МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Технологии металлов»

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Методические рекомендации к практическим занятиям для студентов направлений подготовки 15.03.06 «Мехатроника и робототехника», 15.03.03 «Прикладная механика» и 23.03.02 «Наземные транспортно-технологические комплексы» дневной формы обучения

Могилев 2023

УДК 539.3/6
ББК 30.121
С64

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Технологии металлов» «27» февраля 2023 г., протокол № 9

Составители: канд. техн. наук, доц. А. А. Катькало;
канд. техн. наук, доц. И. М. Кузменко;
ст. преподаватель Е. Г. Кривоногова

Рецензент канд. техн. наук, доц. М. Н. Миронова

Методические рекомендации составлены в соответствии с рабочей программой дисциплины «Сопротивление материалов» для студентов направлений подготовки 15.03.06 «Мехатроника и робототехника», 15.03.03 Прикладная механика» и 23.03.02 «Наземные транспортно-технологические комплексы» дневной формы обучения. Приведены примеры решения задач, которые могут быть использованы студентами на практических занятиях.

Учебное издание

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Ответственный за выпуск Д. И. Якубович

Корректор А. А. Подошевко

Компьютерная верстка Н. П. Полевничая

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 36 экз. Заказ № .

Издатель и полиграфическое исполнение:
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 07.03.2019.
Пр-т Мира, 43, 212022, г. Могилев.

Содержание

Введение

Цель преподавания дисциплины «Сопротивление материалов» – научить студента правильному решению задач расчета на прочность, жесткость и устойчивость конструкций, используемых в сложных эксплуатационных условиях под действием как статических, так и динамических нагрузок, рациональному назначению конструкционных материалов и формы поперечного сечения, обеспечивающих требуемые показатели надежности, безопасности, экономичности и эффективности изделий.

Методические рекомендации помогут сформировать у студентов нижеперечисленные компетенции.

ОПК-1. Способен применять естественно-научные и общеинженерные знания, методы математического анализа и моделирования в профессиональной деятельности.

ОПК-11. Способен выявлять естественно-научную сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности, привлекать для их решения физко-математический аппарат и современные компьютерные технологии.

ПК-10. Обладает готовностью участвовать в подготовке технико-экономического обоснования проектов создания мехатронных и робототехнических систем, их подсистем и отдельных модулей.

ПК-11. Обладает способностью производить расчеты и проектирование отдельных устройств и подсистем мехатронных и робототехнических систем с использованием стандартных исполнительных и управляющих устройств, средств автоматики, измерительной и вычислительной техники в соответствии с техническим заданием.

ПК-14. Обладает способностью планировать проведение испытаний отдельных модулей и подсистем мехатронных и робототехнических систем, участвовать в работах по организации и проведению экспериментов на действующих объектах и экспериментальных макетах, а также в обработке результатов экспериментальных исследований.

1 Основные геометрические характеристики плоских сечений

1.1 Определение центра тяжести составного сечения

Пример 1 – Определить координату центра тяжести составного сечения относительно оси y.

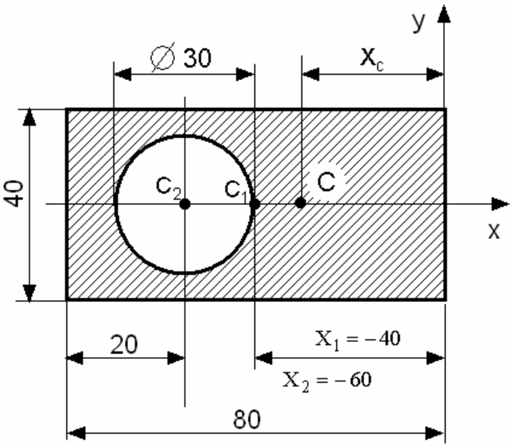


Рисунок 1.1 – Составное сечение

Решение

Поперечное сечение состоит из прямоугольника, в котором вырезано отверстие в форме круга. Положение центров тяжести каждой фигуры указаны на рисунке 1.1. Площади отдельных фигур:

$$A_1 = 4 \cdot 8 = 32 \text{ см}^2;$$

$$A_2 = 3{,}14 \cdot 1{,}5^2 = 7{,}065 \text{ см}^2.$$

Координата X_c определяется по формуле

$$X_c = \frac{\sum S_Y}{\sum A} = \frac{x_1 \cdot A_1 - x_2 \cdot A_2}{A_1 - A_2} = \frac{(-4) \cdot 32 - (-6) \cdot 7{,}065}{32 - 7{,}065} = -3{,}43 \text{ см}.$$

1.2 Определение моментов инерции простых сечений при параллельном переносе и повороте осей. Главные центральные оси и моменты инерции поперечного сечения

Осевые моменты инерции – суммы произведений площадей элементарных площадок dA на квадраты их расстояний до соответствующей оси:

$$I_x = \int y^2 dA; \qquad I_y = \int x^2 dA.$$

Полярный момент инерции – суммы произведений площадей элементарных площадок dA на квадрат расстояния до полюса:

$$I_\rho = \int \rho^2 dA.$$

Полярный момент инерции равен сумме осевых моментов инерции

$$I_\rho = I_x + I_y.$$

Пример 2 **–** Определить осевые моменты инерции поперечного сечения (рисунок 1.2) относительно указанных осей x и y.

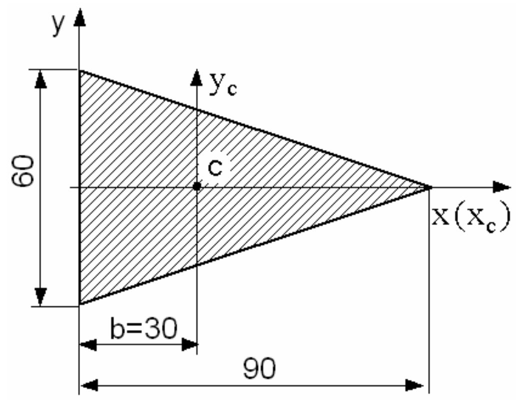


Рисунок 1.2 – Поперечное сечение

Решение

На поперечном сечении указан центр тяжести, через который проведены центральные оси x_c и y_c. По рисунку видно, что оси x и x_c совпадают, а между вертикальными осями y и y_c есть межосевое расстояние b.

Осевые моменты инерции поперечного сечения определяются по формулам:

$$I_x = I_{x_c} = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{9 \cdot 6^3}{48} = 40{,}5 \text{ см}^4;$$

$$I_y = I_{y_c} + b^2 \cdot A = \frac{6 \cdot 9^3}{36} + 3^2 \cdot \frac{6 \cdot 9}{2} = 354{,}5 \text{ см}^4.$$

1.3 Главные центральные оси инерции поперечного сечения. Главные центральные моменты инерции сложных поперечных сечений

Пример 3 **–** Для заданного сечения (рисунок 1.3) определить положение главных центральных осей и вычислить значения главных центральных моментов инерции. Размеры сечения даны в миллиметрах.

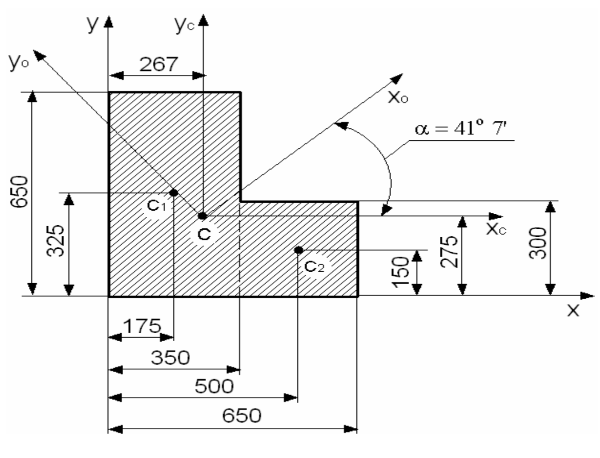


Рисунок 1.3 – Схема поперечного сечения

Решение

Выбираем произвольно начальные оси x и y, относительно которых находим положение центра тяжести сложного сечения.

Площадь сечения

$$A = 35 \cdot 65 + 30 \cdot 30 = 3175 \text{ см}^2.$$

Статические моменты сечения:

$$S_x = A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_2 = 35 \cdot 65 \cdot 32{,}5 + 30 \cdot 30 \cdot 15 = 87437{,}5 \text{ см}^3;$$

$$S_y = A_1 \cdot x_1 + A_2 \cdot x_2 = 35 \cdot 65 \cdot 17{,}5 + 30 \cdot 30 \cdot 50 = 84812{,}5 \text{ см}^3.$$

Координаты центра тяжести сечения относительно начальных осей x и y:

$$x_c = \frac{\sum S_y}{\sum A} = \frac{84812{,}5}{3175} = 26{,}7 \text{ см};$$

$$y_c = \frac{\sum S_x}{\sum A} = \frac{87437{,}5}{3175} = 27{,}5 \text{ см}.$$

Определяем значения осевых и центробежного моментов инерции относительно центральных осей x_c и y_c:

$$I_{x_c} = \sum_{i=1}^{n}\left(I_{x_i} + a_i^2 \cdot A_i\right) = \frac{35 \cdot 65^3}{12} + \left(32{,}5 - 27{,}5\right)^2 \cdot 35 \cdot 65 +$$

$$+ \frac{30 \cdot 30^3}{12} + \left(27{,}5 - 15{,}0\right)^2 \cdot 30 \cdot 30 = 1066 \cdot 10^3 \text{см}^4;$$

$$I_{y_c} = \sum_{i=1}^{n}\left(I_{y_i} + b_i^2 \cdot A_i\right) = \frac{65 \cdot 35^3}{12} + \left(26{,}7 - 17{,}5\right)^2 \cdot 35 \cdot 65 +$$

$$+ \frac{30 \cdot 30^3}{12} + \left(50 - 26{,}5\right)^2 \cdot 30 \cdot 30 = 981 \cdot 10^3 \text{ см}^4;$$

$$I_{x_c y_c} = \sum_{i=1}^{n}\left(I_{x_i y_i} + a_i \cdot b_i \cdot A_i\right) = 0 + \left(17{,}5 - 26{,}7\right) \cdot \left(32{,}5 - 27{,}5\right) \times$$

$$\times 35 \cdot 65 + 0 + \left(50 - 26{,}5\right) \cdot \left(15 - 27{,}5\right) \cdot 30 \cdot 30 = -367 \cdot 10^3 \text{ см}^4.$$

Находим значения главных центральных моментов инерции:

$$I_{x_0, y_0} = \frac{I_{x_c} + I_{y_c}}{2} \pm \sqrt{\frac{\left(I_{x_c} - I_{y_c}\right)^2}{4} + I_{x_c y_c}^2} = \frac{1066 \cdot 10^3 + 981 \cdot 10^3}{2} \pm$$

$$\pm \sqrt{\frac{\left(1066 \cdot 10^3 - 981 \cdot 10^3\right)^2}{4} + \left(367 \cdot 10^3\right)^2} = 1023{,}5 \cdot 10^3 \pm 369{,}5 \cdot 10^3 \text{ см}^4,$$

откуда

$$I_{max} = (1023,5 + 369,5) \cdot 10^3 = 1393 \cdot 10^3 \text{ см}^4;$$

$$I_{min} = (1023,5 - 369,5) \cdot 10^3 = 654 \cdot 10^3 \text{ см}^4.$$

Определяем положение главных центральных осей инерции сечения:

$$\mathrm{tg}2\alpha_0 = -\frac{2I_{x_c y_c}}{I_{x_c} - I_{y_c}} = -\frac{2 \cdot \left(-367 \cdot 10^3\right)}{\left(1066 \cdot 10^3 - 981 \cdot 10^3\right)} = 8,635;$$

$$2\alpha_0 = 83°4'; \quad \alpha_0 = 41°7' > 0 .$$

Таким образом, поворачивая ось x_c против часовой стрелки на угол $41°7'$, получаем главную центральную ось x_0, относительно которой главный момент инерции максимален.

Контрольные вопросы

1 Перечислите основные геометрические характеристики поперечных сечений.

2 Укажите интегральные зависимости для определения геометрических характеристик.

3 Укажите арифметические формулы для определения геометрических характеристик простых фигур (прямоугольника, треугольника, круга).

4 Назовите свойство, которое проявляют осевые моменты инерции сечения при повороте осей.

5 Какие геометрические характеристики всегда положительны?

6 Чему равен центробежный момент инерции сечения относительно осей симметрии?

7 Как определяются моменты инерции сечения при параллельном переносе осей?

8 Какие оси называются главными центральными осями инерции сечения?

9 Как определить положение главных центральных осей инерции симметричного сечения?

2 Построение эпюр внутренних силовых факторов

2.1 Определение внутренней силы в статически определимых системах. Метод сечений

Внутри любого материала имеются внутренние междуатомные силы, наличие которых определяет способность тела воспринимать действующие на него внешние силы, сопротивляться разрушению, изменению формы и размеров. Приложение к телу внешней нагрузки вызывает изменение внутренних сил. В сопротивлении материалов изучаются дополнительные внутренние силы. Они называются просто внутренними силами.

Внутренние силы – силы взаимодействия между отдельными элементами конструкций или между отдельными частями элемента, возникающие под действием внешних сил.

Для определения численной величины внутренних сил применяют метод сечений.

Метод сечений сводится к четырем действиям.

1 Разрезают (мысленно) тело плоскостью I в том месте, где нужно определить внутренние силы (рисунок 2.1).

2 Отбрасывают любую отрезанную часть тела (желательно наиболее сложную), а ее действие на оставшуюся часть заменяют внутренними силами, чтобы оставшаяся исследуемая часть находилась в равновесии (рисунок 2.2).

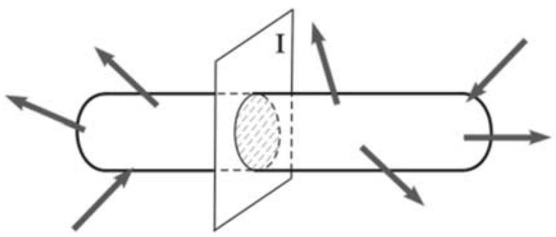


Рисунок 2.1 – Сечение тела плоскостью

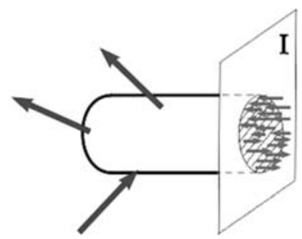


Рисунок 2.2 – Оставленная часть тела

3 Приводят систему сил к одной точке (как правило, к центру тяжести сечения) и проецируют главный вектор и главный момент системы внутренних сил на нормаль к плоскости (ось x) и главные центральные оси сечения (y и z).

Полученные силы (N, Q_y, Q_z) (рисунок 2.3) и моменты (M_k, M_y, M_z) называют внутренними силовыми факторами в сечении.

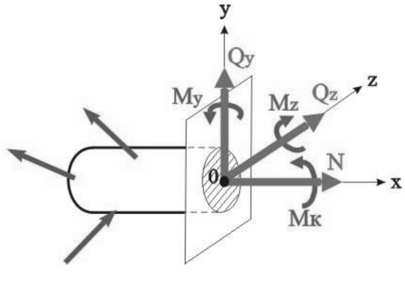


Рисунок 2.3 – Внутренние силовые факторы

Для внутренних силовых факторов приняты следующие названия:
N – продольная или осевая сила;
Q_y, Q_z – поперечные силы;
M_k – крутящий момент;
M_y, M_z – изгибающие моменты.
4 Находят внутренние силовые факторы, составляя шесть уравнений равновесия статики для рассматриваемой части рассеченного тела.

