

МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Транспортные и технологические машины»

# КОМПЬЮТЕРНЫЕ МОДЕЛИ АВТОМОБИЛЕЙ

*Методические рекомендации к лабораторным работам  
для студентов специальности  
1-37 01 02 «Автомобилестроение (по направлениям)»  
дневной формы обучения*



Могилев 2023

УДК 629.113  
ББК 39.33  
К33

Рекомендовано к изданию  
учебно-методическим отделом  
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Транспортные и технологические машины»  
«28» февраля 2023 г., протокол № 7

Составитель д-р техн. наук, проф. В. П. Тарасик

Рецензент канд. техн. наук, доц. А. Е. Науменко

Изложены методики построения математических моделей механизмов автомобиля, моделирования переходных процессов, оценки качества и эффективности их функционирования.

Учебное издание

## КОМПЬЮТЕРНЫЕ МОДЕЛИ АВТОМОБИЛЕЙ

|                         |                  |
|-------------------------|------------------|
| Ответственный за выпуск | И. В. Лесковец   |
| Корректор               | И. В. Голубцова  |
| Компьютерная верстка    | Н. П. Полевничая |

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.  
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 26 экз. Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение:  
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования  
«Белорусско-Российский университет».

Свидетельство о государственной регистрации издателя,  
изготовителя, распространителя печатных изданий  
№ 1/156 от 07.03.2019.

Пр-т Мира, 43, 212022, г. Могилев.

© Белорусско-Российский  
университет, 2023

## Содержание

|  |    |
|--|----|
| Введение .....   | 4  |
| Физические основы структурно-матричного метода математического<br>моделирования технических систем.....          | 5  |
| Лабораторная работа № 1. Моделирование простейшей механической<br>вращательной системы .....                     | 10 |
| Лабораторная работа № 2. Моделирование трансмиссии автомобиля .....  | 21 |
| Лабораторная работа № 3. Моделирование подвески автомобиля.....  | 26 |
| Лабораторная работа № 4. Моделирование гидравлической системы .....  | 32 |
| Лабораторная работа № 5. Исключение топологических вырождений<br>динамических моделей технических объектов ..... | 39 |
| Лабораторная работа № 6. Упрощение динамических моделей<br>механических систем.....                              | 43 |
| Список литературы .....  | 48 |

## Введение

Целью выполнения лабораторных работ является освоение методики построения математических моделей механизмов автомобиля, приобретение опыта моделирования переходных процессов, оценки качества и эффективности их функционирования.

Каждый студент получает индивидуальное задание на математическое моделирование конкретного механизма автомобиля. Структура механизма задаётся либо в виде динамической модели, либо принципиальной схемы и сопровождается исходными данными, необходимыми для определения параметров динамической модели исследуемого объекта. Определение значений параметров элементов модели (инерционных, упругих, диссипативных, трансформаторных, фрикционных), отсутствующих в задании, выполняется студентами до начала проведения лабораторного занятия, используя учебники и справочную литературу [1, 5, 6].

На лабораторных занятиях студенты выполняют построение математических моделей объектов исследования, подготовку программного обеспечения, реализующего вычислительный процесс, тестирование программы и получение результатов моделирования в виде таблиц числовых значений определяемых параметров и графиков переходных характеристик. Программирование осуществляется на основе ПО *MATLAB*.

Выполненные лабораторные работы оформляются в виде отдельных отчетов по каждой работе и представляются на кафедру. Оформление отчета и защита каждой выполненной лабораторной работы должны осуществляться в течение семи дней после проведенного лабораторного занятия.

Отчет по лабораторной работе должен содержать исходные данные (принципиальная схема с параметрами её компонентов, динамическая модель, воздействия внешней среды), а также вычисленные или заданные параметры элементов динамической модели, полученные математические модели статического состояния и переходных процессов, топологические и компонентные уравнения системы, таблицы матриц Якоби систем уравнений статики и динамики с выражениями для вычисления элементов этих матриц, оргграф, матрицы инцидентий и трансформаторных элементов.

В отчёте приводятся все полученные результаты расчётов и графики исследуемых характеристик. На графиках переходных характеристик моментов или усилий в упругих элементах отображается получение выходных параметров – показателей качества и эффективности моделируемого объекта. В заключение даётся оценка выполнения технических требований на эти показатели.

Лабораторные работы выполняются студентами в компьютерных классах университета. Перед началом выполнения планируемого цикла работ преподаватель знакомит студентов с правилами охраны труда и оформляет протокол проверки знаний этих правил. Контроль за выполнением студентами правил охраны труда осуществляет преподаватель, проводящий лабораторные занятия.

## Физические основы структурно-матричного метода математического моделирования технических систем

Методология математического моделирования технических объектов базируется на системном подходе. Объект исследования или проектирования рассматривается как сложная система, состоящая из упорядоченного множества взаимосвязанных элементов с различными физическими свойствами, функционирование которой происходит под воздействием внешней среды.

Построение математических моделей технических объектов осуществляется на основе его динамической модели. *Динамическая модель – это абстрактное графическое отображение физических свойств технического объекта и характеристик взаимодействия с внешней средой* [1].

Основное требование к процессу построения адекватной динамической модели – соблюдение *закона сохранения энергии*.

Механизмы автомобиля (трансмиссия, подвеска, тормоза и др.) состоят из совокупности взаимосвязанных дискретных элементов. Каждый из них обладает одновременно всеми физическими свойствами, характерными для механической системы, – инерционными, упругими, диссипативными. Однако в зависимости от конфигурации и конкретных геометрических размеров элемента то или иное его свойство будет существенно преобладающим. Эта особенность дискретных элементов объекта положена в основу *метода сосредоточенных масс*. Сущность метода заключается в том, что выделяют абстрактные материальные элементы, наделяя каждый из них только одним физическим свойством. Инерционными свойствами в этом методе обладают элементы, называемые *сосредоточенными массами*, откуда и вытекает наименование метода. Остальные элементы лишены массы, следовательно, они безынерционные и отображают характер взаимодействия сосредоточенных масс в динамической модели.

Количество выделяемых сосредоточенных масс в динамической модели равно числу её степеней свободы. Если твёрдое тело совершает поступательное или вращательное движение относительно одной координатной оси, тогда оно имеет одну степень свободы и представляется одной сосредоточенной массой. При плоском движении твёрдого тела оно имеет три степени свободы, поэтому его инерционные свойства отображаются тремя сосредоточенными массами, две из них совершают поступательные движения, а третья – вращательное движение относительно соответствующих осей декартовой системы координат. Пространственное движение твёрдого тела требует введения шести сосредоточенных масс.

*Сосредоточенные массы обладают инерционными свойствами и способностью накапливать кинетическую энергию.*

Кинетическая энергия  $E_k$  поступательного движения твёрдого тела массой  $m$  вычисляется по формуле

$$E_k = \frac{mv^2}{2}, \quad (1)$$

где  $v$  – скорость движения, м/с.

При вращательном движении

$$E_k = \frac{J\omega^2}{2}, \quad (2)$$

где  $J$  – момент инерции твёрдого тела относительно оси вращения (параметр инерционного элемента), кг·м<sup>2</sup>;

$\omega$  – угловая скорость вращения, рад/с.

