

УДК 004.932
МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОЛЕЙ КОНЦЕНТРАЦИИ ЭЛЕКТРОНОВ В
ИОНОСФЕРЕ НА ОСНОВЕ МНОГОМЕРНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ
КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

А. О. НАУМОВ, В. М. АРТЕМЬЕВ, Л. Л. КОХАН
ГНУ «ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ ФИЗИКИ НАН Беларуси»
Минск, Беларусь

Изучение структуры поля концентрации свободных электронов в ионосфере имеет важное значение для организации наземной и спутниковой радиосвязи, радиолокации, радиоастрономии, прогнозирования природных явлений, экологического мониторинга земной поверхности. Одним из наиболее эффективных средств исследования распределения концентрации электронов в ионосфере является радиотомография [1, 2]. Такая техника позволяет с помощью спутниковых средств проводить радиозондирование ионосферы в широком диапазоне различных положений приемных и передающих систем и применять томографические методы для реконструкции структуры исследуемого поля. В Институте прикладной физики в рамках программы Союзного государства «Мониторинг-СГ» ведутся работы по созданию методов, алгоритмов и программного обеспечения для реконструкции поля концентрации электронов в ионосфере по данным высокоорбитальных навигационных спутников систем GPS/ ГЛОНАСС.

Доклад посвящен первому этапу этой работы, заключающемуся в моделировании полей концентрации электронов в ионосфере. Поскольку поля имеют сложную структуру, случайную в пространстве и времени, то за основу принят статистический подход на основе многомерных стохастических конечно-разностных уравнений марковского типа [3, 4]. Специфика решения задачи моделирования состоит в необходимости учета таких факторов как высокая размерность и изменение во времени поля концентрации электронов.

Линейная модель

Когда в качестве априорных данных выступают лишь математическое ожидание и ковариационная матрица изображения, то линейная модель с гауссовым законом распределения вероятностей яркостей адекватна этому объему информации. Это допустимо, когда среднеквадратическое значение флюктуаций поля в несколько раз меньше его математического ожидания. Тогда динамическое случайное поле можно описать системой линейных стохастических конечно-разностных уравнений (СКРУ):

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{u}_k + \mathbf{w}_k, \quad (1)$$

где: k – дискретное время; \mathbf{x}_k – значение поля; матрица \mathbf{A}_k определяет ковариационные и корреляционные характеристики поля; \mathbf{u}_k – регулярная со-

ставляющая, определяющая математическое ожидание; w_k – формирующий белый шум с ковариационной матрицей Q_k .

Математическое ожидание модели (1) описывается разностным уравнением: $m_{k+1} = A_k m_k + u_k$ с начальным условием m_0 при $k=0$. Уравнение для корреляционной матрицы изображения имеет вид: $\Phi_{k+1+l, k+1} = A_{k+l, k+1} (A_k P_k A_k^T + Q_k)$. При $l=0$ матрица $\Phi_{k+1, k+1}$ равна ковариационной матрице изображения P_{k+1} с уравнением $P_{k+1} = A_k P_k A_k^T + Q_k$ и начальным условием P_0 . Диагональные элементы матрицы $\Phi_{k+l, k}$, как функции l , являются автокорреляционными функциями каждого из элементов изображения.

Нелинейная модель

В случае, когда закон распределения яркостей отличен от гауссова, необходимо использовать нелинейные модели. Нелинейный характер задачи существенно усложняет методы ее решения. Наиболее общий путь построения нелинейной модели заключается в использовании случайной марковской последовательности с нелинейным векторным стохастическим конечно-разностным уравнением (СКРУ). Теория марковских процессов разработана в общем виде, в том числе и для нелинейных задач [3, 4], однако практические методы их решения существенно сложнее линейных и, как правило, являются приближенными.

Рассмотрим нелинейную модель изображения, описываемую СКРУ

$$x_{k+1} = a_k(x_k) + u_k + w_k, \quad (2)$$

где $a_k(x_k)$ – векторная функция, нелинейно зависящая от фазовых координат (яркостей) изображения x_k .

Уравнения для математического ожидания и ковариационной матрицы модели (2) имеют вид

$$m_{k+1} = \langle a_k(x_k) \rangle + u_k, \quad P_{k+1} = \langle a_k(x_k) \cdot a_k^T(x_k) \rangle - m_k \cdot m_k^T + Q_k,$$

где $\langle a_k(x_k) \rangle = \int a_k(x_k) p(x_k) dx_k$ есть математическое ожидание векторной нелинейной функции $a_k(x_k)$, а $\langle a_k(x_k) \cdot a_k^T(x_k) \rangle = \int a_k(x_k) \cdot a_k^T(x_k) p(x_k) dx_k$.

Эти уравнения решаются с начальными условиями

$$m_0 = \int x_0 p_0(x_0) dx_0, \quad P_0 = \int (x_0 - m_0)(x_0 - m_0)^T p_0(x_0) dx_0.$$

Линейно-нелинейная модель

Предлагается более сложный вариант моделирования случайного динамического изображения путем нелинейного функционального преобразования порождающего гауссова изображения. В результате модель оказывается состоящей из двух частей – линейного блока формирования порождающего гауссова изображения и блока нелинейного функционального преобразования. Такую модель называется линейно-нелинейной.

Блок формирования описывается линейным СКРУ (1). В нелинейном блоке вектор \mathbf{x}_k подвергается нелинейному функциональному преобразованию в соответствии с формулой $\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k)$, где $\mathbf{f}(\mathbf{x}_k)$ есть векторная функция размерности S . Таким образом, линейно-нелинейная модель динамического изображения задается системой уравнений

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{u}_k + \mathbf{w}_k, \mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k). \quad (3)$$

Размерность этой системы вдвое превышает размерность моделируемого изображения \mathbf{y}_{k+1} , т. е. равна $2S$. Выбором нелинейной функции $\mathbf{f}(\mathbf{x}_k)$ можно добиться желаемого закона распределения яркости. При нелинейных функциональных преобразованиях свойства марковости процесса \mathbf{y}_{k+1} не нарушаются, поэтому линейно-нелинейная модель также является марковской.

Рассмотрена задача моделирования полей концентрации электронов в ионосфере на основе многомерных линейных и нелинейных стохастических конечно-разностных уравнений марковского типа. Приведены общие соотношения для нахождения математических ожиданий и ковариационных характеристик изображений. Предложен вариант нелинейной модели, состоящий из последовательного соединения линейного гауссова порождающего изображения и его нелинейного функционального преобразования. Результаты моделирования показали, что предложенные модели с достаточной точностью аппроксимируют поля концентрации электронов в ионосфере и могут служить основой для разработки алгоритмов радиотомографии ионосферы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Куницын, В. Е.** Томография ионосферы / В. Е. Куницын, Е. Д. Терещенко. – М. : Наука, 1991.
2. **Austen, J. R.** Ionospheric imaging using computerized tomography / J. R. Austen, S. J. Franke, C. H. Liu // Radio Sci. – 1988. – № 23. –Р. 299–307.
3. **Стратонович, Р. Л.** Условные марковские процессы и их применение к теории оптимального управления / Р. Л. Стратонович. – М. : МГУ, 1966.
4. **Ярлыков, М. С.** Марковская теория оценивания случайных процессов / М. С. Ярлыков, М. А. Миронов. – М. : Радио и связь, 1993.