2.2 Построение эпюр внутренних силовых факторов в прямолинейном брусе

Пример 1 **–** Стальной брус (рисунок 2.4), площадь поперечного сечения которого $A = 50$ см^2 и длина $\ell = 1$ м, сжимается силой F = 300 Н. Удельный вес материала γ = 78 кН/м^3.

Построить эпюру нормальных сил с учетом собственного веса бруса.

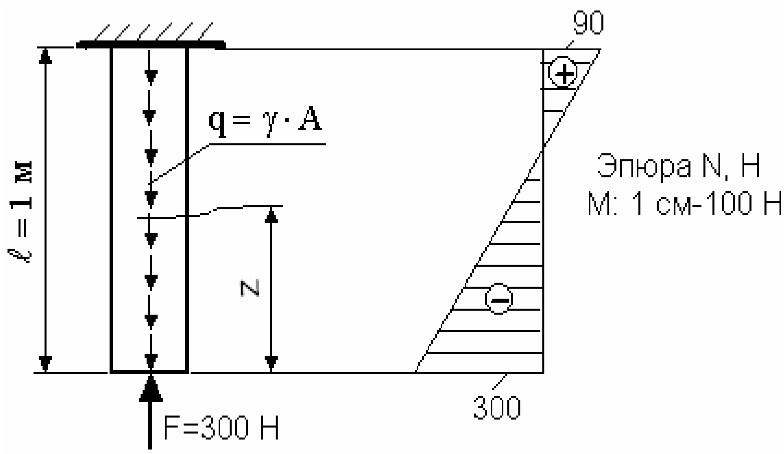


Рисунок 2.4 – Схема нагрузки стержня

Решение

Построение эпюры N:

$$N = -F + \gamma \cdot A \cdot z = -300 + 78 \cdot 10^3 \cdot 50 \cdot 10^{-4} \cdot z = -300 + 390 \cdot z;$$

$$z = 0; \quad N = -300 \text{ Н};$$

$$z = 1 \text{ м}; \quad N = 90 \text{ Н}.$$

2.3 Определение внутренних сил в статически определимых балках при поперечном изгибе

Пример 2 **–** Для балки, изображенной на рисунке 2.5, построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов.

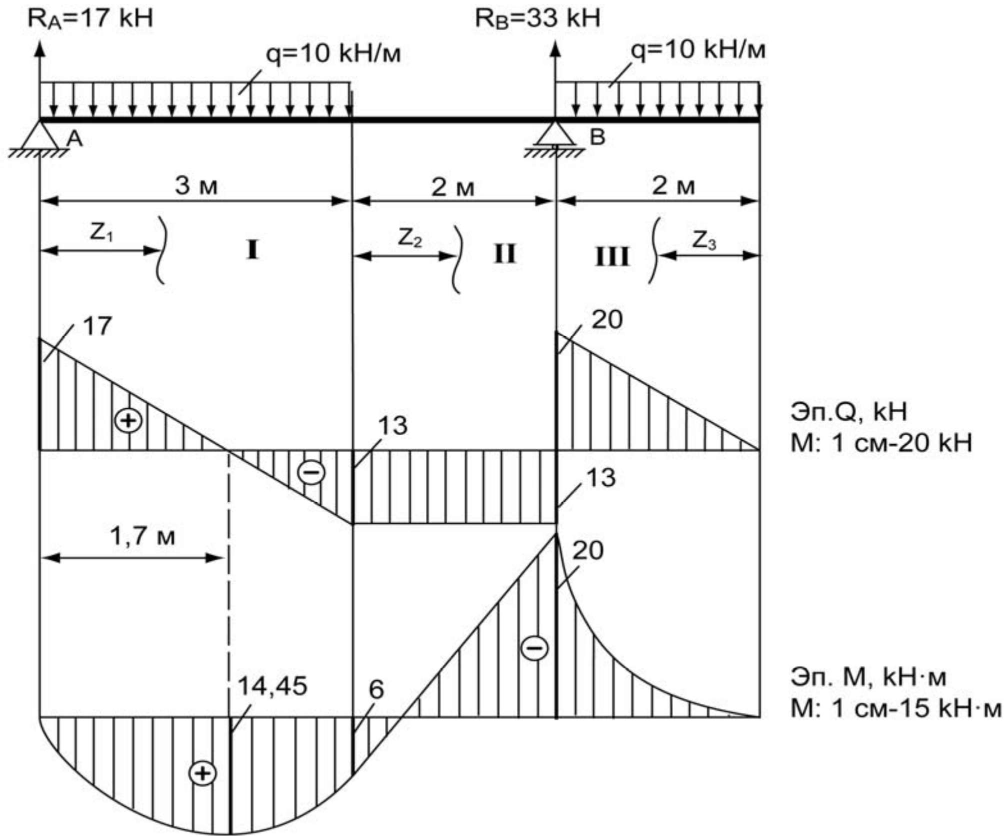


Рисунок 2.5 – Схема балки

Решение

Определение реакций на опорах:

$$\sum M_A = q \cdot 3 \cdot 1{,}5 + q \cdot 2 \cdot 6 - R_B \cdot 5 = 0; \qquad R_B = \frac{(10 \cdot 3 \cdot 1{,}5 + 10 \cdot 2 \cdot 6)}{5} = 33 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = R_A \cdot 5 - q \cdot 3 \cdot 3{,}5 + q \cdot 2 \cdot 1 = 0; \qquad R_A = \frac{(10 \cdot 3 \cdot 3{,}5 - 10 \cdot 2 \cdot 1)}{5} = 17 \text{ кН}.$$

Построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов.
Участок I: $0 \le z_1 \le 3$ м.

$$Q = R_A - q \cdot z_1 = 17 - 10 \cdot z_1;$$

$$M = R_A \cdot z_1 - q\frac{z_1^2}{2} = 17 \cdot z_1 - 5 \cdot z_1^2;$$

$$z_1 = 0; \quad Q = 17 \text{ кН}; \quad M = 0;$$

$$z_1 = 3 \text{ м}; \quad Q = -13 \text{ кН}; \ M = 17 \cdot 3 - 5 \cdot 3^2 = 6 \text{ кН·м}.$$

Исследование на экстремум:

$$Q = 17 - 10 \cdot z_1 = 0; \quad z_1 = 1{,}7 \text{ м};$$

$$M_{экстр} = 17 \cdot 1{,}7 - 5 \cdot 1{,}7^2 = 14{,}45 \text{ кН·м}.$$

Участок II: $0 \le z_2 \le 2$ м.

$$Q = R_A - q \cdot 3 = 17 - 10 \cdot 3 = -13 \text{ кН};$$

$$M = R_A \cdot (3 + z_2) - q \cdot 3 \cdot (1{,}5 + z_2) = 17 \cdot (3 + z_2) - 10 \cdot 3 \cdot (1{,}5 + z_2);$$

$$z_2 = 0; \qquad M = 17 \cdot 3 - 30 \cdot 1{,}5 = 6 \text{ кН·м}.$$

$$z_2 = 2 \text{ м}; \qquad M = 17 \cdot 5 - 30 \cdot 3{,}5 = -20 \text{ кН·м}.$$

Участок III: $0 \le z_3 \le 2$ м.

$$Q = q \cdot z_3 = 10 \cdot z_3;$$

$$M = -0{,}5 \cdot q \cdot z_3^2 = -5 \cdot z_3^2;$$

$$z_3 = 0; \quad Q = 0; \quad M = 0;$$

$$z_3 = 2 \text{ м}; \quad Q = 20 \text{ кН}; \quad M = -20 \text{ кН·м}.$$

2.4 Определение внутренних сил при кручении. Построение эпюр крутящих моментов

Пример 3 – Для заданного ступенчатого вала (рисунок 2.6) построить эпюру крутящих моментов. Предварительно вал уравновесить.

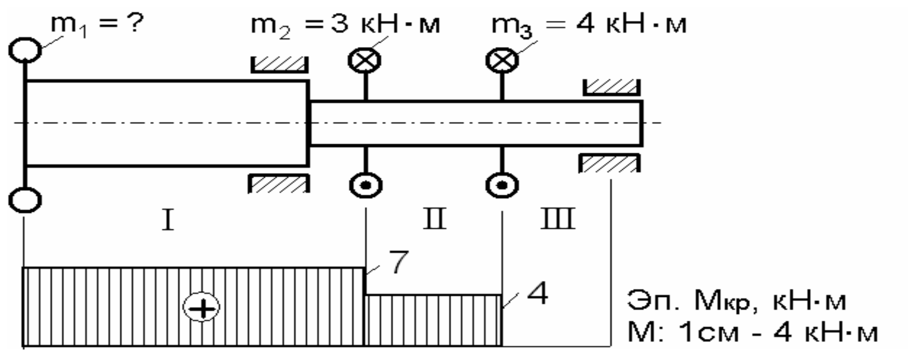


Рисунок 2.6 – Схема вала

Решение

Для определения скручивающего момента m_1 составим уравнение статики:

$$\sum m = m_2 + m_3 + m_1 = 0,$$

откуда

$$m_1 = m_2 + m_3 = 3 + 4 = 7 \text{ кН·м}.$$

Построение эпюры $M_{кр}$:

$$M_1 = m_1 = 7 \text{ кН·м};$$

$$M_2 = m_2 = 7 – 3 = 4 \text{ кН·м};$$

$$M_3 = m_1 – m_2 – m_3 = 7 – 3 – 4 = 0 \text{ кН·м}.$$

Контрольные вопросы

1 Какие внутренние силовые факторы возникают в поперечном сечении балки под действием внешних нагрузок?

2 Какой метод используется для определения внутренних силовых факторов?

3 Какими правилами знаков необходимо руководствоваться при построении эпюр поперечных, продольных сил и изгибающих моментов?

4 Что является границами характерных участков балки?

5 Как провести контроль правильности построения эпюр?

6 Как и в каких случаях выполняется исследование на экстремум?

3 Расчет на прочность и жесткость при растяжении (сжатии)

Пример – Для данного ступенчатого бруса (рисунок 3.1), построить эпюры нормальных сил, нормальных напряжений и определить перемещение свободного конца стержня, если $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

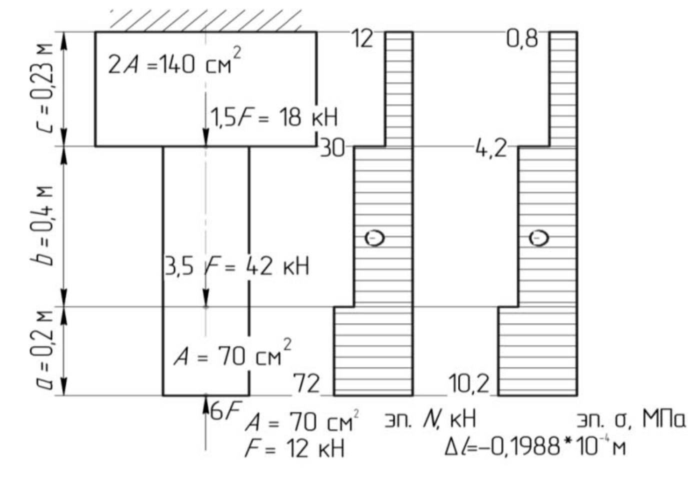


Рисунок 3.1 – Расчетная схема и построенные эпюры нормальных сил и нормальных напряжений

Осуществляем перевод значений в СИ.

$$F = 12 \text{ кН} = 12 \cdot 10^3 \text{ Н}.$$

$$A = 70\ \text{см}^2 = 70{\cdot}10^{-4}\ \text{м}^2.$$

$$2A = 2{\cdot}70 = 140\ \text{см}^2 = 140{\cdot}10^{-4}\ \text{м}^2.$$

Решение

1 Отмечаем участки на рисунке 3.1.

2 Определяем значения продольной (нормальной) силы N на участках бруса:

$$N_1 = -F = -6{\cdot}12 = -72\ \text{кН};$$

$$N_2 = -6F + 3{,}5F = -72 + 42 = -30\ \text{кН};$$

$$N_3 = -6F + 3{,}5F + 1{,}5F = -72 + 42 + 18 = -12\ \text{кН}.$$

Строим эпюру продольных сил (см. рисунок 3.1).

3 Вычисляем значения нормальных напряжений:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A} = -\frac{72\cdot 10^3}{70\cdot 10^{-4}} = -1{,}028\cdot 10^7\ \text{Па} = -10{,}28\ \text{МПа};$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = -\frac{30\cdot 10^3}{70\cdot 10^{-4}} = -0{,}428\cdot 10^7\ \text{Па} = -4{,}28\ \text{МПа};$$

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{2A_3} = -\frac{12\cdot 10^3}{140\cdot 10^{-4}} = -0{,}0857\cdot 10^7\ \text{Па} = -0{,}86\ \text{МПа}.$$

Строим эпюру нормальных напряжений (см. рисунок 3.1).

4 Определяем перемещение свободного конца:

$$\Delta l = \pm\Delta l_1 \pm \Delta l_2 \pm \Delta l_3;$$

$$\Delta l = \pm\frac{N_1\cdot a}{E\cdot A} \pm \frac{N_2\cdot b}{E\cdot A} \pm \frac{N_2\cdot c}{E\cdot A} =$$

$$= -\frac{72\cdot 10^3\cdot 0{,}2\cdot 10^3}{2\cdot 10^{11}\cdot 70\cdot 10^{-4}} - \frac{30\cdot 10^3\cdot 0{,}4\cdot 10^3}{2\cdot 10^{11}\cdot 70\cdot 10^{-4}} - \frac{12\cdot 10^3\cdot 0{,}23\cdot 10^3}{2\cdot 10^{11}\cdot 140\cdot 10^{-4}} =$$

$$= -0{,}10286\cdot 10^{-4} - 0{,}0857\cdot 10^{-4} - 0{,}00986\cdot 10^{-4} = 0{,}198\cdot 10^{-4}\ \text{м}.$$

4 Изгиб прямого бруса

При прямом поперечном изгибе балки в ее поперечных сечениях возникают нормальные σ и касательные τ напряжения.

Нормальные напряжения в любом слое произвольного поперечного сечения можно определить по формуле

$$\sigma = \frac{M_x}{W_x} \le [\sigma] ,$$

где M_x – изгибающий момент в рассматриваемом сечении;
W_x – осевой момент сопротивления поперечного сечения;
[σ] – допускаемое напряжение для материала балки.

Пример 1 **–** Для заданной схемы балки, с указанием численных величин нагрузок и линейных размеров, величин допускаемого нормального и касательного напряжений, требуется подобрать поперечное сечение балки в виде двутавра из условия прочности по нормальным напряжениям, если допускаемое напряжение $[\sigma] = 160$ МПа.

Решение

Вычерчиваем заданную балку с указанием внешних нагрузок и линейных размеров (рисунок 4.1).

