau| d\tau \left[(\alpha_1+\beta_1)\left\|\mathbf{X}_m\right\|_C + (\alpha_2+\beta_2)\left\|\mathbf{Y}_m\right\|_C \right] \le$$

$$\le \frac{\omega^2}{2}\gamma\lambda_U^2\lambda_V^2 \left[(\alpha_1+\beta_1)\left\|\mathbf{X}_m\right\|_C + (\alpha_2+\beta_2)\left\|\mathbf{Y}_m\right\|_C \right] = a_2\left\|\mathbf{X}_m\right\|_C + b_2\left\|\mathbf{Y}_m\right\|_C .$$

Из этой оценки следует оценка

$$\left\|\mathbf{Y}_{m+1}\right\|_C \le a_2\left\|\mathbf{X}_m\right\|_C + b_2\left\|\mathbf{Y}_m\right\|_C, \quad m = 0, 1, 2, \dots . \tag{25}$$

Для удобства дальнейшего анализа полученных оценок запишем соотношения (24), (25) в матричном виде

$$\mathbf{Z}_{m+1} \le \mathbf{K}\mathbf{Z}_m, \quad m = 0, 1, 2, \dots , \tag{26}$$

где

$$\mathbf{Z}_m = \begin{pmatrix} \left\|\mathbf{X}_m\right\|_C \\ \left\|\mathbf{Y}_m\right\|_C \end{pmatrix}, \mathbf{K} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}, \mathbf{Z}_0 = \begin{pmatrix} \left\|\widetilde{\mathbf{P}}_\mathbf{UV}\right\|_c \\ \left\|\widetilde{\mathbf{Q}}_\mathbf{UV}\right\|_c \end{pmatrix}.$$

На основе (26) имеем явную оценку

$$\mathbf{Z}_{m+1} \le \mathbf{K}^{m+1}\mathbf{Z}_0, \quad m = 0, 1, 2, \dots . \tag{27}$$

Далее, выполнив в (16), (17) оценки по норме с использованием (27), получим

$$\mathbf{Z} \le \mathbf{Z}^* \le (\mathbf{E} - \varepsilon\mathbf{K})^{-1}\mathbf{Z}_0, \tag{28}$$

где $\mathbf{Z} = \mathrm{colon}(\left\|\mathbf{X}\right\|_C, \left\|\mathbf{Y}\right\|_C)$, $\mathbf{Z}^* = \mathbf{Z}_0 + \varepsilon\mathbf{Z}_1 + \dots + \varepsilon^m\mathbf{Z}_m + \dots$, при этом матрица $\mathbf{E} - \varepsilon\mathbf{K}$ положительно обратима.

Поскольку матричный ряд, составленный из норм членов рядов (16), (17), сходится, то на основании [12, с. 123, 606; 13, с. 160] эти ряды сходятся равномерно по $t \in [0, \omega]$ в области $|\lambda| < \lambda_0$. Их суммы представляют собой решение интегральной задачи (6), (11). Это решение единственное, поскольку операторы $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ являются сжимающими в смысле [14, с. 94] на основании принадлежности единичному кругу характеристических чисел матрицы $\varepsilon\mathbf{K}$.

Теперь оценим остатки рядов (16), (17), т. е. оценим погрешности приближенных формул

$$\mathbf{X}(t,\lambda) \approx \tilde{\mathbf{X}}_m(t,\lambda) = \mathbf{X}_0(t) + \lambda\mathbf{X}_1(t) + \dots + \lambda^m\mathbf{X}_m(t) ,$$

$$\mathbf{Y}(t,\lambda) \approx \tilde{\mathbf{Y}}_m(t,\lambda) = \mathbf{Y}_0(t) + \lambda\mathbf{Y}_1(t) + \dots + \lambda^m\mathbf{Y}_m(t) .$$