У реальных технических объектов количество сосредоточенных масс может быть весьма значительным, что требует использования многомерного фазового пространства. Положение масс отображается геометрическими координатами фазового пространства, а характер их движения – скоростями.

Описание физических свойств дискретных элементов, составляющих структуру динамической модели, осуществляется **компонентными уравнениями**. Название этих уравнений следует из того, что элементы являются компонентами динамической модели.

Компонентное уравнение инерционного элемента (сосредоточенной массы) получаем на основе **второго и третьего законов Ньютона**. Согласно **второму закону Ньютона** ускорение материальной точки  $\vec{a}$  пропорционально силе  $\vec{F}_B$  источника внешней среды, приложенной к этой точке, и обратно пропорционально её массе  $m$ ; направление вектора ускорения  $\vec{a}$  совпадает с направлением вектора силы  $\vec{F}_B$ :

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_B}{m}. \quad (3)$$

Согласно **третьему закону Ньютона** силы, с которыми действуют друг на друга взаимодействующие материальные точки, равны по модулю и противоположно направлены (действие равно противодействию). Этот закон позволяет осуществить переход от динамики отдельной автономной материальной точки к динамике системы материальных точек, т. е. описывает взаимодействие между материальными точками.

Предположим, что к материальной точке массой  $m$  приложена внешняя сила  $\vec{F}_B$  (рисунок 1, а). Тогда, в соответствии с третьим законом Ньютона, ей должна противодействовать некоторая сила, равная ей по модулю и противоположно направленная. Такой силой является **сила инерции** материальной точки  $\vec{F}_И$ . Сила инерции  $\vec{F}_И$  представляет собой **реакцию** инерционного элемента (материальной точки) на внешнее воздействие  $\vec{F}_B$ , причём  $\vec{F}_И = -\vec{F}_B$ . Используя значение  $\vec{F}_B$  из выражения (3), получаем компонентное уравнение инерционного элемента в следующем виде:

$$\vec{F}_И = -m\vec{a} = -m \frac{d\vec{v}}{dt}. \quad (4)$$

При вращательном движении сосредоточенная масса изображается на динамической модели в виде кружка с обозначением оси «о» и плоскости «п» вращения (рисунок 1, б). Компонентное уравнение инерционного элемента в этом случае

$$\vec{M}_И = -J\vec{\varepsilon} = -J \frac{d\vec{\omega}}{dt}, \quad (5)$$

где  $\vec{M}_И$  – инерционный момент – реакция инерционного элемента на внешнее воздействие  $\vec{M}_B$ , следовательно,  $\vec{M}_И = -\vec{M}_B$ ;

$\vec{\varepsilon}$  – угловое ускорение,  $\vec{\varepsilon} = d\vec{\omega}/dt$ .

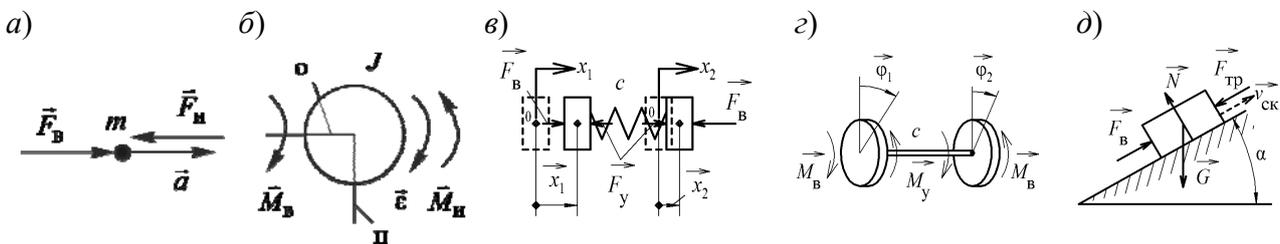


Рисунок 1 – Схемы к определению реакций элементов динамической системы на внешние воздействия

Взаимодействие сосредоточенных масс осуществляется посредством упругих, диссипативных, трансформаторных и фрикционных элементов.

**Упругие элементы отображают упругие свойства динамической системы и обладают способностью накапливать потенциальную энергию.**

В динамической модели объекта механической природы упругие элементы расположены между сосредоточенными массами. При поступательном перемещении сосредоточенных масс упругий элемент представляется в виде цилиндрической пружины (рисунок 1, в), а при вращательном движении – в виде торсиона, изображаемого на динамической модели линией или стержнем (рисунок 1, з). Параметром упругого элемента является коэффициент жёсткости  $c$ .

Потенциальная энергия пружины  $E_{\text{п}}$  вычисляется по формуле

$$E_{\text{п}} = \frac{c \Delta x^2}{2} = \frac{c(x_1 - x_2)^2}{2}, \quad (6)$$

где  $\Delta x$  – деформация пружины, м;

$x_1, x_2$  – координаты сосредоточенных масс.

Потенциальная энергия торсиона

$$E_{\text{п}} = \frac{c \Delta \varphi^2}{2} = \frac{c(\varphi_1 - \varphi_2)^2}{2}, \quad (7)$$

где  $\Delta \varphi$  – угловая деформация торсиона, рад;

$\varphi_1, \varphi_2$  – углы поворота сосредоточенных масс.

Компонентное уравнение упругого элемента получается на основе **закона Гука и третьего закона Ньютона**.

Согласно **закону Гука** деформация растяжения (сжатия)  $\Delta \vec{x}$  упругого тела пропорциональна приложенной силе  $\vec{F}_{\text{в}}$  и обратно пропорциональна коэффициенту жесткости тела  $c$ ; направление вектора деформации  $\Delta \vec{x}$  совпадает с направлением вектора силы  $\vec{F}_{\text{в}}$ :

$$\Delta \vec{x} = \frac{\vec{F}_{\text{в}}}{c}. \quad (8)$$

Для торсиона, согласно закону Гука, деформация  $\Delta \vec{\varphi}$  пропорциональна приложенному вращающему моменту  $\vec{M}_{\text{в}}$  и обратно пропорциональна коэффициенту жесткости торсиона  $c$ ; направление вектора деформации  $\Delta \vec{\varphi}$  совпадает с направлением вектора момента  $\vec{M}_{\text{в}}$ :

$$\Delta \vec{\varphi} = \frac{\vec{M}_{\text{в}}}{c}. \quad (9)$$

Реакция упругого элемента на внешнее воздействие представляет собой силу упругости  $\vec{F}_{\text{у}}$  (или момент упругости  $\vec{M}_{\text{у}}$  торсиона при его закручивании). Следовательно,  $\vec{F}_{\text{у}} = -\vec{F}_{\text{в}}$ , а  $\vec{M}_{\text{у}} = -\vec{M}_{\text{в}}$ .

Компонентные уравнения упругих элементов соответственно для поступательной и вращательной систем, согласно выражениям (8) и (9),

$$\vec{F}_{\text{у}} = -c \Delta \vec{x} = -c(\vec{x}_1 - \vec{x}_2); \quad (10)$$

$$\vec{M}_{\text{у}} = -c \Delta \vec{\varphi} = -c(\vec{\varphi}_1 - \vec{\varphi}_2), \quad (11)$$

где  $\Delta \vec{x}$ ,  $\Delta \vec{\varphi}$  – векторы деформаций упругих элементов соответственно поступательной и вращательной систем;

$\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{\varphi}_1, \vec{\varphi}_2$  – векторы фазовых координат, определяющих положения сосредоточенных масс в фазовом пространстве.