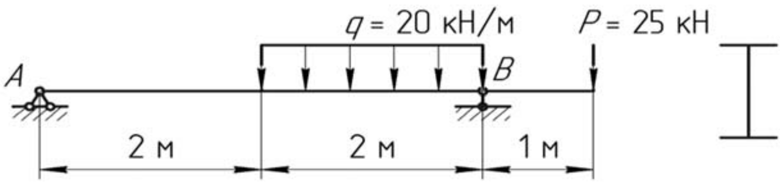


Рисунок 4.1 – Расчетная схема балки

Определяем опорные реакции:

$$\sum M_A = q \cdot 2 \cdot 3 - R_B \cdot 4 + P \cdot 5 = 20 \cdot 2 \cdot 3 - R_B \cdot 4 + 25 \cdot 5 = 0;$$

$$R_B = \frac{20 \cdot 2 \cdot 3 + 25 \cdot 5}{4} = 61{,}25 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = -q \cdot 2 \cdot 1 + R_A \cdot 4 + P \cdot 1 = -20 \cdot 2 \cdot 1 + R_A \cdot 4 + 25 \cdot 1 = 0;$$

$$R_A = \frac{20 \cdot 2 \cdot 1 - 25 \cdot 1}{4} = 3{,}75 \text{ кН}.$$

Проверка:

$$\sum y = R_A - q \cdot 2 + R_B - P = 3{,}75 - 20 \cdot 2 + 61{,}25 - 25 = 0.$$

Разбиваем балку на характерные участки (рисунок 4.2, *а*).

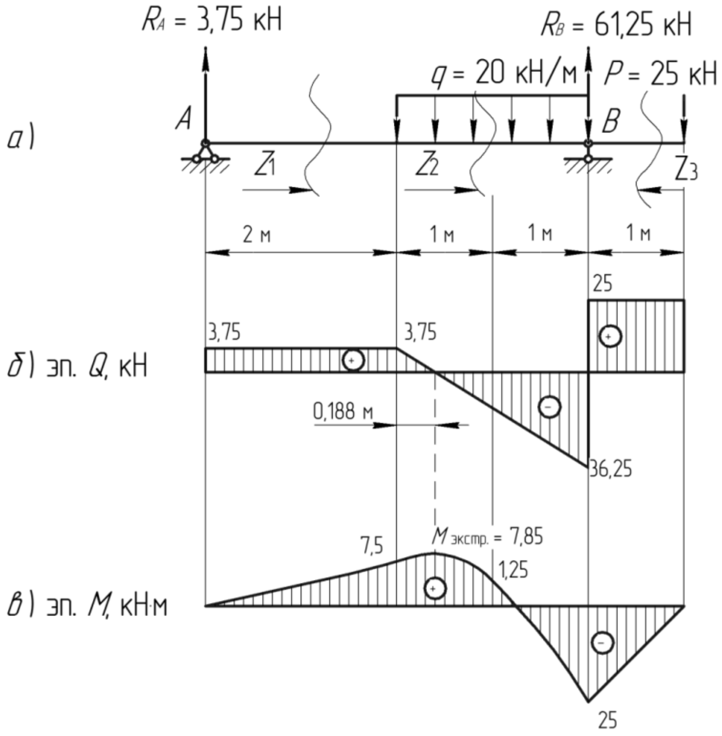


Рисунок 4.2 – Расчетная схема балки и эпюры поперечных сил и изгибающих моментов

Первый участок: $0 \le z_1 \le 2$ м.

$$Q_1 = R_A = 3,75 \ \text{кН};$$

$$M_1 = R_A \cdot z_1 = 3,75 \cdot z_1 = |_0\, 0 = |_2\, 3,75 \cdot 2 = 7,5 \ \text{кН} \cdot \text{м}.$$

Второй участок: $0 \le z_2 \le 2$ м.

$$Q_2 = R_A - q \cdot z_2 = 3,75 - q \cdot z_2 = |_0\, 3,75 = |_2\, 3,75 - 20 \cdot 2 = -36,25 \ \text{кН};$$

$$M_2 = R_A \cdot (2 + z_2) - q \cdot \frac{z_2^2}{2} = 3,75 \cdot (2 + z_2) - q \cdot \frac{z_2^2}{2} =$$

$$= |_0\, 7,5 \ \text{кН} \cdot \text{м} = |_2\, 3,75 \cdot (2+2) - 20 \cdot \frac{2^2}{2} = -25 \ \text{кН} \cdot \text{м};$$

$$M_2 = R_A \cdot (2 + z_2) - q \cdot \frac{z_2^2}{2} = 3,75 \cdot (2 + z_2) - q \cdot \frac{z_2^2}{2} = |_0\, 7,5 =$$

$$= |_2\, 3,75 \cdot (2+2) - 20 \cdot \frac{2^2}{2} = -25 \ \text{кН} \cdot \text{м}.$$

Исследование на экстремум:

$$Q_2 = R_A - q \cdot z_2 = 3,75 - 20 \cdot z_2 = 0,$$

откуда

$$z_2 = \frac{37,5}{20} = 0,188 \text{ м.}$$

$$M_2^{экстр} = 3,75 \cdot (2 + 0,188) - 20 \cdot \frac{0,188^2}{2} = 7,85 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

Третий участок: $0 \le z_3 \le 1$ м.

$$Q_3 = P = 25 \text{ кН;}$$

$$M_3 = -P \cdot z_3 = -25 \cdot z_3 = |_0\, 0 = |_1 -25 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

По рассчитанным значениям строим эпюры поперечных сил и изгибающих моментов (рисунок 4.2, *б*, *в*).

Максимальное значение изгибающего момента $M_{\max}$ = 25 кН·м. Из условия прочности рассчитываем величину осевого момента сопротивления поперечного сечения:

$$W_X \ge \frac{M_{\max}}{\sigma} = \frac{25 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 156 \text{ см}^3.$$

По ГОСТ 8239–89 выбираем сечения с близкими значениями осевых моментов ссопротивления: двутавр № 18 (W_X = 143 см^3) и двутавр № 20 (W_X = 184 см^3). Проверяем прочность выбранных двутавровых сечений по нормальным напряжениям.

$$\sigma_{\max} = \frac{25 \cdot 10^3}{143 \cdot 10^{-6}} = 174,8 \text{ МПа.}$$

Находим величину перенапряжения балки:

$$\delta = \frac{\sigma_{\max} - [\sigma]}{[\sigma]} \cdot 100\ \% = \frac{174,8 - 160}{160} \cdot 100\ \% = 9,27\ \%,$$

что превышает допустимые 5 %. Следовательно, проверяем на прочность двутавр № 20:

$$\sigma_{\max} = \frac{25 \cdot 10^3}{184 \cdot 10^{-6}} = 135,9 \text{ МПа} < [\sigma] = 160 \text{ МПа.}$$

Условие прочности по нормальным напряжениям выполняется.

Вывод: в качестве поперечного сечения балки выбран двутавр № 20, для которого выполняется условие прочности.

5 Кручение стального стержня

Пример – Для стального стержня постоянного поперечного сечения (рисунок 5.1) $[\varphi_0] = 0{,}02$ рад/м; $[\tau_к] = 30$ МПа; $G = 8 \cdot 10^4$ МПа.

Требуется:

1) определить значения моментов M_1, M_2, M_3, M_4;

2) построить эпюру крутящих моментов;

3) определить диаметр вала из условий прочности и жесткости, приняв поперечное сечение стержня в виде окружности.

Окончательно принимаемое значение диаметра должно быть округлено до ближайшего четного или оканчивающегося на пять числа.

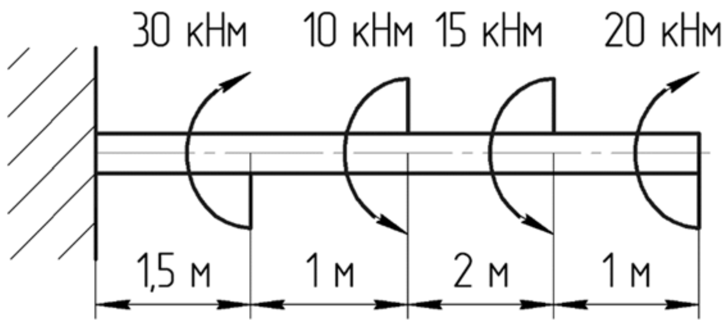


Рисунок 5.1 – Расчетная схема

Решение

1 Определяем крутящий момент по участкам вала.

$$M_1 = 20 \text{ кН·м};$$

$$M_2 = 20 - 15 = 5 \text{ кН·м};$$

$$M_3 = 20 - 15 - 10 = -5 \text{ кН·м};$$

$$M_4 = 20 - 15 - 10 + 30 = 25 \text{ кН·м}.$$

Строим эпюру крутящих моментов (рисунок 5.2).

2 Определяем диаметр вала из условий прочности и жесткости.

$$M_{кр\,\max} = 25 \text{ кН·м}.$$

Из условия прочности

$$d = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_{кр\max}}{\pi \cdot [\tau_k]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 25 \cdot 10^3}{3{,}14 \cdot 30 \cdot 10^6}} = 0{,}162 \text{ м} = 162 \text{ мм}.$$

Принимаем d = 162 мм.

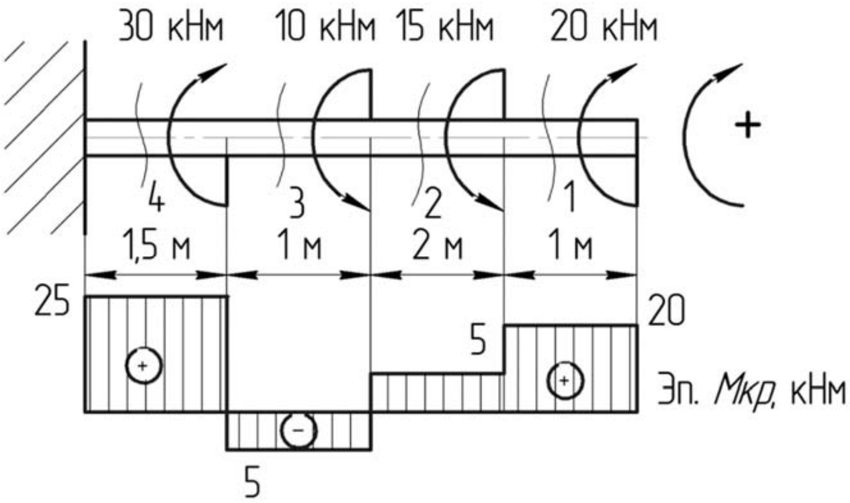


Рисунок 5.2 – Построение эпюры $M_{кр}$

Из условия жесткости

$$d = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot M_{кр\max}}{\pi \cdot G \cdot [\varphi_0]}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 25 \cdot 10^3}{3{,}14 \cdot 8 \cdot 10^{10} \cdot 0{,}02}} = 112{,}3 \text{ мм.}$$

Принимаем d = 112 мм.

Вывод: требуемые диаметры окончательно принимаем из расчетов на прочность: d = 162 мм.

6 Сложное сопротивление

6.1 Косой изгиб

Пример 1 – Проверить прочность балки, если $[\sigma] = 160\,\text{МПа}$.

Решение

Определяем изгибающие моменты в вертикальной и горизонтальной плоскостях и строим соответствующие эпюры (рисунок 6.1).

Определяем моменты сопротивления.

$$W_x = \frac{b \cdot h^2}{6},$$

где b, h – размеры поперечного сечения, см.

$$W_x = \frac{12 \cdot 20^2}{6} = 800 \ \text{см}^3.$$

$$W_y = \frac{b^2 \cdot h}{6};$$

$$W_y = \frac{20 \cdot 12^2}{6} = 480 \ \text{см}^3.$$

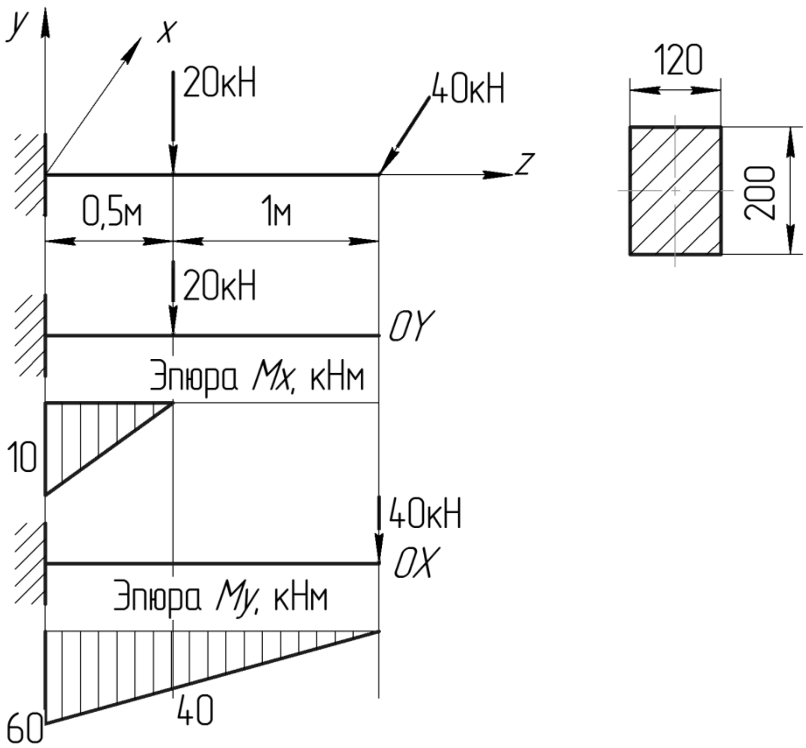


Рисунок 6.1 – Расчетная схема и эпюры действующих моментов

Выполняем проверку прочности

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} = \frac{10 \cdot 10^3}{800 \cdot 10^{-6}} + \frac{60 \cdot 10^3}{480 \cdot 10^{-6}} = 137{,}5 \ \text{МПа} < [\sigma] = 160 \ \text{МПа}.$$

Прочность обеспечена.

6.2 Совместное действие изгиба и кручения

Пример 2 – На вал круглого сплошного сечения насажены шестерня диаметром D_1 = 0,23 м и шкив ременной передачи диаметром D_2 = 0,39 м (рисунок 6.2, *а*). Вес шкива G = 600 Н, собственным весом шестерни и вала пренебречь. Вал делает 660 об/мин и передает мощность, равную 40 кВт. Допустимое напряжение материала вала $[\sigma] = 80$ МПа .

Определить необходимый диаметр вала по четвертой теории прочности.

Решение

Определяем внешние крутящие моменты, передаваемые валом через шестерню и шкив:

$$m = \frac{N \cdot 30}{\pi \cdot n} = \frac{40000 \cdot 30}{3{,}14 \cdot 660} = 579 \text{ Н·м.}$$

Схема действия крутящих моментов показана на рисунке 6.2, *б*.

Построение эпюры внутреннего силового фактора (крутящего момента $M_{кр}$), возникающего в сечениях вала, производим по участкам слева направо:

– участок 1 $M_{кр} = 0$;

– участок 2 $M_{кр} = m = 579$ Н·м;

– участок 3 $M_{кр} = m - m = 0$.

Определяем окружное усилие F_1, действующее на шестерню и вал в вертикальной плоскости:

$$F_1 = \frac{2 \cdot m}{D_1} = \frac{2 \cdot 579}{0{,}23} = 5035 \text{ Н.}$$

Рассчитываем изгибающую силу F_2 от ременной передачи на шкиве, действующую на вал в горизонтальной плоскости:

$$F_2 = 3 \cdot \frac{2 \cdot m}{D_2} = 3 \cdot \frac{2 \cdot 579}{0{,}39} = 8908 \text{ Н.}$$

Схема действия вертикальных изгибающих сил показана на рисунке 6.2, *в*.