Для этого следует оценить суммы рядов

$$\mathbf{X}(t,\lambda)-\tilde{\mathbf{X}}_m(t,\lambda)=\lambda^{m+1}\mathbf{X}_{m+1}(t)+\lambda^{m+2}\mathbf{X}_{m+2}(t)+\dots, \tag{29}$$

$$\mathbf{Y}(t,\lambda)-\tilde{\mathbf{Y}}_m(t,\lambda)=\lambda^{m+1}\mathbf{Y}_{m+1}(t)+\lambda^{m+2}\mathbf{Y}_{m+2}(t)+\dots\ . \tag{30}$$

Выполнив оценки по норме в (29), (30), получим

$$\left\|\mathbf{X}(t,\lambda)-\tilde{\mathbf{X}}_m(t,\lambda)\right\|\le\varepsilon^{m+1}\left\|\mathbf{X}_{m+1}\right\|_C+\varepsilon^{m+2}\left\|\mathbf{X}_{m+2}\right\|_C+\dots,$$

$$\left\|\mathbf{Y}(t,\lambda)-\tilde{\mathbf{Y}}_m(t,\lambda)\right\|\le\varepsilon^{m+1}\left\|\mathbf{Y}_{m+1}\right\|_C+\varepsilon^{m+2}\left\|\mathbf{Y}_{m+2}\right\|_C+\dots\ .$$

Отсюда имеем, используя (27),

$$\mathbf{R}\le\tilde{\mathbf{R}}_m\le\varepsilon^{m+1}(\mathbf{E}-\varepsilon\mathbf{K})^{-1}\mathbf{K}^{m+1}\mathbf{Z}_0, \tag{31}$$

где $\tilde{\mathbf{R}}_m=\varepsilon^{m+1}\mathbf{Z}_{m+1}+\varepsilon^{m+2}\mathbf{Z}_{m+2}+\dots$, $\mathbf{R}_m=\mathrm{colon}(\|\mathbf{X}-\mathbf{X}_m\|,\|\mathbf{Y}-\mathbf{Y}_m\|)$.

Соотношение (31) дает искомую оценку для $\left\|\mathbf{X}(t,\lambda)-\tilde{\mathbf{X}}_m(t,\lambda)\right\|$, $\left\|\mathbf{Y}(t,\lambda)-\tilde{\mathbf{Y}}_m(t,\lambda)\right\|$.

Резюмируя изложенное, приходим к следующему результату.

Т е о р е м а. *Пусть оператор* $\mathbf{\Phi}$ *однозначно обратим и выполнено условие* $\varepsilon(a_1+b_2)<1$. *Тогда задача* (2)–(5) *однозначно разрешима в области D, ее решение представимо рядами* (16), (17), *члены которых определяются соотношениями* (19)–(21), *при этом справедлива оценка* (31).

З а м е ч а н и е 1. Рассмотрение уравнения более сложной структуры [7–9]

$$\frac{d^2\mathbf{X}(t)}{dt^2}=\sum_{i=1}^{p}\mathbf{A}_i(t)\mathbf{X}(t)\mathbf{B}_i(t)+\sum_{i=1}^{q}\mathbf{A}_i(t)\frac{d\mathbf{X}(t)}{dt}\mathbf{B}_i(t)+\mathbf{F}(t)$$

не вносит принципиальных трудностей в анализ соответствующей краевой задачи с помощью метода [11].

З а м е ч а н и е 2. Анализ условия $\varepsilon(a_1+b_2)<1$ и оценки (28) показывает, что краевая задача для соответствующего однородного уравнения с нулевыми граничными условиями имеет только тривиальное решение.

Рассмотрим случай, когда $\mathbf{A}(t)\equiv 0, \mathbf{B}(t)\equiv 0,$ т. е. задачу

$$\frac{d^2\mathbf{X}(t)}{dt^2}=\lambda\left(\mathbf{A}_1(t)\mathbf{X}(t)+\mathbf{X}(t)\mathbf{B}_1(t)\right)+\lambda\left(\mathbf{A}_2(t)\frac{d\mathbf{X}(t)}{dt}+\frac{d\mathbf{X}(t)}{dt}\mathbf{B}_2(t)\right)+\mathbf{F}(t), \tag{32}$$

$$\mathbf{X}(0,\lambda)=\mathbf{M},\ \mathbf{X}(\omega,\lambda)=\mathbf{N}. \tag{33}$$