**Диссипативные элементы** механической системы отображают потери энергии на преодоление сил трения. Различают внешнее и внутреннее трения механического объекта. Внешнее трение возникает в плоскости касания двух тел при их относительном перемещении. На рисунке 1, д приведена модель, отображающая внешнее трение. Под воздействием внешней силы  $\vec{F}_{\text{в}}$  в плоскости контакта тела с опорной поверхностью возникает сила тре-

ния  $\vec{F}_{\text{тр}}$ , создающая сопротивление перемещению и представляющая собой реакцию диссипативного элемента  $\vec{F}_d$  на внешнее воздействие  $\vec{F}_B$ , причём  $\vec{F}_{\text{тр}} = -\vec{F}_B$ .

Внешнее трение характерно для фрикционных элементов (сцепление, тормоз, скользящее колесо относительно дороги, сухое трение в многоресорных элементах и др.).

При деформировании упругих элементов технического объекта также происходят потери энергии на преодоление возникающего при этом внутреннего трения в этих элементах. Предполагается, что это трение по своей природе аналогично трению между слоями жидкости, обусловленному её вязкостью (ньютоновская жидкость). В этой связи в качестве компонентного уравнения диссипативного элемента механической системы используется уравнение вязкого трения, которое в соответствии с законом Ньютона для поступательной и вращательной механических систем

$$\vec{F}_d = -\mu\Delta\vec{v} = -\mu(\vec{v}_1 - \vec{v}_2); \quad (12)$$

$$\vec{M}_d = -\mu\Delta\vec{\omega} = -\mu(\vec{\omega}_1 - \vec{\omega}_2); \quad (13)$$

где  $\mu$  – коэффициент вязкого трения (демпфирования);

$\Delta\vec{v}, \Delta\vec{\omega}$  – векторы скоростей деформаций упругих элементов (относительных скоростей скольжения);

$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2$  – векторы скоростей сосредоточенных масс, соединяемых упругим элементом.

Энергия диссипации  $E_d$  (рассеивания) зависит не только от относительных скоростей скольжения, но и от времени, и вычисляется по формулам

$$E_d = \frac{\mu\Delta v^2}{2} \Delta t; \quad (14)$$

$$E_d = \frac{\mu\Delta\omega^2}{2} \Delta t, \quad (15)$$

где  $\Delta t$  – интервал времени, на котором вычисляется значение  $E_d$ .

**Трансформаторные элементы отображают безынерционные преобразования параметров потока энергии** с учетом потерь на трение в трансформаторах объекта.

Параметрами потока энергии, передаваемой через механическую систему от источника энергии к потребителям, являются переменные типа потенциала (усилия или вращающие моменты) и типа потока (скорости сосредоточенных масс). Преобразующее свойство трансформаторных элементов (ТЭ) характеризуется тремя параметрами – передаточным числом  $u$ , коэффициентом трансформации  $K$  и КПД  $\eta$ , причём два из них независимые, а третий может быть выражен через них. Приведём формулы для их вычисления при вращательных движениях сосредоточенных масс системы.

Передаточное число  $u$  характеризует преобразование скорости, его значение равно отношению скорости  $\omega_1$  на входе ТЭ к скорости  $\omega_2$  на его выходе:

$$u = \omega_1 / \omega_2. \quad (16)$$

Коэффициент трансформации  $K$  представляет собой отношение вращающего момента  $M_2$  на выходе ТЭ к вращающему моменту  $M_1$  на его входе:

$$K = M_2 / M_1. \quad (17)$$

Поскольку  $\omega_1, \omega_2, M_1, M_2$  – векторные величины, то  $u$  и  $K$  оказываются скалярными алгебраическими величинами. Они учитывают не только модули, но и направления преобразуемых трансформаторным элементом фазовых координат.

КПД трансформаторного элемента определяется отношением полезной мощности  $P_2$  на его выходе к затраченной мощности  $P_1$  на входе элемента:

$$\eta = |P_2/P_1| = |M_2\omega_2/(M_1\omega_1)| = |K/u|. \quad (18)$$

В формуле (18) учтено, что КПД – скалярная положительная величина, а мощность – скалярная алгебраическая величина, поэтому отношение мощностей необходимо взять по абсолютной величине.

**Фрикционные элементы** отображают физические свойства фрикционных механизмов технического объекта, характеристики которых обусловлены внешним трением. Определение параметров и характеристик этих элементов изложено в [1].

Динамическая модель технического объекта представляет собой некоторую структуру, составленную из упорядоченного множества элементов, взаимодействующих между собой и с внешней средой. На её основе составляется математическая модель объекта. Для получения адекватного математического описания физических свойств объекта необходимо, кроме компонентных уравнений всех элементов динамической модели, составить уравнения, описывающие структуру (топологию) модели и воздействия на сосредоточенные массы сопрягаемых с ними элементов модели и внешней среды. Эти уравнения описывают условия равновесия потенциалов (сил или вращающих моментов), воздействующих на сосредоточенные массы. Их называют **топологическими уравнениями**.

Топологические уравнения моделируемого технического объекта составляют на основе **принципа Даламбера**, согласно которому геометрическая сумма потенциалов (сил или вращающих моментов), приложенных к сосредоточенной массе со стороны внешней среды и взаимодействующих с ней элементов системы, с учётом потенциала инерционного элемента (силы инерции или инерционного момента) равна нулю. При поступательных движениях сосредоточенных масс топологические уравнения имеют вид

$$\vec{F}_{vi} + \sum_{j=1}^N \vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ii} = 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad (19)$$

где  $\vec{F}_{vi}$  – усилие внешней среды, оказывающее воздействие на  $i$ -ю массу;

$\vec{F}_{ij}$  – усилие  $j$ -го элемента (упругого, диссипативного), воздействующего на  $i$ -ю массу;

$\vec{F}_{ii}$  – сила инерции  $i$ -й массы;

$N$  – количество элементов, воздействующих на  $i$ -ю массу;

$n$  – количество сосредоточенных масс системы.

Топологические уравнения при вращательных движениях сосредоточенных масс

$$\vec{M}_{vi} + \sum_{j=1}^N \vec{M}_{ij} + \vec{M}_{ii} = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (20)$$

Внешняя среда может оказывать воздействие на объект в виде потенциалов (сил  $\vec{F}_B$  или вращающих моментов  $\vec{M}_B$ ), приложенных к соответствующим сосредоточенным массам, либо в виде потоков  $\vec{v}_B^*$  или  $\vec{\omega}_B^*$  (параметров неровностей опорной поверхности), воздействующих на упругие элементы объекта, посредством которых он взаимодействует с внешней средой. Потенциалы  $\vec{F}_B$ ,  $\vec{M}_B$  учитываются в топологических уравнениях, а потоковые воздействия  $\vec{v}_B^*$ ,  $\vec{\omega}_B^*$  – в компонентных уравнениях.