Для определения опорных реакций R_{Ay} и R_{By} составим уравнения статического равновесия вала:

$$\sum m_B = 0; \qquad R_{Ay} \cdot 1{,}2 - 5035 \cdot 0{,}8 - 600 \cdot 0{,}3 = 0;$$

$$R_{Ay} = \frac{4208}{1{,}2} = 3507 \text{ Н;}$$

$$\sum m_A = 0; \qquad R_{By} \cdot 1{,}2 - 5035 \cdot 0{,}4 - 600 \cdot 0{,}9 = 0;$$

$$R_{By} = \frac{2554}{1{,}2} = 2128 \text{ Н.}$$

Выполним проверку:

$$\sum y = 0; \qquad R_{Ay} - F_1 - G + R_{By} = 3507 - 5035 - 600 + 2128 = 0.$$

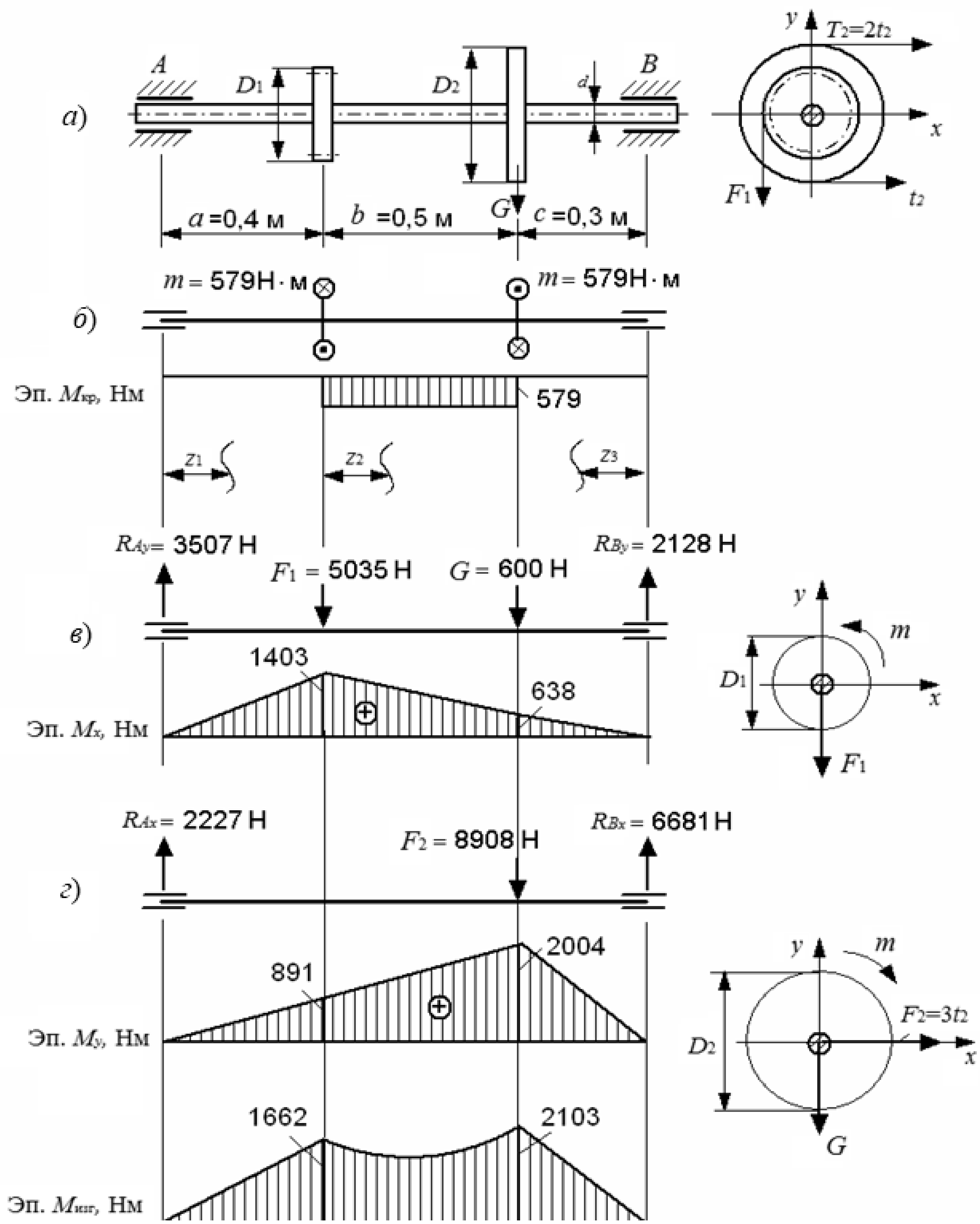


Рисунок 6.2 – Заданная схема вала и вспомогательные схемы и эпюры

Построение эпюры изгибающих моментов M_x по участкам.
Участок 1 $(0 \le z_1 \le 0,4 \text{ м})$:

$$M_x = R_{Ay} \cdot z_1 = 3507 \cdot z_1;$$

$$z_1 = 0; \quad M_x = 0;$$

$$z_1 = 0,4 \text{ м}; \quad M_x = 1403 \text{ Н·м}.$$

Участок 2 $(0 \le z_2 \le 0,5 \text{ м})$:

$$M_x = R_{Ay} \cdot (0,4 + z_2) - F_1 \cdot z_2 = 3507 \cdot (0,4 + z_2) - 5035 \cdot z_2;$$

$$z_2 = 0; \quad M_x = 1403 \text{ Н·м};$$

$$z_2 = 0,5 \text{ м}; \quad M_x = 638 \text{ Н·м}.$$

Участок 3 $(0 \le z_3 \le 0,3 \text{ м})$:

$$M_x = R_{By} \cdot z_3 = 2128 \cdot z_3;$$

$$z_3 = 0; \quad M_x = 0;$$

$$z_3 = 0,3 \text{ м}; \quad M_x = 638 \text{ Н·м}.$$

Схема действия горизонтальных изгибающих сил, повернутых в плоскость чертежа, показана на рисунке 6.2, *г*.

Для определения опорных реакций R_{Ax} и R_{Bx} составим уравнения статического равновесия вала:

$$\sum m_B = 0; \quad R_{Ax} \cdot 1,2 - 8908 \cdot 0,3 = 0;$$

$$R_{Ax} = \frac{2672,4}{1,2} = 2227 \text{ Н};$$

$$\sum m_A = 0; \quad R_{Bx} \cdot 1,2 - 8908 \cdot 0,9 = 0;$$

$$R_{Bx} = \frac{8017,2}{1,2} = 6681 \text{ Н}.$$

Выполним проверку:

$$\sum x = 0; \quad R_{Ax} - F_2 + R_{Bx} = 2227 - 8908 + 6681 = 0.$$

Построение эпюры изгибающих моментов M_y по участкам.

Участок 1 $(0 \le z_1 \le 0,4 \text{ м})$:

$$M_y = R_{Ax} \cdot z_1 = 2227 \cdot z_1;$$

$$z_1 = 0; \quad M_y = 0;$$

$$z_1 = 0,4 \text{ м}; \quad M_y = 891 \text{ Н·м}.$$

Участок 2 $(0 \le z_2 \le 0,5 \text{ м})$:

$$M_y = R_{Ax} \cdot (0,4 + z_2) = 2227 \cdot (0,4 + z_2);$$

$$z_2 = 0; \qquad M_y = 891 \text{ Н·м};$$

$$z_2 = 0{,}5 \text{ м}; \quad M_y = 2004 \text{ Н·м}.$$

Участок 3 $(0 \le z_3 \le 0{,}3\,\text{м})$:

$$M_y = R_{Bx} \cdot z_3 = 6681 \cdot z_3;$$

$$z_3 = 0; \qquad M_y = 0;$$

$$z_3 = 0{,}3 \text{ м}; \quad M_y = 2004 \text{ Н·м}.$$

Вычисляем значения полных изгибающих моментов $M_{изг}$ в характерных сечениях вала по формуле

$$M_{изг} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}\ .$$

$$M_{D_1} = \sqrt{1403^2 + 891^2} = 1662 \text{ Н·м}; \;\; M_{D_2} = \sqrt{638^2 + 2004^2} = 2103 \text{ Н·м};$$

$$M_A = 0; \qquad\qquad M_B = 0.$$

Эпюра полных изгибающих моментов $M_{изг}$ показана на рисунке 6.2.

Опасным сечением вала является сечение по месту расположения шкива диаметром D_2, т. к. в нем действуют наибольший изгибающий момент $M_{изг} = 2103$ Н·м и крутящий момент $M_{кр} = 579$ Н·м.

Определим значение эквивалентного момента в опасном сечении вала по четвертой теории прочности:

$$M_{экв}^{\text{IV}} = \sqrt{M_{изг}^2 + 0{,}75 \cdot M_{кр}^2} = \sqrt{2103^2 + 0{,}75 \cdot 579^2} = 2162 \text{ Н·м}.$$

Определим диаметр вала:

$$d = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_{экв}^{\text{IV}}}{\pi \cdot [\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 2162}{3{,}14 \cdot 80 \cdot 10^6}} = 0{,}065 \text{ м} = 65 \text{ мм}.$$

Диаметр вала принимаем равным $d = 65$ мм.

Контрольные вопросы

1 Перечислите внутренние силовые факторы, действующие при совместном действии изгиба и кручения.

2 Укажите, как построить суммарную эпюру изгибающего момента.

3 Укажите математические формулы для определения крутящего момента через мощность и частоту вращения.

4 Какие теории прочности Вы знаете?

5 Дайте определение эквивалентного напряжения.

6 Что такое опасное сечение? Как его определить?

7 Напишите формулу прочности при совместном действии изгиба и кручения.

8 Как определить диаметр вала при совместном действии изгиба и кручения?

9 Какие напряжения возникают в поперечных сечениях вала при совместном действии изгиба и кручения?

10 Как определяются окружные усилия и силы натяжения ремней?

7 Устойчивость центрально-сжатых стержней

Пример 1 – Подобрать поперечное сечение колонны в виде двух двутавров (рисунок 7.1) при помощи метода последовательных приближений, определить величину критической силы $P_{кр}$ и коэффициент запаса устойчивости. Допускаемое напряжение [σ] = 160 МПа.

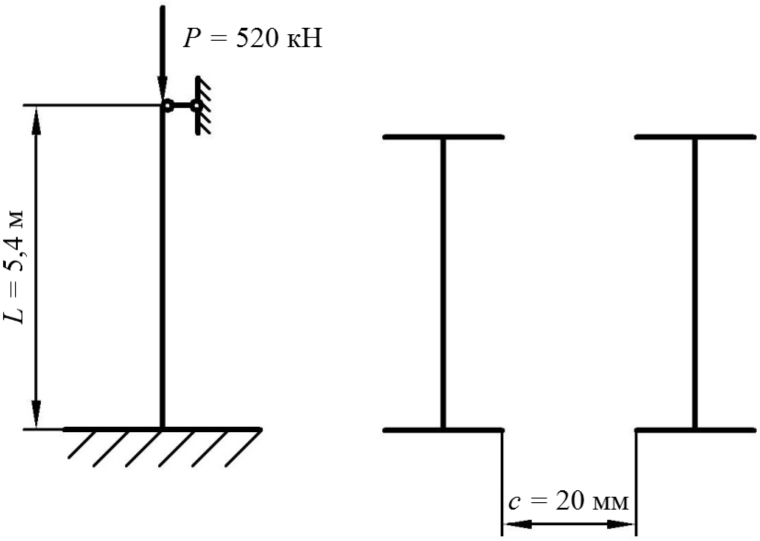


Рисунок 7.1 – Схема закрепления и поперечное сечение колонны

Решение

Расчет размеров поперечного сечения ведем методом последовательных приближений из условия устойчивости.

Первое приближение.

Пусть $\varphi_1 = 0{,}5$.

Тогда расчетная площадь одного двутавра

$$A_1^{расч} = \frac{1}{2}\cdot\frac{P}{\varphi_1\cdot[\sigma]} = \frac{520\cdot 10^3}{2\cdot 0{,}5\cdot 160\cdot 10^6} = 3{,}25\cdot 10^{-3}\ \text{м}^2 = 32{,}5\ \text{см}^2.$$

По ГОСТ 8239–89 выбираем двутавр № 24: $A_1^{дв} = 34{,}8\ \text{см}^2$; $I_{x1} = 3460\ \text{см}^4$;

$I_{y1} = 198$ см^4; $b_1 = 115$ мм.

Определяем геометрические характеристики всего сечения относительно главных центральных осей инерции X_c и $У_c$ (рисунок 7.2).

Площадь сечения определяем следующим образом:

$$A_1 = 2 \cdot A_1^{дв} = 2 \cdot 34,8 = 69,6 \quad \text{см}^2.$$

Главные центральные моменты инерции сечения определяем следующим образом:

$$I_{x_C 1} = 2 \cdot (I_{x1} + a^2 \cdot A_1) = 2 \cdot (3460 + 0^2 \cdot 34,8) = 6920 \quad \text{см}^4;$$

$$I_{y_C 1} = 2 \cdot \left(I_{y1} + b^2 \cdot A_1\right) = 2 \cdot (I_{y1} + (\frac{b_1}{2} + \frac{c}{2})^2 \cdot A_1) =$$

$$= 2 \cdot (198 + \left(\frac{11,5}{2} + \frac{2}{2}\right)^2 \cdot 34,8) = 3567,15 \quad \text{см}^4.$$

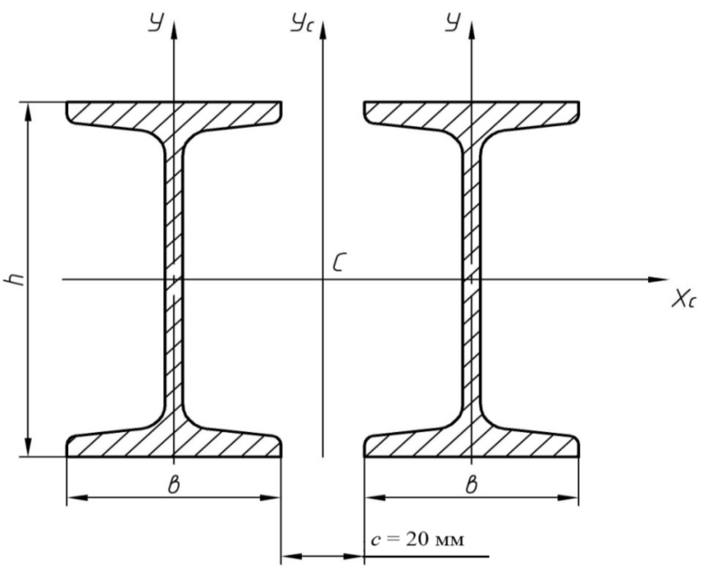


Рисунок 7.2 – Поперечное сечение колонны

Определяем главные центральные радиусы инерции.

$$i_{x_C 1} = \sqrt{\frac{I_{x_C 1}}{A_1}} = \sqrt{\frac{6920}{69,6}} = 9,97 \text{ см};$$

$$i_{y_c 1} = \sqrt{\frac{I_{y_c 1}}{A_1}} = \sqrt{\frac{3567,15}{69,6}} = 7,16 \text{ см}.$$

Определяем гибкость стержня относительно материальной оси *Xс*.

$$\lambda_{x1} = \frac{\mu \cdot L}{i_{x_c 1}} = \frac{0,7 \cdot 540}{9,97} = 37,91,$$

где μ – коэффициент приведения длины для заданной схемы закрепления колонны, μ = 0,7.