В этом случае имеем $\mathbf{U}(t)\equiv\mathbf{E}, \mathbf{V}(t)\equiv\mathbf{E},$ $\mathbf{\Phi}\mathbf{Z}(t)=\omega\mathbf{Z}(t), \mathbf{\Phi}^{-1}\mathbf{Z}(t)=\dfrac{1}{\omega}\mathbf{Z}(t).$ Тогда уравнения (12), (13) примут вид

$$\mathbf{X}(t,\lambda)=\mathbf{M}+\frac{t}{\omega}(\mathbf{N}-\mathbf{M})+\frac{1}{\omega}\int_0^t d\varphi\int_0^\omega d\tau\int_\tau^\varphi\mathbf{H}(s,\lambda)ds=\mathbf{M}+\frac{t}{\omega}(\mathbf{N}-\mathbf{M})-\frac{t}{\omega}\int_0^\omega d\tau\int_0^\tau\mathbf{H}(s,\lambda)ds+\int_0^t d\tau\int_0^\tau\mathbf{H}(s,\lambda)ds=$$

$$=\mathbf{M}+\frac{t}{\omega}(\mathbf{N}-\mathbf{M})-\frac{t}{\omega}\int_0^\omega(\omega-\tau)\mathbf{H}(\tau,\lambda)d\tau+\int_0^t(t-\tau)H(\tau,\lambda)d\tau=\mathbf{M}+\frac{t}{\omega}(\mathbf{N}-\mathbf{M})+\int_0^t\tau(\frac{t}{\omega}-1)\mathbf{H}(\tau,\lambda)d\tau+$$

$$+\int_t^\omega t\left(\frac{\tau}{\omega}-1\right)\mathbf{H}(\tau,\lambda)d\tau\equiv\mathbf{M}+\frac{t}{\omega}(\mathbf{N}-\mathbf{M})+\int_0^\omega G(t,\tau)\mathbf{H}(\tau,\lambda)d\tau, \tag{34}$$

$$\mathbf{Y}(t,\lambda)=\frac{1}{\omega}(\mathbf{N}-\mathbf{M})+\frac{1}{\omega}\int_0^\omega d\tau\int_\tau^t\mathbf{H}(s,\lambda)ds=\frac{1}{\omega}(\mathbf{N}-\mathbf{M})-\frac{1}{\omega}\int_0^\omega d\tau\int_0^\tau\mathbf{H}(s,\lambda)ds+\int_0^t\mathbf{H}(\tau,\lambda)d\tau=\frac{1}{\omega}(\mathbf{N}-\mathbf{M})+$$

$$+\int_0^t\frac{\tau}{\omega}\mathbf{H}(\tau,\lambda)d\tau+\int_t^\omega\left(\frac{\tau}{\omega}-1\right)\mathbf{H}(\tau,\lambda)d\tau\equiv\frac{1}{\omega}(\mathbf{N}-\mathbf{M})+\int_0^\omega G_t'(t,\tau)\mathbf{H}(\tau,\lambda)d\tau. \tag{35}$$

В уравнениях (34), (35) использована известная функция Грина $G(t,\tau)$ и ее производная $G'_t(t,\tau)$ [2, с. 496]:

$$G(t,\tau)=\begin{cases}\tau\left(\dfrac{t}{\omega}-1\right), & 0\le\tau\le t\le\omega,\\ t\left(\dfrac{\tau}{\omega}-1\right), & 0\le t\le\tau\le\omega;\end{cases}\qquad G'_t(t,\tau)=\begin{cases}\dfrac{\tau}{\omega}, & 0\le\tau\le t\le\omega,\\ \dfrac{\tau}{\omega}-1, & 0\le t<\tau\le\omega.\end{cases}$$