Для материальной точки принцип Даламбера имеет следующую формулировку: геометрическая сумма сил, приложенных к материальной точке, с учетом её силы инерции равна нулю.

## Лабораторная работа № 1. Моделирование простейшей механической вращательной системы

Методику моделирования рассмотрим на примере простейшей механической системы, динамическая модель которой представлена на рисунке 2.

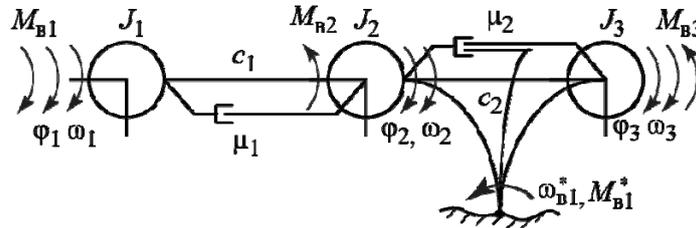


Рисунок 2 – Динамическая модель системы

### 1 Разработка динамической модели технического объекта.

Динамическая модель отображает физические свойства технического объекта и воздействия на него внешней среды. Физические свойства объекта определяются его структурой, представляющей собой упорядоченное множество элементов, характеризующихся качественным и количественным составом и взаимным расположением в динамической модели. Качественное различие элементов определяется особенностями их физических свойств (инерционные, упругие, диссипативные, трансформаторные, фрикционные). Количественно физические свойства элементов выражаются скалярными величинами – параметрами элементов. Функции воздействий внешней среды на объект также характеризуются соответствующими параметрами. **Параметры элементов динамической модели объекта называют внутренними параметрами, а параметры внешней среды – внешними параметрами.**

Для оценки выполнения технических требований к создаваемому объекту при его функционировании в заданных условиях используют **показатели качества и эффективности – выходные параметры объекта.**

На динамической модели используют оригинальные графические изображения всех её элементов и символные обозначения их параметров. В модели механической вращательной системы сосредоточенные массы (инерционные элементы) изображают кружками, упругие элементы – линиями, диссипативные элементы – гидравлическими амортизаторами.

Модель на рисунке 2 содержит три сосредоточенные массы с моментами инерции  $J_1, J_2, J_3$ , кг·м<sup>2</sup>; два упругих элемента с коэффициентами жёсткости  $c_1, c_2$ , Н·м/рад; два диссипативных элемента с коэффициентами сопротивления (диссипации)  $\mu_1, \mu_2$ , Н·м·с/рад.

Различают два вида воздействий внешней среды на объект – **воздействия типа потенциала** (силы или вращающие моменты) и **воздействия типа потока** (характеристики неровностей опорной поверхности, по которой перемещается объект). Вращающие моменты воздействуют на сосредоточенные массы. В модели на рисунке 2 – это моменты  $M_{B1}, M_{B2}, M_{B3}$ , Н·м. Неровности опорной поверхности отображаются соответствующими функциями вида  $\omega_{Bi}^*(t)$ . Контакт объекта с опорной поверхностью предполагается непрерывный, что может обеспечить лишь безынерционный элемент. Поэтому функция  $\omega_{B1}^*(t)$  на рисунке 2 воздействует на упругий элемент  $c_2$ . Реакция внешней среды на воздействие упругого элемента объекта обозначена  $M_{B1}^*$ .

Структура реальных объектов автомобилестроения может быть сколь угодно сложной и содержать весьма значительное количество разнообразных физических элементов. Поэтому для описания движения сосредоточенных масс вводится многомерное фазовое пространство. Положение сосредоточенных масс и характер их движения описывается **фазовыми ко-**

**ординатами типа потока** – геометрическими координатами положения масс и скоростями их движения. Эти координаты необходимо отобразить на динамической модели.

Для механической вращательной системы на рисунке 2 – это углы поворота сосредоточенных масс  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ , рад, и угловые скорости вращения  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ , рад/с. Фазовые координаты  $\vec{\varphi}_i$  и  $\vec{\omega}_i$  – векторные величины, также как и вращающие моменты  $\vec{M}_i$ , приложенные к сосредоточенным массам. Используя информацию об этих векторах, устанавливают расположение источника энергии, подводимой к объекту, и потребителей энергии. Это определяется знаками мощностей  $P_i$  источников воздействий  $\vec{M}_i$  на объект. Мощность – скалярная алгебраическая величина, поэтому её вычисляют по формуле **скалярного произведения векторов** момента  $\vec{M}_i$  и угловой скорости  $\vec{\omega}_i$

$$P_i = \vec{M}_{Vi} \vec{\omega}_i = M_{Vi} \omega_i \cos(\vec{M}_{Vi}, \vec{\omega}_i). \quad (21)$$

Если мощность  $P_i$  положительна, это соответствует источнику энергии. В противном случае будет потребитель энергии. В модели на рисунке 2 направления векторов  $\vec{M}_{B1}$  и  $\vec{\omega}_1$  совпадают, а направления векторов  $\vec{M}_{B2}$  и  $\vec{\omega}_2$ , а также  $\vec{M}_{B3}$  и  $\vec{\omega}_3$  взаимно противоположны, в результате получаем

$$P_1 = M_{B1} \omega_1; \quad P_2 = -M_{B2} \omega_2; \quad P_3 = -M_{B3} \omega_3.$$

Следовательно, источник энергии связан с массой  $J_1$ , а потребители энергии – с массами  $J_2$  и  $J_3$ . Энергия от массы  $J_1$  через упругий элемент  $c_1$  и диссипативный элемент  $\mu_1$  передаётся к массе  $J_2$  и далее от неё через элементы  $c_2$  и  $\mu_2$  – к массе  $J_3$ . При этом энергия источника частично расходуется на преодоление трения в диссипативных элементах.

## 2 Определение параметров элементов динамической модели.

Параметры инерционных элементов – массы  $m$  и моменты инерции  $J$  и упругих элементов – коэффициенты жёсткости  $c$  определяют по известным формулам теоретической механики и сопротивления материалов.

Для определения параметров диссипативных элементов – коэффициентов сопротивления (демпфирования)  $\mu$  обычно используют априорную информацию об относительных коэффициентах затухания колебаний  $\gamma$  [1] либо проводят эксперименты по их определению.

Коэффициент сопротивления  $\mu_j$   $j$ -го диссипативного элемента механической системы зависит не только от  $\gamma_j$ , но и от параметров элементов динамической модели, непосредственно примыкающих к данному диссипативному элементу. При определении значения  $\mu_j$  используют парциальную систему.

Парциальной системой называется частичная одночастотная подсистема, выделяемая из динамической модели объекта. Она имеет только одну частоту собственных колебаний. В её состав входят диссипативный элемент, для которого определяется  $\mu_j$ , и все взаимосвязанные с ним элементы. На рисунке 3 показаны модели простейших парциальных систем.

