

УДК 621.83.06

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОФИЛЯ РАБОЧЕЙ ПОВЕРХНОСТИ КУЛАЧКА ПЛАНЕТАРНОЙ ШАРИКОВОЙ ПЕРЕДАЧИ

М. Е. ЛУСТЕНКОВ, И. И. МАКОВЕЦКИЙ

*Государственное учреждение высшего профессионального
образования «Белорусско-Российский университет»,
г. Могилев*

Введение

Планетарные передачи с телами качения [1] обладают рядом преимуществ по сравнению с традиционными планетарными зубчатыми передачами: малыми габаритами в радиальном направлении, высокими значениями коэффициента перекрытия. Модель планетарной шариковой передачи (ПШП) представляет собой пересечение в пространстве двух кривых (синусоид) с амплитудой A , замкнутых на цилиндре с радиусом R образующей окружности. Одна синусоида однопериодная ($Z_1 = 1$), другая – с числом периодов Z_3 . Математическое описание модели представляет собой систему двух уравнений синусоид (1) и (2), развернутых на плоскость, средние линии которых совпадают:

$$z_1(x) = A \sin\left(\frac{Z_1 x}{R} - \Delta x\right); \quad (1)$$

$$z_3(x) = A \sin\left(\frac{Z_3 x}{R}\right), \quad (2)$$

где x – параметр (дуговая координата), изменяемый от 0 до $2\pi R$; Δx – приращение дуговой координаты, в начальный момент времени равно нулю.

Однопериодная синусоида, при движении вдоль оси абсцисс на плоской развертке, вынуждает перемещаться в ту же сторону группу точек пересечения, причем расстояние между этими точками остается неизменным. Это доказывается решением системы уравнений (1) и (2), справедливом при любом Δx :

$$x = \frac{\pi R(2N + P)}{Z_1 - Z_3 + 2Z_3 P}, \quad (3)$$

где N и P – переменные, означающие ряд натуральных чисел.

Наличие двух независимых переменных в формуле (3) означает наличие двух групп корней, т. е. двух групп точек пересечения синусоид. Первая группа на отрезке $\{0; 2\pi R\}$ образуется при взаимодействии разноименных ветвей синусоид: восходящих и нисходящих, вторая группа – при взаимодействии одноименных ветвей синусоид на том же отрезке. Численные значения корней системы (1), (2) получим, приняв $P = 0$ и изменяя N от 0 до $t = Z_3 - Z_1$ для второй группы точек и приняв $P = 1$, при этом изменяя N от 0 до $t = Z_3 + Z_1$ – для первой группы точек пересечения кривых.

Механическая передача (для точек первой группы) реализуется следующим образом: внутренний кулачок с эллипсообразной (плоская развертка эллипса представ-

ляет собой однопериодную синусоиду) беговой дорожкой, вращаясь, вынуждает тела качения перемещаться по этой беговой дорожке, и, одновременно, по рабочей поверхности неподвижного (соединенного с корпусом) наружного кулачка, профиль которого представляет собой сочетание выступов и впадин, т. е. имитирует многопериодную синусоиду. Центры тел качения совпадают с точками пересечения кривых. Результирующее редуцированное вращение снимается валом с пазами, расположенными на внутренней цилиндрической поверхности с постоянным и равным угловым шагом. Основные детали передачи показаны на рис. 1.

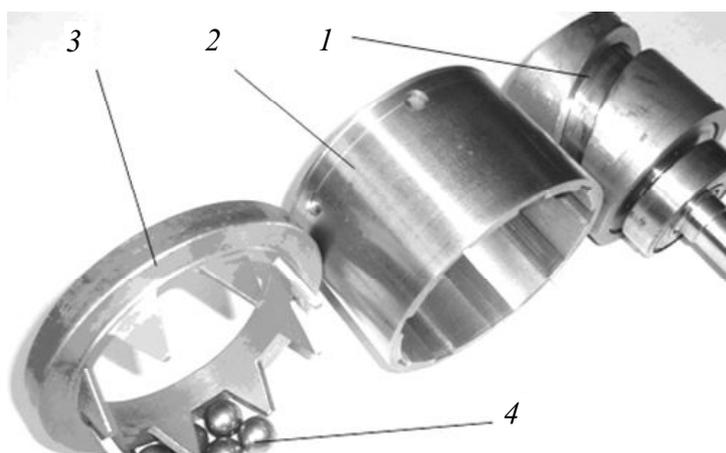


Рис. 1. Основные детали планетарной шариковой передачи:
1 – составной внутренний кулачок; 2 – вал с пазами; 3 – наружный кулачок;
4 – тела качения

Дополнительным преимуществом передачи является технологичность ее деталей и возможность их изготовления на универсальном оборудовании (станках токарной и фрезерной группы) стандартным режущим инструментом. Сложности могут возникнуть лишь при изготовлении профиля рабочей поверхности наружного кулачка, который представляет собой чередование выступов и впадин. В работе [2] была предпринята попытка заменить сложный профиль графическими примитивами (трапеция – на рис. 1, окружность), однако практика показала, что при этом снижается кинематическая точность и возрастает шум при работе передачи.