Алгоритм построения решения задачи (32), (33) примет вид

$$\mathbf{X}_0(t)=\mathbf{M}+\frac{t}{\omega}(\mathbf{N}-\mathbf{M})+\int_0^\omega G(t,\tau)\mathbf{H}_0(\tau,\lambda)d\tau,\quad \mathbf{Y}_0(t)=\frac{1}{\omega}(\mathbf{N}-\mathbf{M})+\int_0^\omega G'_t(t,\tau)\mathbf{H}_0(\tau,\lambda)d\tau,$$

$$\mathbf{X}_{m+1}(t)=\int_0^\omega G(t,\tau)\mathbf{H}_m(\tau,\lambda)d\tau,\ \mathbf{Y}_{m+1}(t)=\int_0^\omega G'_t(t,\tau)\mathbf{H}_m(\tau,\lambda)d\tau,\ m=0,1,2,\dots.$$

3. Иллюстрация применения результатов. Пример 1. Рассмотрим задачу об определении распределения температуры в круговой цилиндрической оболочке (стенке), имеющей достаточно большую длину, чтобы теплоотводом с торцов можно было пренебречь, при этом граничные условия не зависят от полярного угла φ и продольной координаты z (см., напр., [3, с. 36]). Поле температур в стационарном случае изменяется только по радиусу r. Изучим температурное поле в цилиндрической стенке с постоянно действующим внутренним источником теплоты в случае, когда его удельная мощность – линейная функция температуры вида $q_v=w_0(1+bT)$.

Соответствующая краевая задача для уравнения теплопроводности в цилиндрической системе координат имеет вид [4, с. 29]:

$$\frac{d^2T}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dT}{dr}+\frac{w_0}{\lambda_0}(1+bT)=0;\quad T(r_1)=\tilde{T}_1,\quad T(r_2)=\tilde{T}_2,\quad 0<r_1<r_2, \tag{36}$$

где w_0 – удельная мощность постоянно действующего внутреннего источника теплоты при $t=0$ °C; b – экспериментальная постоянная, λ_0 – коэффициент теплопроводности, r_1 и r_2 – внутренний и внешний радиусы стенки.

Наряду с (36) будем рассматривать задачу с параметром λ:

$$\frac{d^2T}{dr^2}+\lambda\left(\frac{1}{r}\frac{dT}{dr}+\frac{w_0b}{\lambda_0}T\right)+\frac{w_0}{\lambda_0}=0;\quad T(r_1,\lambda)=\tilde{T}_1,\quad T(r_2,\lambda)=\tilde{T}_2,\quad 0<r_1<r_2, \tag{37}$$

для которой по изложенной методике изучим случай охлаждения цилиндрической стенки, описываемый (36).

При получении выражений для конкретных вычислений возьмем следующие исходные данные в системе СИ:

$$\lambda_0=45{,}4,\quad w_0=1000,\quad b=0{,}1,\quad r_1=1,\quad r_2=1{,}1,\quad \tilde{T}_1=100,\quad \tilde{T}_2=10, \tag{38}$$

которые соответствуют реальной практической ситуации.

Имеем задачу Валле – Пуссена, при этом

$$F(t)=w_0/\lambda_0,\ A(t)=0,\ B(t)=0,\ A_1(t)=w_0b/\lambda_0,\ A_2(t)=1/r,\ B_i(t)=0\ (i=1,2),\ M=0,\ N=2,\ \omega=r_2-r_1=0{,}1,$$

$$\alpha=0,\ \beta=0,\ \alpha_1=w_0b/\lambda_0,\ \beta_1=0,\ \alpha_2=1,\ \beta_2=0,\ \lambda_U=1,\ \lambda_V=1,\ \gamma=1/0{,}1=10,\ \varepsilon=1,$$

$$a_1=0{,}00734,\ b_1=0{,}00333,\ a_2=0{,}11,\ b_2=0{,}05.$$

Решение задачи (37) будем искать с помощью описанного выше алгоритма. Имеем

$$T(r,\lambda)=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^kT_k(r),\quad Y(r,\lambda)=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^kY_k(r), \tag{39}$$