Определяем гибкость стержня относительно свободной оси *Ус*.

$$\lambda_{y1} = \sqrt{40^2 + \left(\frac{\mu \cdot L}{i_{yc1}}\right)^2} = \sqrt{40^2 + \left(\frac{0,7 \cdot 540}{7,16}\right)^2} = 66,24.$$

Дальнейший расчет ведем по максимальной гибкости $\lambda_{\max} = \lambda_{y1} = 66,24$.

Уточняем коэффициент продольного изгиба: $\varphi = 0,86$ при $\lambda = 60$, $\varphi = 0,81$ при $\lambda = 70$.

Линейно интерполируя, получаем

$$\varphi_1' = 0,86 - \frac{0,86 - 0,81}{70 - 60} \cdot (66,24 - 60) = 0,829.$$

Так как $\varphi_1 \neq \varphi_1'$, то проводим следующее приближение.

Второе приближение.

Коэффициент продольного изгиба рассчитываем по формуле

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi_1'}{2} = \frac{0,5 + 0,829}{2} = 0,6645.$$

Повторяем расчет, как в первом приближении.

$$A_2^{расч} = \frac{1}{2} \cdot \frac{P}{\varphi_2 \cdot [\sigma]} = \frac{520 \cdot 10^3}{2 \cdot 0,6645 \cdot 160 \cdot 10^6} = 2,445 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 24,45 \text{ см}^2.$$

По ГОСТ 8239–89 выбираем двутавр № 20: $A_2^{дв} = 26,8 \text{ см}^2$; $I_{x2} = 1840 \text{ см}^4$; $I_{y2} = 115 \text{ см}^4$; $b_2 = 100$ мм.

Геометрические характеристики сечения

$$A_2 = 2 \cdot A_2^{дв} = 2 \cdot 26,8 = 53,6 \text{ см}^2;$$

$$I_{x_c 2} = 2 \cdot 1840 = 3680 \text{ см}^4;$$

$$I_{y_c 1} = 2 \cdot (115 + \left(\frac{10}{2} + \frac{2}{2}\right)^2 \cdot 26,8) = 2159,6 \text{ см}^4;$$

$$i_{x_c 2} = \sqrt{\frac{I_{x_c 2}}{A_2}} = \sqrt{\frac{3680}{53,6}} = 8,29 \text{ см};$$

$$i_{y_c 2} = \sqrt{\frac{I_{y_c 2}}{A_2}} = \sqrt{\frac{2159,6}{53,6}} = 6,35 \text{ см}.$$

Гибкости колонны

$$\lambda_{x2} = \frac{\mu \cdot L}{i_{x_c 2}} = \frac{0,7 \cdot 540}{8,29} = 45,6;$$

$$\lambda_{yc} = \sqrt{40^2 + \left(\frac{\mu \cdot L}{i_{y_c 2}}\right)^2} = \sqrt{40^2 + \left(\frac{0,7 \cdot 540}{6,35}\right)^2} = 71,72;$$

$$\lambda_{\max} = \lambda_{y_c} = 71,72.$$

Уточняем коэффициент φ: при $\lambda = 70$ $\varphi = 0,81$, при $\lambda = 80$ $\varphi = 0,75$.
Тогда

$$\varphi_2' = 0,81 - \frac{0,8 - 0,75}{80 - 70} \cdot (71,72 - 70) = 0,8; \; \varphi_2 \neq \varphi_2'.$$

Третье приближение.
Коэффициент продольного изгиба определяем следующим образом:

$$\varphi_3 = \frac{\varphi_2 + \varphi_2'}{2} = \frac{0,6645 + 0,8}{2} = 0,732.$$

$$A_3^{расч} = \frac{1}{2} \cdot \frac{P}{\varphi_3 \cdot [\sigma]} = \frac{520 \cdot 10^3}{2 \cdot 0,732 \cdot 160 \cdot 10^6} = 2,22 \cdot 10^{-3} \text{м}^2 = 22,2 \text{ см}^2.$$

По ГОСТ 8239–89 выбираем двутавр № 18: $A_3^{дв} = 23,4 \text{ см}^2$; $I_{x3} = 1290$ см^4; $I_{y3} = 82,6 \text{ см}^4$; $b_3 = 90$ мм.

Геометрические характеристики сечения

$$A_3 = 2 \cdot A_3^{дв} = 2 \cdot 23,4 = 46,8 \text{ см}^2;$$

$$I_{x_c 3} = 2 \cdot 1290 = 2580 \text{ см}^4;$$

$$I_{y_c 3} = 2 \cdot (82,6 + \left(\frac{9}{2} + \frac{2}{2}\right)^2 \cdot 23,4) = 1580,9 \text{ см}^4;$$

$$i_{x_c3} = \sqrt{\frac{I_{x_c3}}{A_3}} = \sqrt{\frac{2580}{46,8}} = 7,42 \text{ см};$$

$$i_{y_c3} = \sqrt{\frac{I_{y_c3}}{A_3}} = \sqrt{\frac{1580,9}{46,8}} = 5,81 \text{ см}.$$

Гибкости колонны

$$\lambda_{x3} = \frac{\mu \cdot L}{i_{x_c3}} = \frac{0,7 \cdot 540}{7,42} = 50,49;$$

$$\lambda_{y3} = \sqrt{40^2 + \left(\frac{\mu \cdot L}{i_{y_c3}}\right)^2} = \sqrt{40^2 + \left(\frac{0,7 \cdot 540}{5,81}\right)^2} = 76,37;$$

$$\lambda_{\max} = \lambda_{y3} = 76,37.$$

Уточняем коэффициент φ:

$$\varphi_3' = 0,81 - \frac{0,8 - 0,75}{80 - 70} \cdot (76,37 - 70) = 0,772; \quad \varphi_3 \neq \varphi_3'.$$

Четвертое приближение.

Коэффициент продольного изгиба определяем следующим образом:

$$\varphi_4 = \frac{\varphi_3 + \varphi_3'}{2} = \frac{0,732 + 0,772}{2} = 0,752.$$

$$A_4^{расч} = \frac{1}{2} \cdot \frac{P}{\varphi_4 \cdot [\sigma]} = \frac{520 \cdot 10^3}{2 \cdot 0,752 \cdot 160 \cdot 10^6} = 2,16 \cdot 10^{-3} \text{м}^2 = 21,6 \text{ см}^2.$$

По ГОСТ 8239–89 повторно выпадает двутавр № 18. Проверяем его устойчивость $(A = 46,8 \text{ см}^2; \lambda_{\max} = 76,37;\ \varphi = 0,772)$:

$$\sigma_{уст} = \frac{P}{A} = \frac{520 \cdot 10^3}{46,8 \cdot 10^{-4}} = 11,1 \cdot 10^7 \text{ Па} = 111 \text{ МПа};$$

$$\varphi[\sigma] = 0,772 \cdot 160 = 123,52 \text{ МПа};$$

$$\sigma = 111 \text{ МПа} < \varphi \cdot [\sigma] = 123,52 \text{ МПа}.$$

Условие устойчивости соблюдается.

Так как значение максимальной гибкости для выбранного сечения не превышает предельного значения гибкости для стали $(\lambda_{\max} = 76,37 < \lambda_{пред} = 100)$, то критическую силу определяем по формуле Ясинского:

$$P_{кр} = \left(a - b \cdot \lambda_{\max}\right) \cdot A,$$

где a, b – коэффициенты формулы Ясинского, зависящие от материала, a = 310 МПа, b = 1,14 МПа – для малоуглеродистой стали.

$$P_{кр} = (310 - 1{,}14 \cdot 76{,}37) \cdot 10^6 \cdot 46{,}8 \cdot 10^{-4} = 1043{,}35 \cdot 10^3\,\text{Н} = 1043{,}35\,\text{кН}.$$

Коэффициент запаса устойчивости

$$n_{уст} = \frac{P_{кр}}{P} = \frac{1043{,}35}{520} \approx 2.$$

Вывод: для заданной колонны выбрано поперечное сечение, состоящее из двух двутавров № 18, для которого выполняется условие устойчивости с коэффициентом запаса 2.

Контрольные вопросы

1 Что понимают под устойчивостью деформируемых систем?

2 Назовите формы равновесия системы.

3 Какую силу называют критической?

4 Как определяют коэффициент запаса устойчивости?

5 Запишите формулу Эйлера для расчета критической силы.

6 В каких случаях применяется формула Эйлера для расчета критической силы?

7 Что такое коэффициент приведения длины?

8 От каких факторов зависит величина коэффициента приведения длины?

9 Запишите формулу Ясинского для расчета критической силы.

10 В каких случаях применяется формула Ясинского для расчета критической силы?

11 Какие геометрические характеристики используют в расчете на устойчивость?

12 Сформулируйте условие устойчивости для центрально сжатой колонны.

8 Энергетические методы определения перемещений

Пример 1 – Определить линейное перемещение y_B и угловое перемещение Θ_C методом Верещагина при EI_x = const.

Решение

Строим грузовую эпюру, предварительно определив изгибающие моменты.

Строим эпюры моментов от единичной силы и от единичного момента.

Определяем перемещения путем перемножения соответствующих эпюр.

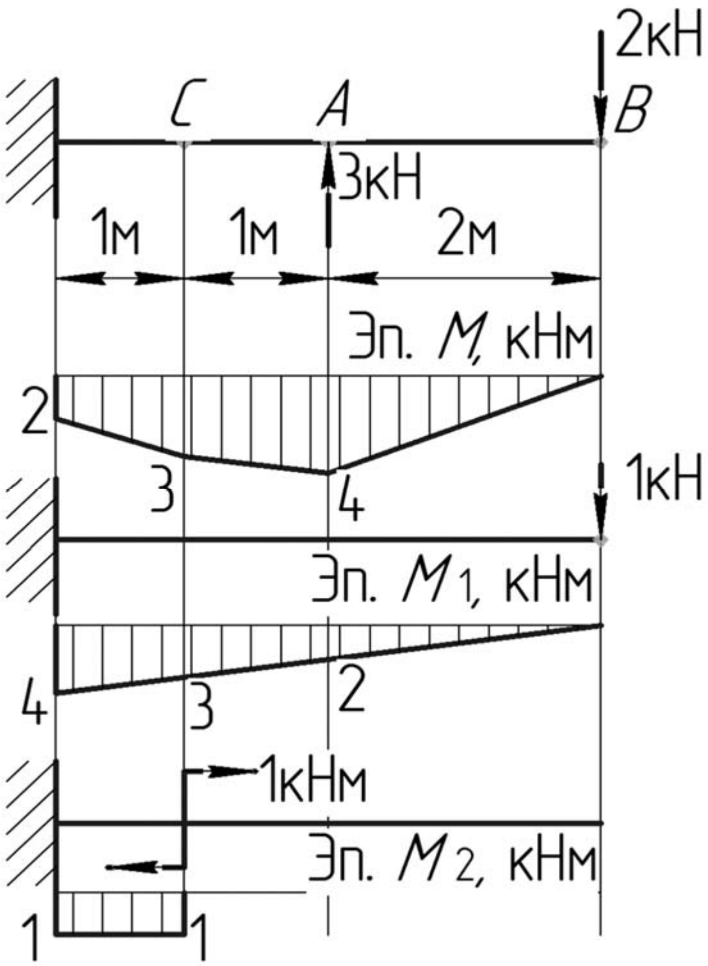


Рисунок 8.1 – Расчетная схема и эпюры моментов

Можно использовать готовую формулу перемножения трапеций, которая имеет вид:

$$\frac{l}{6}\cdot\left(2\cdot a\cdot c+2\cdot b\cdot d+a\cdot d+c\cdot b\right),$$

где a, b, c, d – основания трапеций.

Определяем линейное перемещение:

$$y_B=\left(\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\cdot\frac{2}{3}\cdot 4\right)+\frac{1}{6}\cdot\left(2\cdot 3\cdot 3+2\cdot 4\cdot 2+4\cdot 3+2\cdot 3\right)+$$

$$+\frac{1}{6}\cdot\left(2\cdot 2\cdot 4+2\cdot 3\cdot 3+3\cdot 4+2\cdot 3\right)=\frac{68}{3}=22{,}67\text{ ед.}$$

Находим угловое перемещение:

$$\Theta_C=\frac{2+3}{2}\cdot 1\cdot 1=2{,}5\text{ ед.}$$

9 Расчет статически неопределимых стержневых систем

9.1 Расчеты на прочность и жесткость при растяжении-сжатии в статически неопределимых системах

Пример 1 – Проверить прочность ступенчатого стального бруса (рисунок 9.1), если площадь поперечного сечения A = 3 см^2, модуль упругости $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, расчетное сопротивление R = 160 МПа, коэффициент $\gamma_c = 1$.

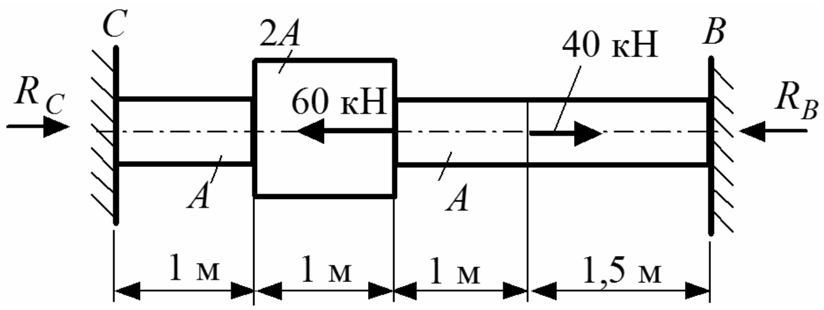


Рисунок 9.1 – Схема ступенчатого бруса

Решение

Составим уравнение статического равновесия:

$$\sum X = R_C - 60 + 40 - R_B = 0 .$$

Стержень один раз статически неопределим, т. к. единственное уравнение статики содержит две неизвестные реакции, для определения которых необходимо составить дополнительно одно деформационное уравнение:

$$\Delta l_P + \Delta l_R = 0,$$

где Δl_P, Δl_R – деформации стержня от внешних сил и реакций на опорах соответственно.

Используем принцип независимости действия сил. Мысленно отбросим опору C и представим заданный стержень под действием внешних сил с построением эпюры N_P и под действием реакции R_C с построением эпюры N_R (рисунок 9.2).