Целью данной работы является получение математических зависимостей, позволяющих определить координаты профиля, удовлетворяющего условию высокой кинематической точности ПШП. Вывод параметрических уравнений необходим для последующих исследований кинематики и динамики передачи, так как массив координат, полученный в работе [3] с помощью пошагового алгоритма, анализировать в дальнейшем затруднительно.

Вывод параметрических уравнений профиля

Очевидно, что необходимый профиль рабочих поверхностей должен обеспечивать непрерывность контакта тел качения и рабочих поверхностей деталей передачи. Такой профиль будет образован следом окружности, центр которой перемещается по синусоиде с числом периодов Z_3 (назовем ее «центральной» синусоидой).

Рассмотрим однопериодную синусоиду с единичной амплитудой, по которой перемещается центр окружности с радиусом $r_{ш}$ (рис. 2) в системе координат XOZ .

Искомый профиль при движении центра окружности по центральной синусоиде будет образован перемещением конца отрезка (длиной $r_{ш}$) нормали n восстановленной к касательной τ - τ к синусоиде.

$$\left. \begin{aligned} z - \sin x_0 &= -\frac{1}{\cos x_0}(x - x_0); \\ (x - x_0)^2 + (z - \sin x_0)^2 &= r_{ш}^2. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

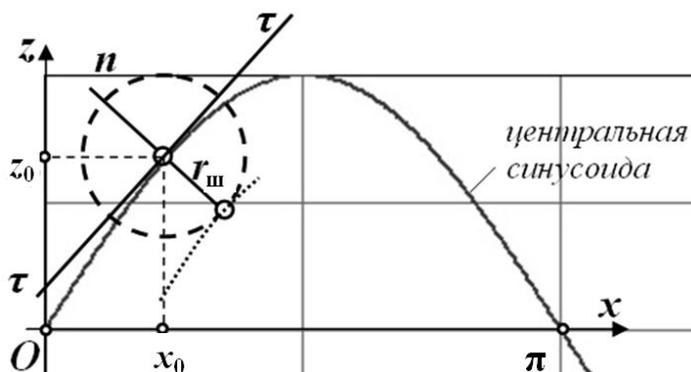


Рис. 2. Однопериодная синусоида с единичной амплитудой (к выводу уравнений профиля кулачка)

Второе уравнение системы (4) можно преобразовать с учетом значения левой части первого уравнения:

$$(x - x_0)^2 + \left(-\frac{1}{\cos x_0}(x - x_0) \right)^2 = r_{ш}^2. \quad (5)$$

После дальнейшего преобразования выражения (5), была получена зависимость $x(x_0)$. Далее, подставив эту зависимость в первое уравнение системы (4), определим зависимость $z(x_0)$. Заменяв в этих выражениях x_0 на параметр t , получим искомые параметрические уравнения профиля:

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= t \pm \frac{r_{ш} \cos t}{\sqrt{1 + \cos^2 t}}; \\ z(t) &= \sin t \mp \frac{r_{ш}}{\sqrt{1 + \cos^2 t}}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

С учетом значений радиуса R образующей окружности цилиндра, на котором замкнута синусоида, числа периодов синусоиды Z_3 , а также с учетом изменения параметра x от 0 до $2\pi R$, система уравнений (4) будет преобразована к следующему виду:

$$\left. \begin{aligned} z - A \sin\left(\frac{tZ_3}{R}\right) &= -\frac{R}{AZ_3 \cos\left(\frac{tZ_3}{R}\right)}(x - t); \\ (x - t)^2 + \left(z - A \sin\left(\frac{tZ_3}{R}\right) \right)^2 &= r_{ш}^2. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Решение этой системы, при рассуждениях, аналогичных приведенным выше, представляет собой следующие параметрические уравнения.