где

$$T_0(r) = \tilde{T}_1 + \int_{r_1}^{r} Y_0(s)ds, \quad Y_0(r) = -\frac{w_0}{\lambda_0}\int_{r_1}^{r_2} \varphi(r,s)ds + \frac{\tilde{T}_2 - \tilde{T}_1}{r_2 - r_1},$$

$$T_{k+1}(r) = \int_{r_1}^{r} Y_{k+1}(s)ds, \quad Y_{k+1}(r) = -\int_{r_1}^{r_2} \varphi(r,s)\left(\frac{w_0 b}{\lambda_0} T_k(s) + \frac{1}{s} Y_k(s)\right)ds,$$

$$\varphi(r,s) = \begin{cases} \dfrac{s - r_1}{r_2 - r_1}, & r_1 \le s \le r \le r_2, \\ \dfrac{s - r_2}{r_2 - r_1}, & r_1 \le r < s \le r_2. \end{cases}$$

Очевидно, полученное решение задачи (37) при $\lambda = 1$ дает решение задачи (36). Для задачи (37) при исходных данных (38) и $\lambda = 1$ получим

$$Y_0(r) = -\frac{w_0}{\lambda_0}\int_{r_1}^{r_2} \varphi(r,s)ds + \frac{\tilde{T}_2 - \tilde{T}_1}{r_2 - r_1} = -21{,}097046r - 877{,}848101,$$

$$T_0(r) = \tilde{T}_1 + \int_{r_1}^{r} Y_0(s)ds = -10{,}548523r^2 - 877{,}848101r + 988{,}396624,$$

$$Y_1(r) = -\int_{r_1}^{r_2} \varphi(r,s)\left(\frac{w_0 b}{\lambda_0} T_0(s) + \frac{1}{s} Y_0(s)\right)ds = 7{,}418089r^3 + 926{,}000107r^2 -$$
$$-2064{,}127900r + 877{,}848101 \cdot \ln r + 1094{,}542309,$$

$$T_1(r) = \int_{r_1}^{r} Y_1(s)ds = 1{,}854522r^4 + 308{,}666702r^3 - 1032{,}063950r^2 +$$
$$+877{,}848101r \cdot \ln r + 216{,}694208r + 504{,}848517.$$

Найдем приближенные решения задачи (36) на основе первых двух слагаемых в (39):

$$T(r) \approx \widetilde{T_1}(r) = T_0(r) + T_1(r) = 1{,}854224r^4 + 308{,}666702r^3 - 1042{,}612473r^2 -$$
$$-661{,}153893r + 877{,}848101r\ln r + 1493{,}245142. \tag{40}$$

Сравним полученное приближенное решение (40) с точным решением задачи (36) [4, с. 29]:

$$T(r) = c_1 J_0\left(r\sqrt{w_0 b/\lambda_0}\right) + c_2 Z_0\left(r\sqrt{w_0 b/\lambda_0}\right) - 1/b, \tag{41}$$

где J_0, Z_0, – функции Бесселя I и II родов нулевого порядка.

Расчет максимальных относительных погрешностей в узлах $r_i = 1 + 0{,}1i$ $(i = 0,1,2,...,10)$ дал следующий результат:

$$\sigma_1 = \max_i \left|\frac{T(r_i) - \widetilde{T_1}(r_i)}{T(r_i)}\right| \cdot 100\ \% = 0{,}018\ \%,$$

при этом оценка абсолютной погрешности приближенного и точного решений характеризуется неравенством $\max\limits_{r_1 \le r \le r_2}\left|T(r) - \widetilde{T_1}(r)\right| \le 0{,}00703$. Теоретическая оценка погрешности, т. е. оценка, полученная на основе соотношения (31), имеет вид $\max\limits_{r_1 \le r \le r_2}\left|T(r) - \widetilde{T}_1(r)\right| \le 0{,}223$. Как видим, она сильно отличается от численной ввиду очевидной грубости промежуточных оценок, выполненных для общего случая.