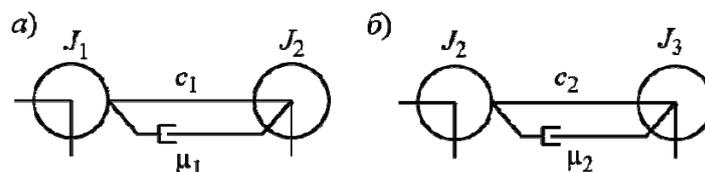


Рисунок 3 – Парциальные системы

Значение  $\mu_j$  определяется по формуле

$$\mu_j = 2\gamma_j J_j^* \omega_j, \quad (22)$$

где  $J_j^*$  – приведенный момент инерции парциальной системы, кг·м<sup>2</sup>;

$\omega_j$  – парциальная частота, рад/с.

Значения  $J_j^*$  и  $\omega_j$  вычисляются по формулам

$$J_j^* = \frac{1}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{J_i}}; \quad (23)$$

$$\omega_j = \sqrt{\frac{c_j}{J_j^*}}, \quad (24)$$

где  $N$  – количество инерционных элементов, входящих в состав парциальной системы.

### 3 Методика структурно-матричного метода формирования математической модели технического объекта.

Математическую модель технического объекта можно построить непосредственно по динамической модели, поскольку она обеспечивает отображение структуры объекта и идентификацию составляющих её элементов. Однако процесс построения адекватной модели в этом случае осложняется необходимостью неформального подхода к составлению компонентных и топологических уравнений модели, что требует значительной затраты времени и не гарантирует отсутствия ошибок.

Методика получения математической модели структурно-матричным методом основана на анализе направлений потоков энергии в компонентах структуры объекта посредством **ориентированного графа (орграфа)** и последующей формализации описания физических свойств объекта с помощью специальной матрицы, непосредственно отображающей структуру и содержание топологических и компонентных уравнений математической модели объекта. На рисунке 4 представлен орграф моделируемого объекта.

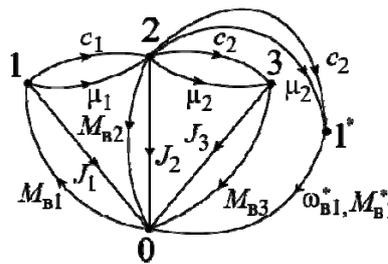


Рисунок 4 – Орграф моделируемого объекта

Орграф состоит из узлов и соединяющих их ветвей. Узлы орграфа отображают сосредоточенные массы динамической модели объекта, а ветви – компоненты, создающие воздействия на каждую массу внешней средой и соответствующими безынерционными элементами системы, непосредственно связанными с данной массой. Узлы 1, 2, 3 соответствуют сосредоточенным массам с моментами инерции  $J_1, J_2, J_3$ . Базовый узел «0» отображает внешнюю среду. Ветви внешних воздействий  $M_{B1}, M_{B2}, M_{B3}$  соединяют базовый узел с узлами соответствующих сосредоточенных масс. На этих ветвях стрелками указаны направления потоков энергии, передаваемой между внешней средой и объектом. К первой сосредоточенной

массе энергия подводится из внешней среды (источник энергии), поэтому стрелка направлена к данной массе. С массами 2 и 3 связаны потребители энергии, что отмечено стрелками, направленными к узлу внешней среды «0».

Сосредоточенные массы обладают инерционными свойствами. На их разгон затрачивается энергия, поступающая из внешней среды. Поэтому ветви инерционных элементов, отмеченные символами  $J_1, J_2, J_3$ , направлены от узлов 1, 2, 3 к узлу «0». Ветви упругих элементов  $c_1, c_2$  и ветви диссипативных элементов  $\mu_1, \mu_2$  соединяют узлы соответствующих сосредоточенных масс, между которыми они расположены в динамической модели. Направления потоков энергии в этих ветвях определяются расположением ветви источника энергии  $M_{B1}$  и ветвей потребителей энергии  $M_{B2}, M_{B3}$ . Так как энергия подводится к узлу 1, то далее она передаётся через ветви  $c_1, \mu_1$  к узлу 2, а от него через ветви  $c_2, \mu_2$  к узлу 3, а также к узлу  $1^*$ , отображающему опорную поверхность внешней среды, формирующую функцию воздействия типа потока  $\omega_{B1}^*(t)$ . Ветвь орграфа, соединяющая узел  $1^*$  с узлом «0», отображает реакцию внешней среды  $M_{B1}^*$  на воздействие объекта, осуществляемое посредством упругого  $c_2$  и диссипативного  $\mu_2$  элементов.

Информация о математической модели технического объекта, которую содержит орграф, может быть представлена в виде матрицы. В этой матрице каждому узлу орграфа, за исключением базового, соответствует строка, а каждой ветви – столбец. Единицами в матрице отмечается наличие соединений между узлами и ветвями орграфа, а нулями – их отсутствие. Направления сигналов в ветвях орграфа отображаются знаками единиц. Если сигнал направлен от узла, принимается знак «минус» (энергия отводится от узла), а если к узлу – знак «плюс» (энергия подводится к узлу).

Матрицу, построенную по изложенным правилам для данного орграфа, называют **матрицей инцидентий**.

В таблице 1 приведена матрица инцидентий моделируемого технического объекта. Она содержит подматрицы ветвей источников потенциалов  $A_B$ , упругих элементов  $A_Y$  и диссипативных элементов  $A_D$ . Подматрица ветвей инерционных элементов  $A_I$  во всех случаях единичная диагональная, поэтому с целью упрощения таблицы её можно не приводить. Элементы матрицы инцидентий  $I_{ij}$  называются **инциденторами**.

Таблица 1 – Матрица инцидентий моделируемого технического объекта

| Узел       | Ветвь               |          |          |            |         |       |               |         |
|------------|---------------------|----------|----------|------------|---------|-------|---------------|---------|
|            | Источник потенциала |          |          |            | Упругая |       | Диссипативная |         |
|            | $M_{B1}$            | $M_{B2}$ | $M_{B3}$ | $M_{B1}^*$ | $c_1$   | $c_2$ | $\mu_1$       | $\mu_2$ |
| 1          | +1                  | 0        | 0        | 0          | -1      | 0     | -1            | 0       |
| 2          | 0                   | -1       | 0        | 0          | +1      | -1    | +1            | -1      |
| 3          | 0                   | 0        | -1       | 0          | 0       | +1    | 0             | +1      |
| $1^*$      | 0                   | 0        | 0        | -1         | 0       | +1    | 0             | +1      |
| Подматрица | $A_B$               |          |          |            | $A_Y$   |       | $A_D$         |         |

Матрица инцидентий фактически представляет собой математическую модель объекта. На её основе можно непосредственно записать топологические и компонентные уравнения технического объекта.

Топологические уравнения составляются по строкам матрицы инцидентий. Эти уравнения описывают условия равновесия потенциалов (сил или вращающих моментов), воздействующих на сосредоточенные массы. Поскольку инциденторы учитывают направления потоков энергии, передаваемых ветвями орграфа на сосредоточенные массы, то вместо векторного уравнения (19) получаем уравнение в проекциях воздействий на сосредоточенные массы

$$I_{vi}M_{vi} + \sum_{j=1}^N I_{yij}M_{yj} + \sum_{k=1}^K I_{dik}M_{dk} + I_{ni}M_{ni} = 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad (25)$$

где  $I_{vi}$ ,  $I_{yij}$ ,  $I_{dik}$ ,  $I_{ni}$  – инциденторы, отображающие наличие в  $i$ -й строке матрицы инцидентий соответствующих воздействий  $M_{vi}$ ,  $M_{yj}$ ,  $M_{dk}$ ,  $M_{ni}$  на  $i$ -ю массу;

$N$  – количество воздействий упругих элементов на  $i$ -ю массу;

$K$  – количество воздействий диссипативных элементов на  $i$ -ю массу;

$n$  – количество сосредоточенных масс динамической модели объекта.