Выразим абсолютные деформации стержня на каждом участке в долях от жесткости поперечного сечения:

$$\Delta\ell_P = \sum_{\mathrm{i}=1}^{4} \frac{\mathrm{N_i} \cdot \ell_\mathrm{i}}{E_\mathrm{i} \cdot A_\mathrm{i}} = 0 + 0 + \frac{60 \cdot 1}{E \cdot A} + \frac{20 \cdot 1{,}5}{E \cdot A} = \frac{90}{E \cdot A};$$

$$\Delta\ell_R = \sum_{i=1}^{4} \frac{N_i \cdot \ell_i}{E_i \cdot A_i} = -\frac{R_C \cdot 1}{E \cdot A} - \frac{R_C \cdot 1}{E \cdot 2A} - \frac{R_C \cdot 1}{E \cdot A} - \frac{R_C \cdot 1{,}5}{E \cdot A} = -\frac{4 \cdot R_C}{E \cdot A}.$$

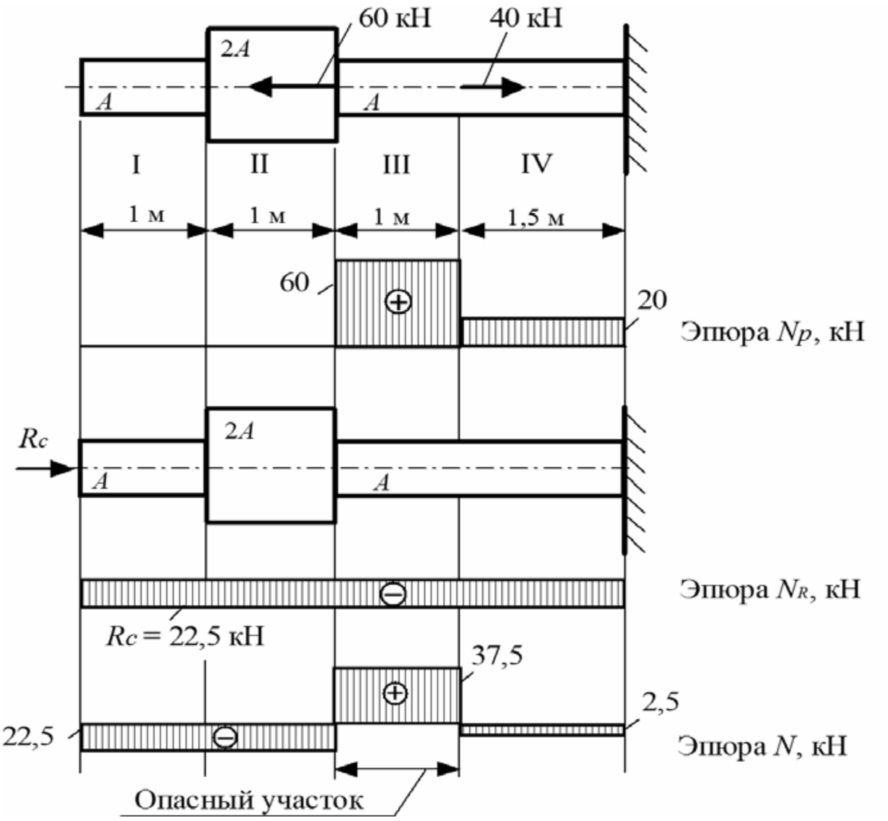


Рисунок 9.2 – Абсолютные деформации стержня в долях в долях от жесткости

Решим деформационное уравнение

$$\Delta\ell = \frac{90}{E \cdot A} - \frac{4 \cdot R_C}{E \cdot A} = 0,$$

откуда R_C = 22,5 кН.

Окончательную эпюру продольных сил N строим суммированием эпюр N_P и N_R. Производим проверку прочности на опасном участке III.

$$\sigma_{max} = \left(\frac{N}{A}\right)_{max} = \frac{37{,}5 \cdot 10^3}{3 \cdot 10^{-4}} = 125 \cdot 10^6 \text{ Па} = 125 \text{ МПа} < R \cdot \gamma_c = 160 \text{ МПа}.$$

9.2 Расчеты на прочность и жесткость статически неопределимых балок

Пример 2 – Подобрать необходимое поперечное сечение в виде двутавра для статически неопределимой балки (рисунок 9.3), если допускаемое напряжение [σ] = 160 МПа.

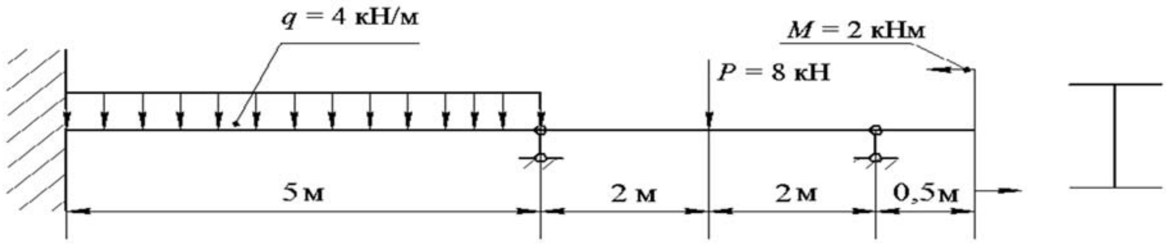


Рисунок 9.3 – Расчетная схема статически неопределимой балки

Решение

Находим степень статической неопределимости [5]:

$$S = 5 - 3 = 2\,.$$

Образовываем основную систему, отбрасывая две «лишние» связи. Проще всего в качестве основной системы выбирать конструкцию с жестким защемлением (рисунок 9.4, *б*).

Составляем систему канонических уравнений метода сил:

$$\begin{cases} \delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \Delta_{1P} = 0; \\ \delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \Delta_{2P} = 0. \end{cases}$$

Показываем расчетные схемы и строим единичные эпюры изгибающих моментов $\overline{M_1}$ и $\overline{M_2}$ от действия $\overline{X_1} = 1$ и $\overline{X_2} = 1$, а также грузовую эпюру моментов M_P от действия заданной нагрузки (рисунок 9.4, *в–з*). Перемножая эпюры соответствующим образом, находим коэффициенты уравнения:

$$\delta_{11} = \frac{\overline{M_1} \cdot \overline{M_1}}{EI} = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 9 \cdot \frac{2}{3} \cdot 9 = \frac{729}{3 \cdot EI}\,;$$

$$\delta_{22} = \frac{\overline{M_2} \cdot \overline{M_2}}{EI} = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 5 = \frac{125}{3 \cdot EI}\,;$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{\overline{M_1} \cdot \overline{M_2}}{EI} = \frac{1}{EI} \cdot \frac{5}{6} \cdot \left(2 \cdot 9 \cdot 5 + 5 \cdot 4\right) = \frac{275}{3 \cdot EI}\,;$$

$$\Delta_{1P} = \frac{M_P \cdot \overline{M_1}}{EI} = \frac{1}{EI} \cdot (-2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{2}{6} \cdot \left(-2 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \cdot 14 + 14 \cdot 2 - 2 \cdot 4\right) +$$

$$+ \frac{5}{6} \cdot \left(2 \cdot 4 \cdot 14 + 2 \cdot 9 \cdot 104 + 14 \cdot 9 + 104 \cdot 4\right) - \frac{4 \cdot 5^3}{12} \cdot \frac{9 + 4}{2}) = \frac{5614{,}5}{3 \cdot EI}\,;$$

$$\Delta_{2P} = \frac{M_P \cdot \overline{M_2}}{EI} = \frac{1}{EI} \cdot (\frac{5}{6} \cdot \left(2 \cdot 5 \cdot 104 + 5 \cdot 14\right) - \frac{4 \cdot 5^3}{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 = \frac{2462,5}{3 \cdot EI}.$$

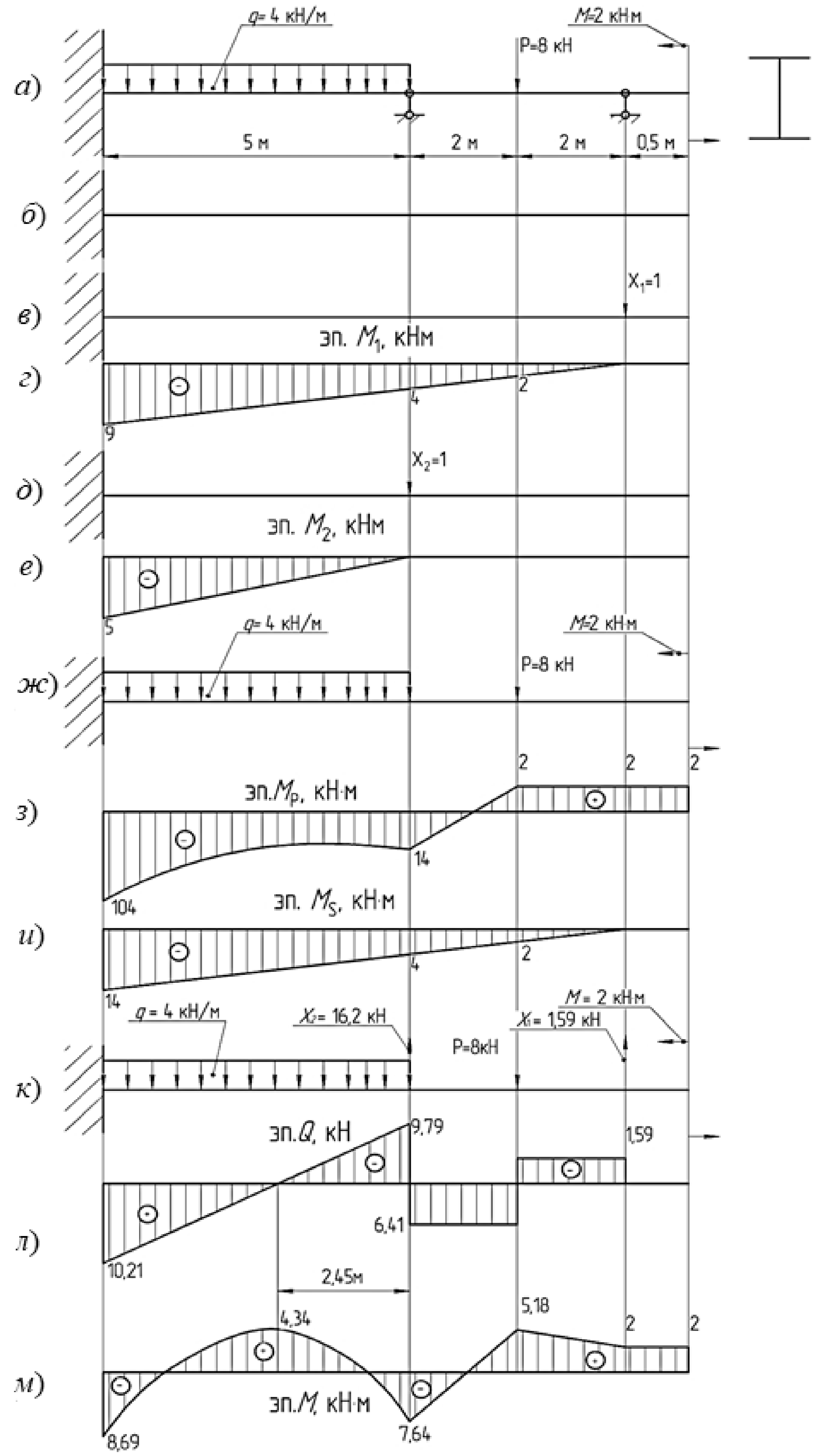


Рисунок 9.4 – К расчету статически неопределимой балки

Подставляя найденные коэффициенты в систему уравнений и решая ее, находим неизвестные усилия X_1 и X_2:

$$\begin{cases} \frac{729}{3\cdot EI}\cdot X_1+\frac{275}{3\cdot EI}\cdot X_2+\frac{5614,5}{3\cdot EI}=0; \\ \frac{275}{3\cdot EI}\cdot X_1+\frac{125}{3\cdot EI}\cdot X_2+\frac{2462,5}{3\cdot EI}=0; \end{cases} \qquad \begin{cases} 729\cdot X_1+275\cdot X_2+5614,5=0; \\ 275\cdot X_1+125\cdot X_2+2462,5=0; \end{cases}$$

$$X_1= \ -1,59\ \text{кН};\ X_2=-16,2\ \text{кН}.$$

Суммарная единичная эпюра $\overline{M_S}$, получаемая сложением ординат единичных эпюр по характерным участкам, отображена на рисунке 9.4, *и*.

Показываем расчетную схему балки, приложив внешнюю нагрузку и найденные усилия X_1 и X_2, причем направление X_1 и X_2 меняем на противоположное, т. к. по расчету они получились со знаком «–» (рисунок 9.4, *к*). Используя обычный метод сечений, строим эпюры Q и M (рисунок 9.4, *л*, *м*).

Проводим деформационную проверку:

$$\delta=\frac{M\cdot\overline{M_S}}{EI}=\frac{1}{EI}\cdot\Big(\frac{2}{6}\cdot\big(-2\cdot2\cdot5,18-2\cdot2\big)+\frac{2}{6}\cdot\big(-2\cdot5,18\cdot2+2\cdot4\cdot7,64+$$

$$+\,7,64\cdot2-5,18\cdot4\big)+\frac{5}{6}\cdot(2\cdot14\cdot8,69+2\cdot7,64\cdot4+8,69\cdot4+7,64\cdot14)-$$

$$-\frac{4\cdot5^3}{12}\cdot\frac{14+4}{2}\Big)=\frac{383,453-383,24}{EI}=\frac{0,213}{EI}.$$

Процент расхождения

$$\delta=\frac{0,213}{383,24}\cdot100\ \%=0,06\ \%<3\ \%.$$

Из условия прочности при изгибе

$$\sigma_{\max}=\frac{M_{\max}}{W_x}\le[\sigma]$$

выражаем осевой момент сопротивления

$$W_x\ge\frac{M_{\max}}{[\sigma]}=\frac{8,69\cdot10^3}{160\cdot10^6}=0,0543\cdot10^{-3}\text{м}^3=54,3\ \text{см}^3.$$

Полученному значению соответствует двутавр № 12 (ГОСТ 8239–89), у которого W_x = 58,4 см^3. Находим величину напряжения, возникающего в опасном сечении балки:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{8,69 \cdot 10^3}{58,4 \cdot 10^{-6}} = 148,8 \text{ МПа} < [\sigma] = 160 \text{МПа}.$$

Таким образом, выбранный двутавр № 12 работает с небольшим запасом прочности:

$$\delta = \frac{160 - 148,8}{148,8} \cdot 100\ \% = 7,5\ \%.$$

Вывод: для заданной балки выбрано поперечное сечение в виде двутавра № 12, для которого выполняется условие прочности.

10 Расчеты на прочность и жесткость при ударе

Пример 1 **–** На двутавровую стальную балку (рисунок 10.1) с высоты h падает груз весом G, если $h = 16$ мм; $G = 1,6$ кН; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа $= 2 \cdot 10^{11}$ Па; двутавр № 24: $W_x = 289$ см$^3 = 289 \cdot 10^{-6}$ м^3; $I_x = 3460$ см$^4 = 3460 \cdot 10^{-8}$ м^4.

Требуется найти максимальное нормальное напряжение, возникающее в балке.

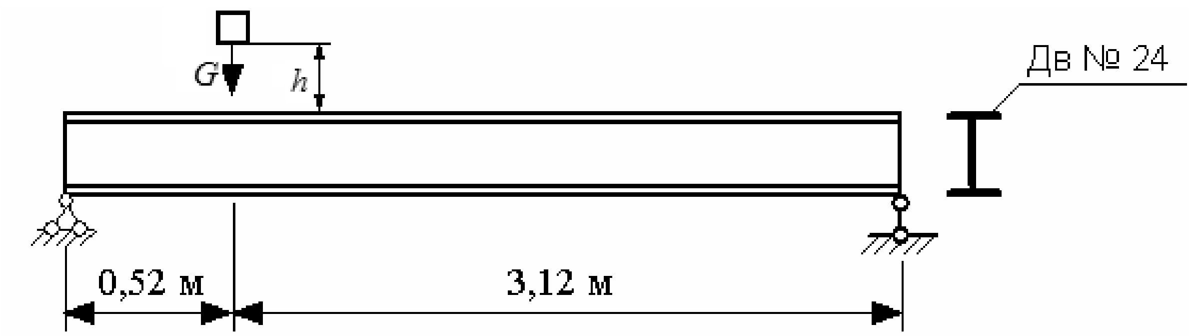


Рисунок 10.1 – Заданная схема балки

Решение

Для определения опасного сечения балки и деформаций в точке удара рассмотрим вспомогательные схемы, для которых построим эпюры изгибающих моментов (рисунок 10.2).