П р и м е р 2. Далее рассмотрим матричное уравнение

$$\frac{d^2\mathbf{X}(t)}{dt^2} = \lambda\mathbf{A}_1(t)\mathbf{X}(t) + \lambda\mathbf{X}(t)\mathbf{B}_1(t) + \mathbf{F}(t), \tag{42}$$

с граничными условиями

$$\mathbf{M} = \mathbf{X}(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{N} = \mathbf{X}(\omega) = \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 1 & 1-\omega \end{pmatrix}, \tag{43}$$

при этом

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} 0 & t \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \mathbf{B}_2 = 0, \quad \mathbf{F} = -\begin{pmatrix} t & t \\ 1 & t \end{pmatrix}, \quad \omega = 0{,}1, \quad \lambda = 1.$$

Прежде всего заметим, что данная задача имеет точное решение

$$\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 1 & 1-t \end{pmatrix}. \tag{44}$$

Для построения приближенных решений задачи (42), (43) воспользуемся алгоритмом (19)–(21) при $k = 1$. Применительно к задаче (42), (43) имеем условие однозначной разрешимости задачи

$$q = \frac{2\omega(2\omega+3)}{3}\sqrt{\omega^2+1} < 1;$$

здесь принята евклидова норма матриц.

Выполнив соответствующие вычисления, получим последовательно

$$\mathbf{Y}_0(t) = \begin{pmatrix} -\frac{t^2}{2}+\frac{\omega^2}{6}+1 & -\frac{t^2}{2}+\frac{\omega^2}{6} \\ -\mathrm{t}+\frac{\omega}{2} & -\frac{t^2}{2}+\frac{\omega^2}{6}-1 \end{pmatrix}, \; \mathbf{X}_0(t) = \begin{pmatrix} -\frac{t^3}{6}+\frac{(\omega^2+6)t}{6} & -\frac{t^3}{6}+\frac{\omega^2 t}{6} \\ -\frac{t^2}{2}+\frac{\omega t}{2}+1 & -\frac{t^3}{6}+\frac{(\omega^2-6)t}{6}+1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{Y}_1(t) = \begin{pmatrix} (y_{11}(t))_1 & (y_{12}(t))_1 \\ (y_{21}(t))_1 & (y_{22}(t))_1 \end{pmatrix},$$

где

$$(y_{11}(t))_1 = -\frac{t^4}{6}+\frac{\omega t^3}{6}+\frac{(\omega^2+6)t^2}{12}-\frac{13\omega^4+60\omega^2}{360}, \; (y_{12}(t))_1 = -\frac{t^5}{15}+\frac{\omega^2 t^3}{9}+\frac{t^2}{2}-\frac{\omega^5+10\omega^2}{60},$$

$$(y_{21}(t))_1 = -\frac{5t^4}{24}+\frac{\omega t^3}{6}+\frac{(\omega^2+3)t^2}{6}+t-\frac{\omega^4+3\omega^2+9\omega}{18},$$

$$(y_{22}(t))_1 = -\frac{t^5}{30}-\frac{t^4}{6}+\frac{(\omega^2+3\omega-6)t^3}{18}+\frac{(\omega^2+12)t^2}{12}-\frac{3\omega^5+13\omega^4-30\omega^3+120\omega^2}{360},$$

$$\mathbf{X}_1(t) = \int_0^t \mathbf{Y}_1(\tau)d\tau = \begin{pmatrix} (x_{11}(t))_1 & (x_{12}(t))_1 \\ (x_{21}(t))_1 & (x_{22}(t))_1 \end{pmatrix},$$

где

$$(x_{11}(t))_1 = -\frac{t^5}{30}+\frac{\omega t^4}{24}+\frac{(\omega^2+6)t^3}{36}-\frac{(13\omega^4+60\omega^2)t}{360}, \; (x_{12}(t))_1 = -\frac{t^6}{90}+\frac{\omega^2 t^4}{36}+\frac{t^3}{6}-\frac{(\omega^5+10\omega^2)t}{60},$$

$$(x_{21}(t))_1 = -\frac{t^5}{24}+\frac{\omega t^4}{24}+\frac{(\omega^2+3)t^3}{18}+\frac{t^2}{2}-\frac{(\omega^4+3\omega^2+9\omega)t}{18},$$

$$(x_{22}(t))_1 = -\frac{t^6}{180}-\frac{t^5}{30}+\frac{(\omega^2+3\omega-6)t^4}{72}+\frac{(\omega^2+12)t^3}{36}-\frac{(3\omega^5+13\omega^4-30\omega^3+120\omega^2)t}{360}.$$