Составим топологические уравнения моделируемого объекта. Согласно выражению (25) на основе матрицы инцидентий получаем

$$\left. \begin{aligned} M_{v1} - M_{y1} - M_{d1} - M_{n1} &= 0; \\ -M_{v2} + M_{y1} - M_{y2} + M_{d1} - M_{d2} - M_{n2} &= 0; \\ -M_{v3} + M_{y2} + M_{d2} - M_{n3} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Компонентные уравнения инерционных элементов, согласно выражению (5) и учитывая, что направления инерционных моментов учтены в уравнениях (26), запишем в следующем виде:

$$M_{n1} = J_1 \frac{d\omega_1}{dt}; \quad M_{n2} = J_2 \frac{d\omega_2}{dt}; \quad M_{n3} = J_3 \frac{d\omega_3}{dt}, \quad (27)$$

где  $d\omega_i/dt$  – ускорение  $i$ -й сосредоточенной массы,  $i = \overline{1, n}$ .

Компонентные уравнения упругих и диссипативных элементов составляются по столбцам матрицы инцидентий на основе выражений

$$M_{yj} = -c_j \sum_{i=1}^n I_{yij} \varphi_i, \quad j = \overline{1, N}; \quad (28)$$

$$M_{dk} = -\mu_k \sum_{i=1}^n I_{dik} \omega_i, \quad k = \overline{1, K}, \quad (29)$$

где  $\varphi_i$ ,  $\omega_i$  – угол поворота и скорость вращения  $i$ -й сосредоточенной массы соответственно.

Знаки «минус» в выражениях (28) и (29) обусловлены тем, что  $M_{yj}$  и  $M_{dk}$  представляют собой реакции соответственно упругих и диссипативных элементов согласно выражениям (9) и (11).

Подставляя в выражения (28) и (29) значения инциденторов  $I_{yij}$  и  $I_{dik}$  из таблицы 1, получаем компонентные уравнения упругих и диссипативных элементов моделируемого объекта

$$\left. \begin{aligned} M_{y1} &= c_1(\varphi_1 - \varphi_2); \\ M_{y2} &= c_2(\varphi_2 - \varphi_3 - \varphi_{v1}^*); \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

$$\left. \begin{aligned} M_{d1} &= \mu_1(\omega_1 - \omega_2); \\ M_{d2} &= \mu_2(\omega_2 - \omega_3 - \omega_{v1}^*). \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Строка матрицы инцидентий, соответствующая узлу  $1^*$ , отображающему опорную поверхность внешней среды, позволяет определить её реакцию  $M_{v1}^*$ :

$$M_{в1}^* = M_{y2} + M_{д2}. \quad (32)$$

Подставим значения инерционных моментов  $M_{и1}, M_{и2}, M_{и3}$  в уравнения (27) и составим на их основе выражения для определения ускорений сосредоточенных масс  $d\omega_i/dt$ . В результате получим систему дифференциальных уравнений, представляющую собой топологические уравнения объекта,

$$\left. \begin{aligned} d\omega_1/dt &= (M_{в1} - M_{y1} - M_{д1})/J_1; \\ d\omega_2/dt &= (-M_{в2} + M_{y1} - M_{y2} + M_{д1} - M_{д2})/J_2; \\ d\omega_3/dt &= (-M_{в3} + M_{y2} + M_{д2})/J_3. \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

Для решения этих уравнений необходимо на каждом шаге интегрирования подставлять значения моментов упругих элементов  $M_{yj}$  и моментов диссипативных элементов  $M_{дk}$ . Но значения  $M_{yj}$  зависят от угловых координат поворота масс  $\varphi_i$ , которые необходимо получать одновременно с интегрированием уравнений (33).

Возможны два варианта решения этой проблемы. В первом варианте систему уравнений (33) дополняют уравнениями вида  $d\varphi_i/dt = \omega_i$ , интегрирование которых даёт значения угловых координат  $\varphi_i$ , что позволяет на каждом шаге интегрирования вычислять  $M_{yj}$  по формулам (30). Во втором варианте дифференцируют по времени выражения (30) и полученные уравнения производных  $dM_{yj}/dt$  включают в состав уравнений (33).

Второй вариант получения расчётной математической модели предпочтителен, т. к. он позволяет в процессе интегрирования системы дифференциальных уравнений одновременно получать изменения во времени функций угловых скоростей сосредоточенных масс  $\omega_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , и моментов упругих элементов  $M_{yj}$ ,  $j = \overline{1, N}$ .

#### 4 Математическая модель динамических процессов технического объекта.

Подставим значения моментов диссипативных элементов  $M_{дk}$ , вычисляемые по формулам (29), в систему уравнений (32), дополнив её производными выражений (30):

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\omega_1}{dt} &= \frac{M_{в1} - \mu_1(\omega_1 - \omega_2) - M_{y1}}{J_1}; \\ \frac{d\omega_2}{dt} &= \frac{-M_{в2} + \mu_1(\omega_1 - \omega_2) - \mu_2(\omega_2 - \omega_3) + M_{y1} - M_{y2}}{J_2}; \\ \frac{d\omega_3}{dt} &= \frac{-M_{в2} + \mu_2(\omega_2 - \omega_3) + M_{y2}}{J_3}; \\ \frac{dM_{y1}}{dt} &= c_1(\omega_1 - \omega_2); \\ \frac{dM_{y2}}{dt} &= c_2(\omega_2 - \omega_3). \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Полученная система дифференциальных уравнений (34) позволяет моделировать и исследовать динамические процессы технического объекта: определять изменения фазовых координат (угловых скоростей сосредоточенных масс  $\omega_i$  и моментов упругих элементов  $M_{yj}$ ); определять выходные параметры объекта и оценивать по ним качество и эффективность его функционирования.

Для интегрирования уравнений (34) необходимо задать начальные условия, т. е. значения фазовых координат в начальный момент времени  $\omega_{10}$ ,  $\omega_{20}$ ,  $\omega_{30}$ ,  $M_{y10}$ ,  $M_{y20}$  при  $t = 0$ .

### 5 Переходная характеристика объекта моделирования.

Наиболее часто при моделировании технических объектов качество переходных процессов оценивают по графику переходной характеристики. **Переходная характеристика** представляет собой график, отображающий процесс изменения во времени некоторой фазовой координаты объекта  $v_i$  при переходе его из одного установившегося статического состояния в другое установившееся состояние.

Для получения переходной характеристики необходимо предварительно определить начальные и конечные значения всех фазовых координат объекта в начальном и конечном равновесных статических состояниях. Эти состояния могут быть двух видов: состояние покоя или состояние равномерного движения сосредоточенных масс. Статическое состояние достигается при постоянных во времени всех внешних воздействиях на объект. Фазовые координаты системы при этом остаются постоянными.