$$x = \frac{1}{R} \left(\begin{array}{l} -AZ_3 \cos\left(\frac{tZ_3}{R}\right) \left(A^3 Z_3^2 \sin^3\left(\frac{tZ_3}{R}\right) - A^3 Z_3^2 \sin\left(\frac{tZ_3}{R}\right) - A \sin\left(\frac{tZ_3}{R}\right) \pm \right) \\ \pm \sqrt{R^4 r_m^2 - A^2 Z_3^2 R^2 r_m^2 \sin^2\left(\frac{tZ_3}{R}\right) + A^2 Z_3^2 R^2 r_m^2} \\ - R^2 + A^2 Z_3^2 - A^2 Z_3^2 \\ + A^2 Z_3 \sin\left(\frac{tZ_3}{R}\right) \cos\left(\frac{tZ_3}{R}\right) + Rt \end{array} \right); \quad (8)$$

$$z = \frac{1}{-R^2 + A^2 Z_3^2 \sin^2\left(\frac{tZ_3}{R}\right) - A^2 Z_3^2} \left(A^3 Z_3^2 \sin^3\left(\frac{tZ_3}{R}\right) - A^3 Z_3^2 \sin\left(\frac{tZ_3}{R}\right) - AR^2 \sin\left(\frac{tZ_3}{R}\right) \right) \pm \quad (9)$$

$$\pm \sqrt{R^4 r_m^2 - A^2 Z_3^2 R^2 r_m^2 \sin^2\left(\frac{tZ_3}{R}\right) + A^2 Z_3^2 R^2 r_m^2}.$$

Знак « \pm » отображает профиль сверху и снизу относительно центральной синусоиды. Результат вычислений по формулам (8) и (9) графически представлен на рис. 3: сплошной линией показан формируемый профиль, точками обозначена центральная синусоида.

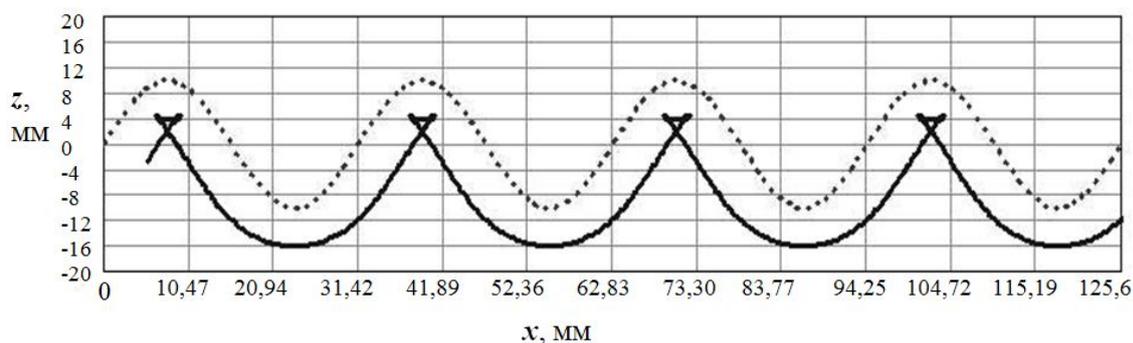


Рис. 3. Профиль кулачка с числом периодов $Z = 4$ ($R = 20$ мм, $A = 10$ мм)

Устранение явления самопересечения

Явление самопересечения профиля [1], наблюдаемое на рис. 4, усложняет массив исходных данных. Необходимо найти максимальный подъем (высоту) реального профиля z_H и исключить из рассмотрения точки, находящиеся выше точки N с координатами $\{x_H, z_H\}$. Угол α (рис. 4) является углом подъема кривой в соответствующей ее точке, и его тангенс равен dz/dx . Через точку O_1 проведена нормаль к центральной синусоиде. Отрезок этой нормали O_1N в точке N пересекает вертикальную линию, отсекающую от начала координат на оси Ox отрезок, равный четверти периода синусоиды. Очевидно, что величина z_H является максимальной высотой образующегося профиля.