Теоретическая оценка погрешности этого приближения характеризуется неравенством

$$\left\|\mathbf{X}(t)-\widetilde{\mathbf{X}_1}(t,1)\right\| \leq 0{,}0001.$$

Погрешность, вычисленная на основе сравнений точного $\mathbf{X}(t)$ и приближенного $\widetilde{\mathbf{X}_1}(t,1)$ решений, имеет вид

$$\left\|\mathbf{X}(t)-\widetilde{\mathbf{X}_1}(t,1)\right\| \leq 0{,}000088.$$

Выводы. Предложен способ редукции рассмотренной задачи к эквивалентной системе интегральных уравнений, устанавливающий связь используемого подхода с методом функций Грина; изучена однозначная разрешимость, получена оценка области локализации и алгоритм построения решения залачи. Дана иллюстрация применения полученных результатов.

Список использованных источников

1. Сансоне, Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Дж. Сансоне. – М.: Иностр. лит., 1953. – Т. 1. – 348 с.

2. Хартман, Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Ф. Хартман. – М.: Мир, 1970. – 720 с.

3. Основы теплопередачи в авиационной и ракетно-космической технике / В. С. Авдуевский [и др.]. – М.: Машиностроение, 1975. – 624 с.

4. Теория тепломассообмена / С. И. Исаев [и др.]; под ред. А. И. Леонтьева. – М.: Высш. шк., 1979. – 495 с.

5. Murty, K. N. Two (multi) point nonlinear Lyapunov systems associated with annth order nonlinear system of differential equations – existence and uniqueness / K. N. Murty, G. W. Howell, G. V. R. L. Sarma // Math. Probl. in Engineering. – 2000. – Vol. 6, № 4. – P. 395–410. https://doi.org/10.1155/s1024123x00001393

6. Murty, K. N. Two (multi) point nonlinear Lyapunov systems – Existence and uniqueness / K. N Murty, G. W. Howell, S. Sivasundaram // J. Math. Analysis and Applications. – 1992. – Vol. 167, № 2. – P. 505–515. https://doi.org/10.1016/0022-247x(92)90221-x

7. Деревенский, В. П. Матричные двусторонние линейные дифференциальные уравнения / В. П. Деревенский // Мат. заметки. – 1994. – Т. 55, вып. 1. – С. 35–42.

8. Деревенский, В. П. Матричные линейные дифференциальные уравнения высших порядков / В. П. Деревенский // Дифференц. уравнения. – 1993. – Т. 29, № 4. – С. 711–714.

9. Деревенский, В. П. Матричные линейные дифференциальные уравнения второго порядка / В. П. Деревенский // Дифференц. уравнения – 1995. – Т. 31, № 11 – С. 1926–1927.

10. Лаптинский, В. Н. Конструктивный анализ краевой задачи Валле – Пуссена для линейного матричного уравнения Ляпунова второго порядка. Ч. 1 / В. Н. Лаптинский, А. И. Кашпар. – Могилев: Белорус.-Рос. ун-т, 2015. – 48 с. – (Препринт / Ин-т технол. металлов НАН Беларуси; № 35).

11. Лаптинский, В. Н. Конструктивный анализ управляемых колебательных систем / В. Н. Лаптинский. – Минск: И-нт математики НАН Беларуси, 1998. – 300 с.

12. Канторович, Л. В. Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. – М.: Наука, 1977. – 744 с.

13. Рисс, Ф. Лекции по функциональному анализу / Ф. Рисс, Б. Секефальви-Надь. – М.: Иностр. лит., 1954. – 500 с.

14. Приближенное решение операторных уравнений / М. А. Красносельский [и др.]. – М.: Наука, 1969. – 456 с.

References

1. Sansone G. *Equazioni differeziali nel campo reale* [Ordinary Differential Equations]. Bologna, N. Zanichelli, 1948. 875 p. (in Italiano).