Для реализации переходной характеристики на вход объекта подаётся ступенчатое воздействие. Инициализация переходной характеристики моделируемого объекта осуществляется посредством ступенчатого скачкообразного изменения вращающего момента  $M_{B1}$  источника энергии в соответствии с выражением

$$M_{B1}(t) = \begin{cases} M_{B10} & \text{при } t < 0; \\ M_{B1K} & \text{при } t \geq 0, \end{cases}$$

где  $M_{B10}$ ,  $M_{B1K}$  – начальное и конечное значения функции воздействия  $M_{B1}(t)$ , причём  $M_{B10} = \text{const}$  и  $M_{B1K} = \text{const}$ ,  $M_{B1K} \neq M_{B10}$ .

### 6 Математическая модель статического состояния технического объекта.

В статическом состоянии объекта скорости движения сосредоточенных масс  $\omega_i$  остаются постоянными: в состоянии покоя  $\omega_i = 0$ , а при равномерном вращении  $\omega_i = \text{const}$ . Следовательно, ускорения сосредоточенных масс  $d\omega_i/dt = 0$ . При этом отсутствуют взаимные перемещения масс, поэтому нет диссипативных потерь энергии, а потенциалы диссипативных элементов  $M_{dk} = 0$ . Учитывая эти особенности, топологические уравнения (33) в статическом состоянии моделируемого объекта (см. рисунок 2) приводятся к виду

$$\left. \begin{aligned} M_{B1} - M_{y1} &= 0; \\ -M_{B2} + M_{y1} - M_{y2} &= 0; \\ -M_{B3} + M_{y2} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

Подставим значения моментов упругих элементов  $M_{y1}$  и  $M_{y2}$ , определяемые по формулам (30), пренебрегая функцией  $\varphi_{B1}^*$ , и перенесём в правые части уравнений (35) моменты внешних воздействий  $M_{B1}$ ,  $M_{B2}$ ,  $M_{B3}$ :

$$\left. \begin{aligned} -c_1(\varphi_1 - \varphi_2) &= -M_{B1}; \\ c_1(\varphi_1 - \varphi_2) - c_2(\varphi_2 - \varphi_3) &= M_{B2}; \\ c_2(\varphi_2 - \varphi_3) &= M_{B3}. \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Решение полученной системы алгебраических уравнений позволяет определить значения фазовых координат  $\varphi_i$  в двух статических состояниях объекта: при  $M_{B10}$  получим

$\varphi_{10}, \varphi_{20}, \varphi_{30}$ , а при  $M_{в1к} - \varphi_{1к}, \varphi_{2к}, \varphi_{3к}$ . Затем по формулам (30) вычислим начальные и конечные значения моментов упругих элементов  $M_{y10}, M_{y20}, M_{y1к}, M_{y2к}$ , необходимые для моделирования переходной характеристики объекта.

### 7 Анализ статического состояния технического объекта.

При решении системы алгебраических уравнений на компьютере информация о структуре уравнений вводится в матричном виде. Уравнение (36) необходимо представить в виде

$$A\vec{\varphi} = \vec{M}_B, \quad (37)$$

где  $\vec{\varphi}$  – вектор фазовых координат объекта,  $\vec{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ ;

$\vec{M}_B$  – вектор функций внешних воздействий,  $\vec{M}_B = (M_{B1}, M_{B2}, \dots, M_{Bn})$ ;

$A$  – матрица постоянных коэффициентов – параметров математической модели, определяемых параметрами элементов технического объекта:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}. \quad (38)$$

Из структуры уравнений (36) очевидно, что это система линейных алгебраических уравнений, т. к. искомые фазовые координаты  $\varphi_i$  входят в неё в первой степени. Коэффициенты при фазовых координатах – постоянные величины. Они зависят только от параметров элементов технической системы. Матрицу  $A$  коэффициентов при фазовых координатах  $\varphi_i$  называют **матрицей Якоби**.

Составим матрицу Якоби системы алгебраических уравнений (36):

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} = -c_1 & a_{12} = c_1 & a_{13} = 0 \\ a_{21} = c_1 & a_{22} = -(c_1 + c_2) & a_{23} = c_2 \\ a_{31} = 0 & a_{32} = c_2 & a_{33} = -c_2 \end{bmatrix}. \quad (39)$$

До решения уравнений (36) необходимо проверить однозначность статического состояния моделируемого объекта. Во многих конкретных случаях статическое состояние обеспечивается при множестве различных значений искомых фазовых координат. Это характерно для объектов с избыточным количеством степеней свободы. При этом матрица Якоби оказывается вырожденной. Для однозначного решения уравнений статики матрица Якоби должна быть не вырожденной. Признаком вырожденности матрицы является равенство нулю её определителя. Матрица Якоби будет не вырожденной, если её определитель не равен нулю.

Однозначное положение объекта в пространстве фазовых координат можно получить путём исключения избыточных степеней свободы. Это достигается стопорением (фиксацией) сосредоточенных масс динамической модели. Стопорению подлежат только концевые сосредоточенные массы.

У моделируемого объекта в данной работе матрица Якоби вырожденная. Поэтому необходимо исключить избыточную степень свободы посредством стопорения концевой массы с моментом инерции  $J_3$ . При этом осуществляется преобразование матрицы Якоби путём обнуления всех элементов столбца и строки, содержащих диагональный элемент  $a_{33}$ , который при этом сохраняется в матрице.

Матрица Якоби после проведенного преобразования получает следующий вид:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} = -c_1 & a_{12} = c_1 & a_{13} = 0 \\ a_{21} = c_1 & a_{22} = -(c_1 + c_2) & a_{23} = 0 \\ a_{31} = 0 & a_{32} = 0 & a_{33} = -c_2 \end{bmatrix}. \quad (40)$$

Очевидно, что в третьем столбце и в третьей строке этой матрицы все её элементы равны нулю, за исключением элемента  $a_{33}$ .

Значение внешнего воздействия  $M_{B3}$  на массу  $J_3$  в этом случае при решении системы алгебраических уравнений не задаётся, т. к. оно должно быть согласовано со всеми остальными воздействиями, чтобы обеспечить статическое состояние объекта. В результате решения уравнения с матрицей Якоби (40) получаем значения фазовых координат  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  с заданными воздействиями  $M_{B1}$  и  $M_{B2}$ . При этом фазовая координата  $\varphi_3 = 0$ . Затем по уравнениям (30) вычисляются значения моментов упругих элементов  $M_{y1}$  и  $M_{y2}$ . Согласованное значение внешнего воздействия  $M_{B3}$  на массу  $J_3$  соответствует равенству  $M_{B3} = M_{y2}$ .

### 8 Анализ переходной характеристики технического объекта.

Построение графиков переходных характеристик объекта осуществляется на основе результатов интегрирования системы дифференциальных уравнений (34). При этом используются начальные условия  $\omega_{10}, \omega_{20}, \omega_{30}, M_{y10}, M_{y20}$  и конечные значения внешних воздействий  $M_{B1к}, M_{B2}, M_{B3}$ .