Для схемы балки, в которой груз G приложен статически, строится грузовая эпюра изгибающих моментов M_P (см. рисунок 10.2, *а*).

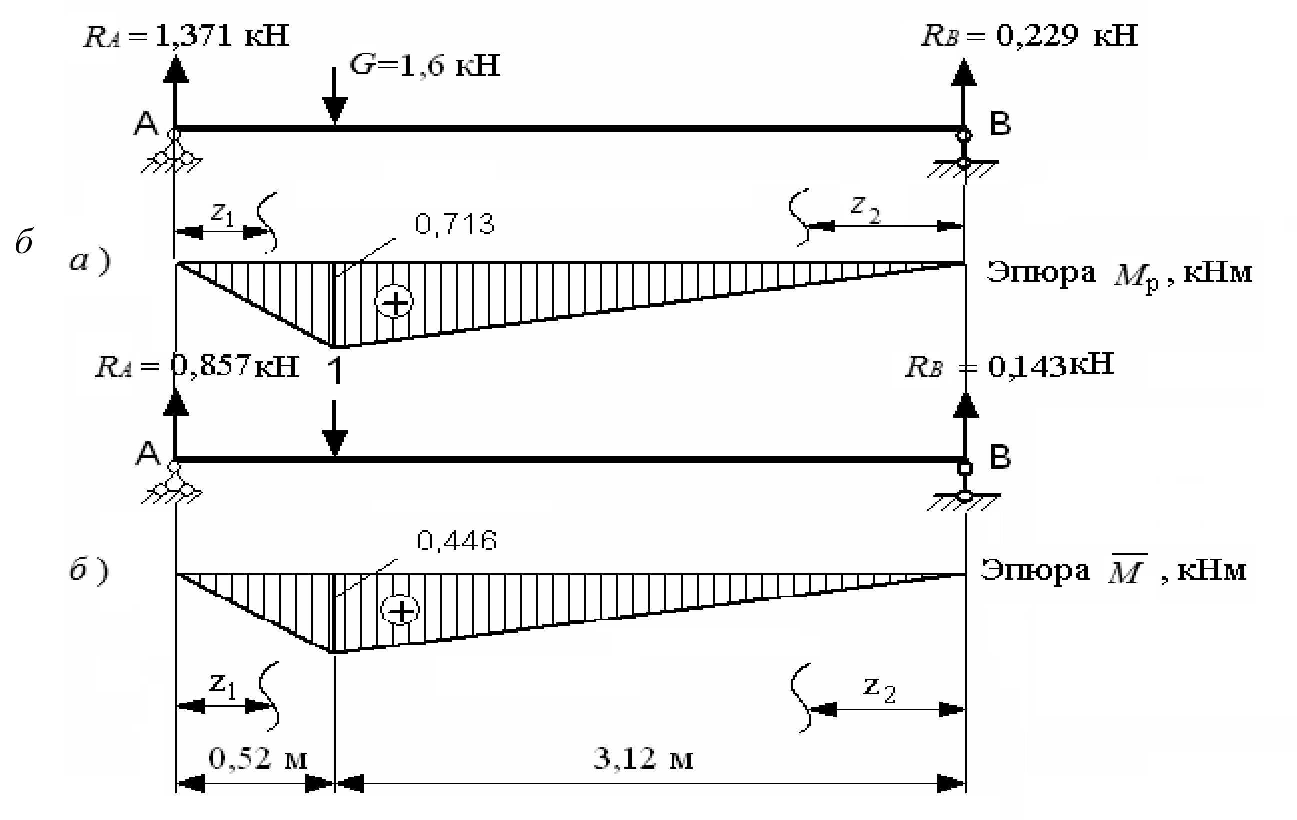
Определим реакции на опорах:

$$\sum M_A = 0; \quad G \cdot 0,52 - R_в \cdot 3,12 = 0;$$

$$R_в = \frac{1,6 \cdot 0,52}{3,12} = 0,229 \text{ кН};$$

$$\sum y = 0; \quad R_A + R_B - G = 0;$$

$$R_A = G - R_в = 1,6 - 0,229 = 1,371 \text{ кН}.$$



а – грузовая; *б* – единичная

Рисунок 10.2 – Вспомогательные схемы балки и эпюры изгибающих моментов

Рассчитаем ординаты эпюры $M_р$ по участкам:

– участок I: $0 \le z_1 \le 0,52$ м

$$M = R_A \cdot z_1 = 1,371 \cdot z_1;$$

$$z_1 = 0; \quad M = 0;$$

$$z_1 = 0,52 \text{ м}; \; M = 0,713 \text{ кН·м};$$

– участок II: $0 \le z_2 \le 3,12$ м

$$M = R_B \cdot z_2 = 0,229 \cdot z_2;$$

$$z_2 = 0; \quad M = 0;$$

$$z_2 = 3,12 \text{ м}; \; M = 0,713 \text{ кН·м}.$$

От схемы балки, в которой в месте падения груза приложена единичная сила, строится единичная эпюра изгибающих моментов $\overline{M}$ (рисунок 10.2, *б*).

Определим реакции на опорах:

$$\sum M_A = 0; \quad 1 \cdot 0,52 - R_B \cdot 3,12 = 0;$$

$$R_B = \frac{1 \cdot 0,52}{3,12} = 0,143 \ \text{ кН};$$

$$\sum y = 0; \quad R_A + R_B - 1 = 0;$$

$$R_A = 1 - R_B = 1 - 0,143 = 0,857 \ \text{ кН}.$$

Рассчитаем ординаты эпюры $\overline{M}$ по участкам:

– участок I: $0 \le z_1 \le 0,52$ м

$$M = \overline{R}_A \cdot z_1 = 0,857 \cdot z_1;$$

$$z_1 = 0; \quad M = 0;$$

$$z_1 = 0,52 \ \text{ м}; \quad M = 0,446 \ \text{ кН·м};$$

– участок II: $0 \le z_2 \le 3,12$ м

$$M = R_B \cdot z_2 = 0,143 \cdot z_2;$$

$$z_1 = 0; \quad M = 0;$$

$$z_2 = 3,12 \text{ м}; \quad M = 0,446 \ \text{ кН·м}.$$

По грузовой эпюре M_p определим опасное сечение, в котором $M_{\max} = 0,713$ кН·м.

Максимальное статическое напряжение

$$\sigma_{cm}{}^{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{0,713 \cdot 10^3}{289 \cdot 10^{-6}} = 2,47 \cdot 10^6 \ \text{Па} = 2,47 \text{ МПа}.$$

Рассчитаем статическое перемещение в точке удара по формуле Верещагина, перемножив эпюры $\overline{M}$ и M_p:

$$\Delta_{cm} = \frac{1}{E \cdot I_x}\left(\frac{1}{2} \cdot 0,713 \cdot 0,52 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,446 + \frac{1}{2} \cdot 0,713 \cdot 3,12 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,446\right) =$$

$$= \frac{0,386}{E \cdot I_x} = \frac{0,386 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 3460 \cdot 10^{-8}} = 0,0557 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

Определим динамический коэффициент по формуле

$$k_{\partial} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{cm}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 16}{0,0557}} = 25.$$

Определим максимальное динамическое напряжение

$$\sigma_{\partial}^{\max} = \sigma_{cm}^{\max} \cdot k_{\partial} = 2,47 \cdot 25 = 61,65 \text{ МПа}.$$

11 Расчеты на сдвиг

Пример 1 – Рассчитать заклепочное соединение двух листов одинакового сечения толщиной t = 16 мм, перекрытых двумя накладками (рисунок 11.1), если F = 500 кН, диаметр заклепки d = 20 мм. Допускаемые напряжения: $\sigma_{adm} = 160$ МПа; $\tau_{adm} = 90$ МПа; $\sigma_{con} = 320$ МПа.

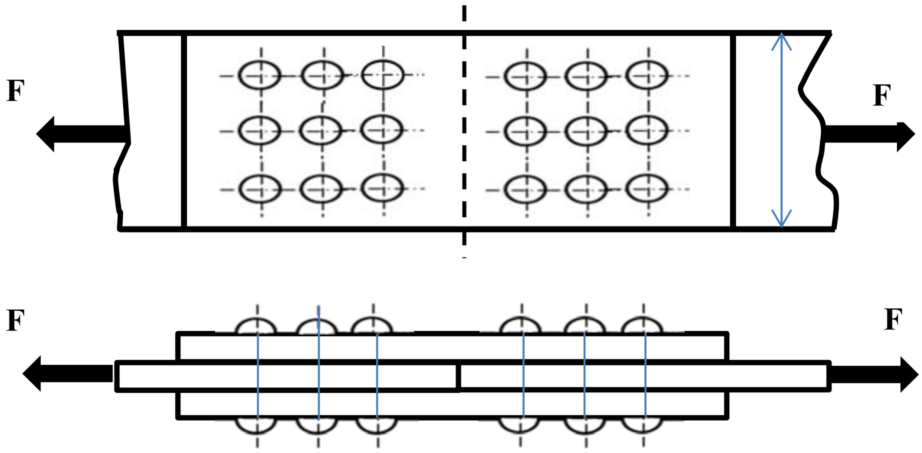


Рисунок 11.1 – Схема заклепочного соединения

Решение

В данном случае заклепки двухсрезные, т. к. для разрушения соединения необходимо, чтобы каждая заклепка срезалась по двум плоскостям. Определяем необходимое число срезов:

$$n = \frac{F}{\frac{\pi d^2}{4} \cdot \tau_{adm}} = \frac{500 \cdot 10^3 \cdot 4}{\pi \cdot (2 \cdot 10^{-2})^2 \cdot 90 \cdot 10^6} = 17,6 \text{ срезов.}$$

Следовательно, необходимо принять девять заклепок.

Необходимое число заклепок по смятию определяем по формуле

$$n' = \frac{F}{t \cdot d \cdot \sigma_{con}} = \frac{500 \cdot 10^6}{16 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^{-2} \cdot 320 \cdot 10^6} = 5{,}85 \text{ шт.}$$

Принимаем шесть заклепок.

Решающим явился расчет на срез. Принимаем девять заклепок – с каждой стороны стыка в три ряда по три заклепки в ряд (см. рисунок 11.1). Подберем площадь поперечного сечения листа из расчета на растяжение:

$$A = \frac{F}{\sigma_{adm}} = \frac{500 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 31{,}3 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 31{,}3 \text{ см}^2.$$

При толщине t = 1,6 см ширина листа

$$b = \frac{A}{t} = \frac{31{,}3}{1{,}6} = 19{,}5 \text{ см.}$$

К этой рабочей ширине надо добавить ширину отверстий 3d = 6 см, тогда получим полную ширину листа B = 19, 5 + 6 = 25, 5 см. Этой ширины вполне достаточно для размещения трех заклепок (расстояние между центрами заклепок принимаем равным 3d). Толщина $t_н$ каждой накладки должна быть не менее половины толщины листа; принимаем $t_н$ = 0,8 см.

Список литературы

1 **Александров, А. В.** Сопротивление материалов: учебник / А. В. Александров, В. Д. Потапов, Б. П. Державин. – 2-е изд., испр. – Москва: Высшая школа, 2000. – 560 с.

2 **Окопный, Ю. А.** Механика материалов и конструкций: учебник / Ю. А. Окопный, В. П. Радин, В. П. Чирков. – 2-е изд., доп. – Москва: Машиностроение, 2002. – 436 с.

3 **Писаренко, Г. С.** Справочник по сопротивлению материалов / Г. С. Писаренко, Ф. П. Яковлев, В. В. Матвеев. – 5-е изд., перераб. и доп. – Киев: Дельта, 2008. – 816 с.

4 **Подскребко, М. Д.** Сопротивление материалов: учебник / М. Д. Подскребко. – Минск: Вышэйшая школа, 2007. – 797 с.

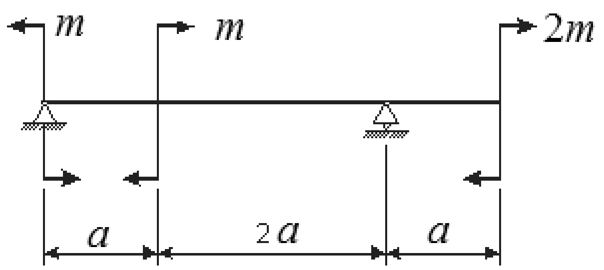
Приложение А
(рекомендуемое)

Примеры заданий для самостоятельной работы

Примеры заданий для самостоятельной работы по теме 2

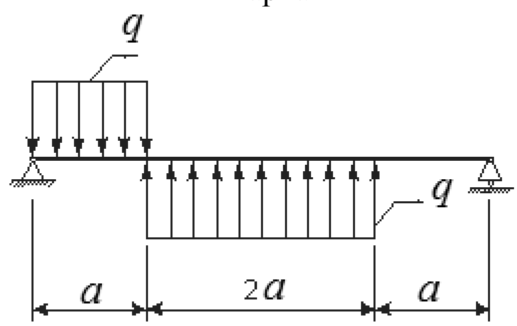
Исходные данные представлены на рисунке А.1.
Требуется построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов.

Вариант 1



m = 20 кН·м; a = 2 м

Вариант 2



a = 1,5 м; q = 12 кН/м

Рисунок А.1 – Примеры заданий для самостоятельной работы

Примеры заданий для самостоятельной работы по теме 3

Для расчетных схем заданий для самостоятельной работы, представленных на рисунке А.2, требуется:

1) построить эпюры нормальных (продольных) сил и нормальных напряжений;

2) определить перемещение свободного конца.

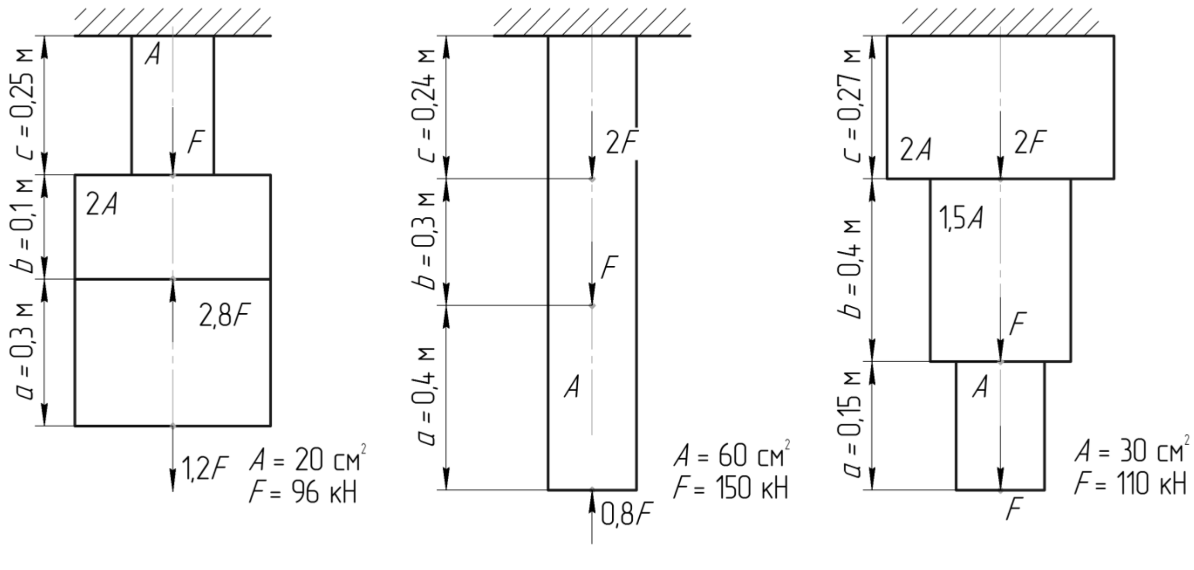


Рисунок А.2 – Задания для самостоятельной работы

Примеры заданий для самостоятельной работы по теме 4

Подобрать поперечное сечение балки в виде двутавра из условия прочности по нормальным напряжениям для расчетных схем, представленных на рисунке А.3, если допускаемое напряжение $[\sigma] = 160$ МПа.