2. Hartman F. *Ordinary Differential Equations*. NY, John Wiley & Sons, 1964. 624 p. https://doi.org/10.1137/1.9780898719222

3. Avduevskii V. S., Galitseiskii B. M., Glebov G. A., Danilov Iu. I., Dreitser G. A., Kalinin E. K., Koshkin V. K., Mikhailov T. V., Molchanov A. M., Ryzhov Iu. A., Solntsev V. P. *Fundamentals of Heat Transfer in Aviation and Rocket and Space Technology*. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1970. 624 p. (in Russian).

4. Isaev S. I., Kozhinov I. A., Kofanov V. I., Leont'ev A. I., Mironov B. M., Nikitin V. M., Petrazhitskii G. B., Khvostov V. I., Chukaev A. G., Shishov E. V., Shkola V. V. *Theory of Heat and Mass Transfer*. Moscow, Vysshaia Shkola Publ., 1979. 495 p. (in Russian).

5. Murty K. N., Howell G. W., Sarma G. V. R. L. Two (multi) point nonlinear Lyapunov systems associated with an nth order nonlinear system of differential equations – existence and uniqueness. *Mathematical Problems in Engineering*, 2000, vol. 6, no. 4, pp. 395–410. https://doi.org/10.1155/s1024123x00001393

6. Murty K. N., Howell G. W., Sivasundaram S. Two (multi) point nonlinear Lyapunov systems – Existence and uniqueness. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1992, vol. 167, no. 2, pp. 505–515. https://doi.org/10.1016/0022-247x(92)90221-x

7. Derevenskii V. P. Matrix two-sided linear differential equations. *Mathematical Notes*, 1994, vol. 55, no. 1. pp. 24-29. https://doi.org/10.1007/bf02110760

8. Derevenskii V. P. Matrix linear differential equations of higher orders. *Differentsial'nye uravneniia = Differential equations*, 1993, vol. 29, no. 4, pp. 711–714 (in Russian).

9. Derevenskii V. P. Matrix linear differential equations of the second order. *Differentsial'nye uravneniia = Differential equations,* 1995, vol. 31, no. 11, pp. 1926–1927 (in Russian).

10. Laptinskii V. N., Kashpar A. I. *Constructive analysis of boundary value problem de la Vallee Poussin for linear matrix equation Lyapunov second order. Preprint, Part I.* Mogilev, Belarusian-Russian University Publ., 2015. 48 p. (in Russian).

11. Laptinskii V. N. *Constructive Analysis of Controlled Oscillatory Systems*. Minsk, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus Publ., 1998. 300 p. (in Russian).

12. Kantorovich L. V., Akilov G. P. *Functional Analysis.* Moscow, Nauka Publ., 1977. 744 p. (in Russian).

13. Riess F., Sz.-Nad B. *Leçons D'nalyse Fonctionnelle.* Budapest, Akadémia Kiadó, 1972.

14. Krasnosel'skii M. A., Vainikko G. M., Zabreiko P. P., Rutitskii Ia. B., Stetsenko V. Ia. *Approximate Solution of Operator Equations*. Moscow, Nauka Publ., 1969. 456 p. (in Russian).

Информация об авторах

Кашпар Александр Иванович – помощник ректора, Белорусско-Российский университет (пр. Мира, 43, 212000, г. Могилев, Республика Беларусь). E-mail: alex.kashpar@tut.by

Лаптинский Валерий Николаевич – доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, Институт технологии металлов Национальной академии наук Беларуси (ул. Бялыницкого-Бирули, 11, 212030, г. Могилев, Республика Беларусь). E-mail: lavani@tut.by

Information about the authors

Alexandr I. Kashpar – Assistant Rector, Belarusian – Russian University (43, Mira Ave., 212000, Mogilev, Republic of Belarus). E-mail: alex.kashpar@tut.by

Valery N. Laptinskiy – Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Chief Researcher, Institute of Technology of Metals of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Byalynitskii-Birulya Str., 212030, Mogilev, Republic of Belarus). E-mail: lavani@tut.by