При определении высоты профиля кулачка необходимо решить совместно следующую систему уравнений:

$$\alpha = \arctg\left(\frac{AZ_3}{R} \cos\left(\frac{Z_3 x}{R}\right)\right); \quad (10)$$

$$x_H = x + r_{ш} \sin \alpha; \tag{11}$$

$$z_H = A \sin \left(\frac{Z_3 x}{R} \right) - r_{ш} \cos \alpha. \tag{12}$$

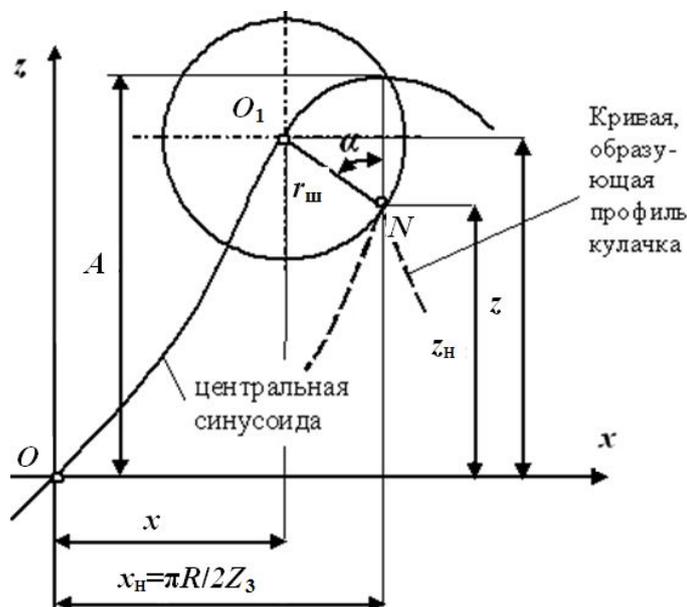


Рис. 4. Схема для определения высоты профиля кулачка

Уравнение (10) и уравнение (11), приведенное к виду $x + r_{ш} \cos \alpha = \pi R / (2Z)$, преобразуем в одно квадратное уравнение:

$$x + r_{ш} \frac{\frac{AZ_3}{R} \cos \left(\frac{Z_3 x}{R} \right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{AZ_3}{R} \cos \left(\frac{Z_3 x}{R} \right) \right)^2}} - \frac{\pi R}{2Z_3} = 0. \tag{13}$$

Данное уравнение – трансцендентное, и аналитически решить его не удалось. Однако с применением любого развитого математического пакета (MathCad®, Maple®, MatLab® и др.) в численном виде с начальным приближением $x_0 = \pi R / 4Z_3$ оно решается без затруднений. Полученное значение x подставлялось в уравнение (10), далее с помощью найденного угла α по уравнениям (11) и (12) определялись соответствующие координаты кривой.

Таким образом, чтобы не учитывать самопересечения в модели, применим ограничение при выводе данных в текстовый файл: если $z > z_H$, то $z = z_H$. При данном условии абсцисса x остается неизменной, равной x_H . Некоторое множество точек с одинаковыми координатами $\{x_H, z_H\}$, полученных в результате работы данного алгоритма, игнорируется программой, и после прохождения очередного участка самопересечения должна остаться одна точка с координатами пика профиля.

Для практической реализации данного профиля и изготовления фрезы полученную плоскую цилиндрическую кривую необходимо скорректировать с учетом проектирования на плоскость. Для построения фрагмента профиля полярный угол β_p , отсчитываемый в плоскости перпендикулярной оси передачи, и соответствующая ему абсцисса точек профиля x_{p1} определяются согласно следующим выражениям:

$$\beta_p = \frac{\pi}{Z_3} - \frac{x - \frac{\pi R}{2Z_3}}{R}, \quad x_{p1} = \frac{1,5\pi R}{Z_3} - R \sin \beta_p. \quad (14)$$

Заключение

В данной работе получены параметрические уравнения, описывающие профиль рабочей поверхности наружного кулачка планетарной шариковой передачи. Данные уравнения, а также алгоритм обработки полученных данных, позволяют формировать профиль дисковой либо пальцевой фрезы для изготовления кулачка на универсальном оборудовании методом копирования. При четном числе периодов кулачка две впадины на нем могут фрезероваться за один проход. Полученный профиль кулачка обеспечит повышение кинематической точности передачи и увеличение ее КПД.

Литература

1. Лустенков, М. Е. Планетарные шариковые передачи цилиндрического типа : моногр. / М. Е. Лустенков, Д. М. Макаревич. – Могилев : Белорус.-Рос. ун-т, 2005. – 123 с. : ил.
2. Лустенков, М. Е. Расчет геометрии адаптированного профиля эллипсной шариковой передачи / М. Е. Лустенков // Технология машиностроения. – 2005. – № 5. – С. 36–38.
3. Лустенков, М. Е. Моделирование и изготовление многопериодного профиля торцового кулачка планетарной шариковой передачи / М. Е. Лустенков // Вестн. Белорус.-Рос. ун-та. – 2006. – № 3. – С. 96–101.

Получено 09.04.2008 г.