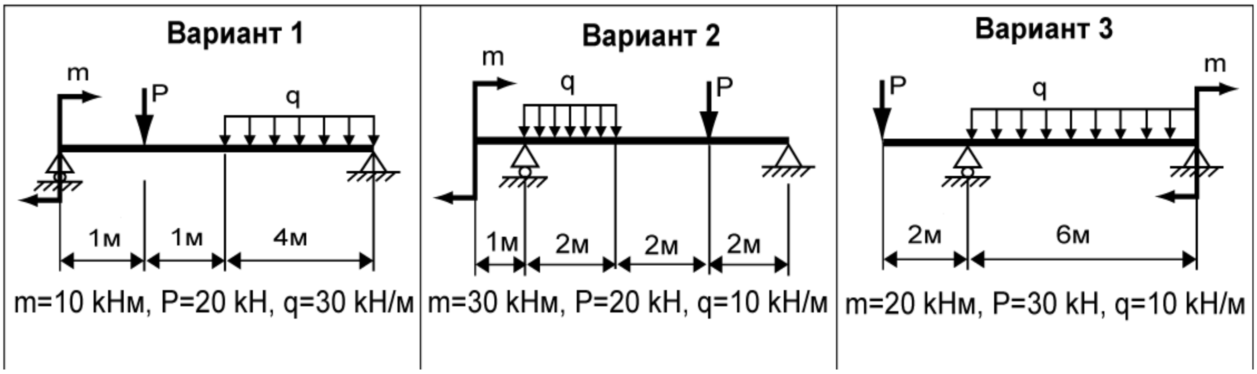


Рисунок А.3 – Задания для самостоятельной работы

Примеры заданий для самостоятельной работы по теме 5

Для расчетных схем, представленных на рисунке А.4, требуется:

1) определить значения моментов M_1, M_2, M_3, M_4;

2) построить эпюру крутящих моментов;

3) определить диаметр вала из условий прочности и жесткости, приняв поперечное сечение стержня в виде окружности.

Окончательно принимаемое значение диаметра должно быть округлено до ближайшего четного или оканчивающегося на пять числа.

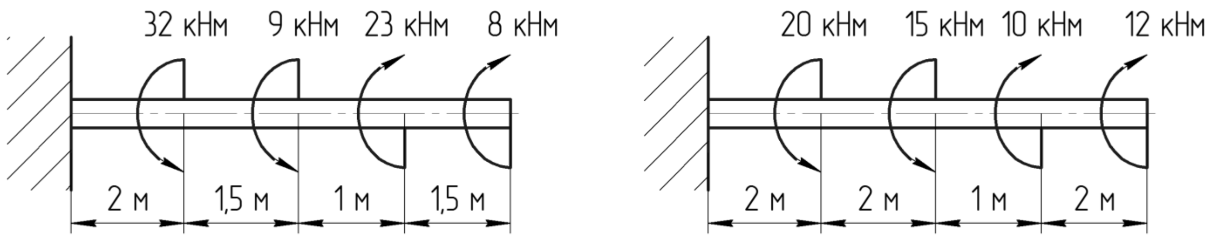


Рисунок А.4 – Задания для самостоятельной работы

Примеры заданий для самостоятельной работы по теме 6

1 Проверить прочность балки (рисунок А.5), если $[\sigma] = 160$ МПа, $F1 = 30$ кН, $F2 = 10$ кН, $q = 25$ кН/м, $a = 2$ м, $b = 1{,}5$ м, $c = 1$ м.

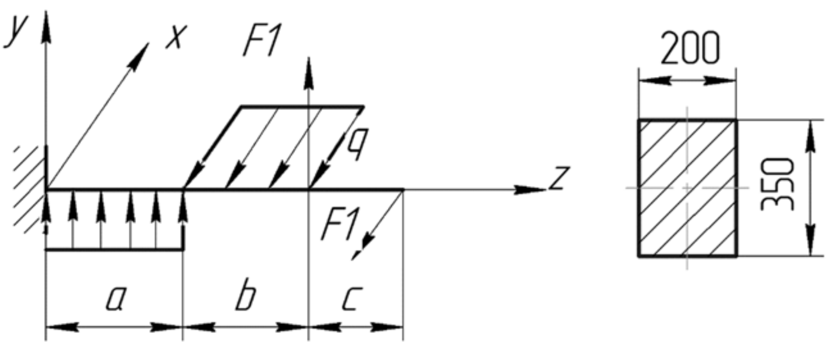


Рисунок А.5 – Расчетная схема

2 Определить размеры поперечного сечения балки (рисунок А.8), если $[\sigma] = 160\,\text{МПа}$, m = 20 кН·м, $F2$ = 15 кН, q = 10 кН/м, a = 1 м, b = 2 м, c = 1 м.

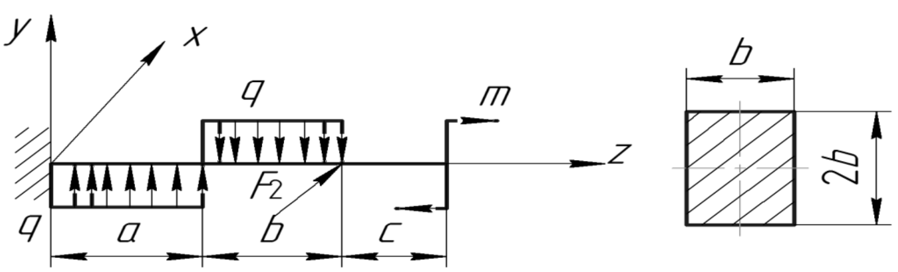


Рисунок А.6 – Расчетная схема

3 На вал круглого сплошного сечения диаметром d насажены шестерня средним диаметром D_1 и шкив ременной передачи диаметром D_2 (рисунок А.7). Вес шкива равен G, собственными весами вала и шестерни пренебречь. Вал делает n оборотов в минуту и передает мощность, равную N киловатт. Допускаемое напряжение материала вала $[\sigma] = 80\,\text{МПа}$.

Определить необходимый диаметр вала по четвертой теории прочности.

Исходные данные к задаче представлены в таблице А.1.

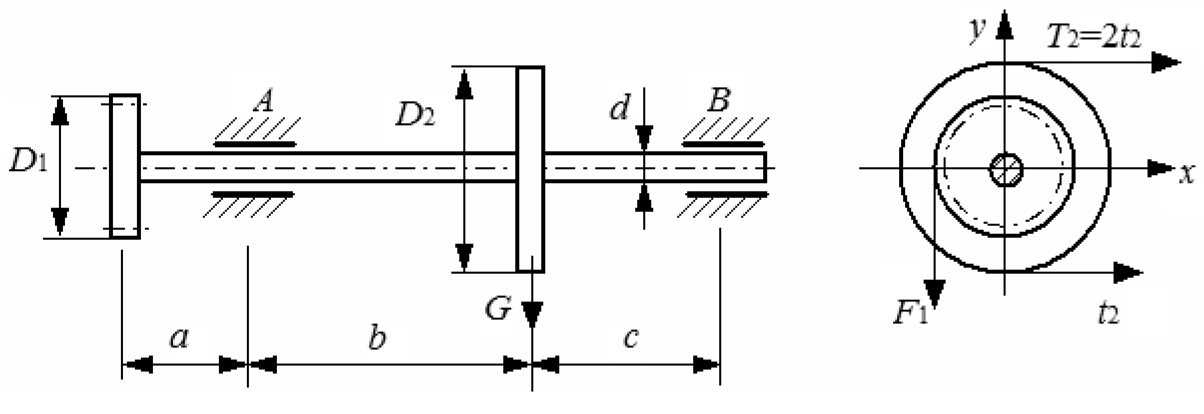


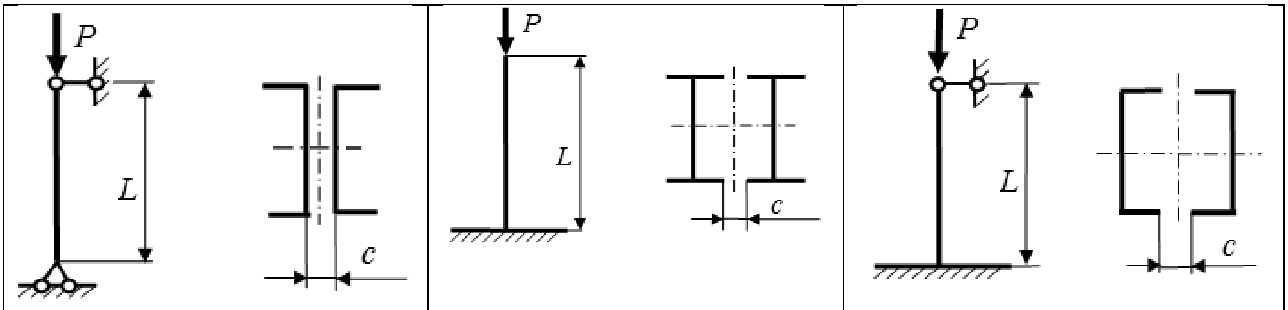
Рисунок А.7 – Расчетная схема вала

Таблица А.1 – Значения исходных данных

Номер строки	N, кВт	n, об/мин	G, Н	a, м	b, м	c, м	D_1, мм	D_2, мм
1	10	1100	200	0,11	0,41	0,31	110	310
2	20	1200	220	0,12	0,42	0,32	120	320

Примеры заданий для самостоятельной работы по теме 7

Подобрать размеры поперечного сечения колонны (рисунок А.8) при помощи метода последовательных приближений, определить величину критической силы $P_{кр}$ и коэффициент запаса устойчивости. Допускаемое напряжение $[\sigma]$ = 160 МПа.



L = 2,5 м, P = 250 кН, c = 15 мм	L = 2 м, P = 320 кН, c = 20 мм	L = 2,8 м, P = 180 кН, c = 25 мм

Рисунок А.8 – Задания для самостоятельной работы

Примеры заданий для самостоятельной работы по теме 8

Для приведенных расчетных схем (рисунок А.9) определить линейное перемещение y_B, и угловое перемещение Θ_A методом Верещагина при EI_x = const.

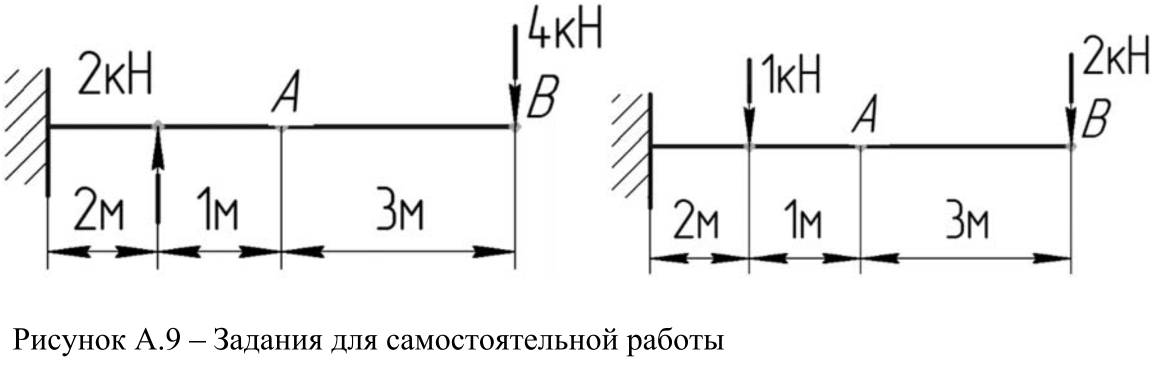
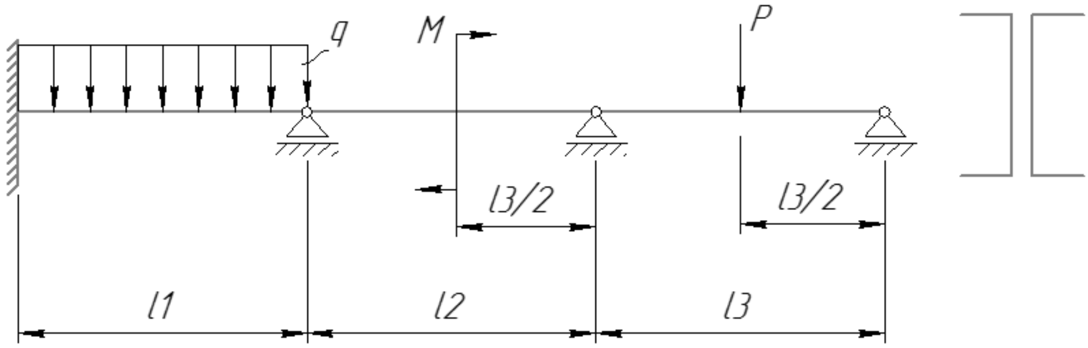


Рисунок А.9 – Задания для самостоятельной работы

Примеры заданий для самостоятельной работы по теме 9

Подобрать необходимое поперечное сечение для статически неопределимых балок (рисунок А.10), если допускаемое напряжение $[\sigma]$ = 160 МПа.



$l_1 = 1$ м; $l_2 = 2$ м; $l_3 = 3$ м; $P = 25$ кН; $q = 20$ кН/м; $m = 10$ кН·м

Рисунок А.10 – Задания для самостоятельной работы

Примеры заданий для самостоятельной работы по теме 10

На двутавровую стальную балку (рисунок А.11) с высоты *h* падает груз *G*. Модуль продольной упругости материала $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

Требуется найти максимальное нормальное напряжение в балке.

Исходные данные берутся из таблицы А.2.

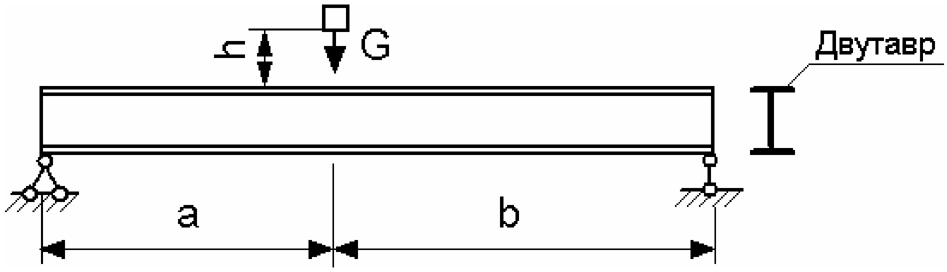


Рисунок А.11 – Расчетная схема для самостоятельной работы

Таблица А.2 – Исходные данные

Номер строки	*a*, м	*b*, м	*h*, мм	Номер двутавра	*G*, кН
1	1,1	3,1	11	14	2,1
2	1,2	3,2	12	16	2,2
3	1,3	3,3	13	18	2,3