Решение дифференциальных уравнений (34) осуществляется в матричной форме. Поэтому составляется матрица Якоби этих уравнений. Её целесообразно составить в виде таблицы. Матрица Якоби уравнений (34) приведена в таблице 2.

Таблица 2 – Матрица Якоби системы дифференциальных уравнений (33)

| Номер уравнения | Фазовая координата    |                                 |                       |                   |                   |
|-----------------|-----------------------|---------------------------------|-----------------------|-------------------|-------------------|
|                 | $\omega_1$            | $\omega_2$                      | $\omega_3$            | $M_{y1}$          | $M_{y2}$          |
| 1               | $a_{11} = -\mu_1/J_1$ | $a_{12} = \mu_1/J_1$            | $a_{13} = 0$          | $a_{14} = -1/J_1$ | $a_{15} = 0$      |
| 2               | $a_{21} = \mu_1/J_2$  | $a_{22} = -(\mu_1 + \mu_2)/J_2$ | $a_{23} = \mu_2/J_2$  | $a_{24} = 1/J_2$  | $a_{25} = -1/J_2$ |
| 3               | $a_{31} = 0$          | $a_{32} = \mu_2/J_3$            | $a_{33} = -\mu_2/J_3$ | $a_{34} = 0$      | $a_{35} = 1/J_3$  |
| 4               | $a_{41} = c_1$        | $a_{42} = -c_1$                 | $a_{43} = 0$          | $a_{44} = 0$      | $a_{45} = 0$      |
| 5               | $a_{51} = 0$          | $a_{52} = c_2$                  | $a_{53} = -c_2$       | $a_{54} = 0$      | $a_{55} = 0$      |

Оценке качества подвергаются только переходные характеристики моментов упругих элементов.

Для оценки качества переходного процесса используют следующие показатели:

- время переходного процесса  $t_{\Pi}$ ;
- коэффициент динамичности  $k_{\text{д}}$ ;
- декремент колебаний  $D$ ;
- колебательность  $K$  (число колебаний за время  $t_{\Pi}$ );
- интегральные оценки, характеризующие отклонение графика переходной характеристики от идеальной или эталонной характеристики [1].

На рисунке 5 приведен график переходной характеристики  $M_{y1} = f(t)$ .

Для определения  $t_{\Pi}$  и  $k_{\text{д}}$  необходимо построить коридор стабилизации установившегося состояния  $\Delta$  момента  $M_{y1}$ . Значение  $\Delta$  вычисляется по формуле

$$\Delta = |M_{y1к} - M_{y10}| \varepsilon = \Delta M_{y1} \varepsilon, \quad (41)$$

где  $M_{y10}$ ,  $M_{y1к}$  – начальное и конечное значения момента упругого элемента соответственно;

$\varepsilon$  – коэффициент, характеризующий ширину коридора стабилизации (обычно принимают  $\varepsilon = 0,05$ ).

Время  $t_{\Pi}$  равно интервалу времени от момента  $t = t_0$  скачкообразного изменения воздействия  $M_{B1}$  до момента, соответствующего последнему пересечению графиком линий коридора стабилизации, как показано на рисунке 5. Время  $t_{\Pi}$  характеризует быстродействие технической системы.

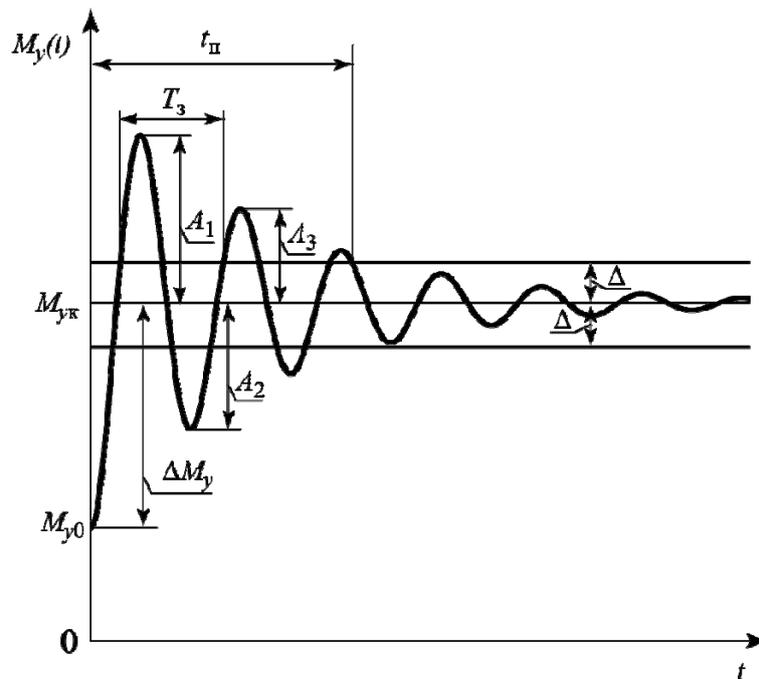


Рисунок 5 – График переходной характеристики

Коэффициент динамичности  $k_d$  определяется по формуле

$$k_d = 1 + \frac{A_{\max}}{\Delta M_{y1}}, \quad (42)$$

где  $A_{\max}$  – максимальная амплитуда отклонения момента  $M_{y1}$  от конечного значения  $M_{y1к}$  (см. рисунок 5).

Декремент колебаний  $D$  определяется по формуле

$$D = A_1/A_2, \quad (43)$$

где  $A_1$ ,  $A_2$  – смежные последовательные значения амплитуд колебаний.

### 9 Оценка устойчивости технического объекта.

Технический объект должен обладать устойчивостью. Устойчивость – это способность объекта возвращаться в исходное стационарное состояние после исключения внешнего воздействия, которое вывело его из этого состояния.

Устойчивость оценивается по спектру матрицы Якоби. Спектром матрицы Якоби называется множество её собственных значений. Собственными значениями матрицы  $A$  порядка  $n$  называют корни  $\lambda_k$ ,  $k = \overline{1, n}$ , её характеристического уравнения

$$\det(A - \lambda E) = 0, \quad (44)$$

где  $\det$  – символ определителя матрицы;

$E$  – единичная матрица того же порядка, что и матрица  $A$ .

В общем случае собственные значения матрицы  $A$  представляют собой комплексные числа

$$\lambda_k = \operatorname{Re}(\lambda_k) + j \operatorname{Im}(\lambda_k), \quad (45)$$

где  $\operatorname{Re}(\lambda_k)$  – вещественная часть собственного значения матрицы  $A$ ;

$\operatorname{Im}(\lambda_k)$  – мнимая его часть;

$j$  – мнимая единица,  $j = \sqrt{-1}$ .

Собственные значения матрицы  $A$  системы алгебраических уравнений содержат только вещественные части, а собственные значения матрицы  $A$  системы дифференциальных уравнений содержат как вещественные, так и мнимые части. Для устойчивости системы необходимо, чтобы вещественные части всех собственных значений были отрицательны. Мнимые части собственных значений представляют собой резонансные частоты колебаний технической системы.

### ***Контрольные вопросы***

- 1 Формулировка термина «структура технического объекта».
- 2 Формулировка термина «параметр объекта».
- 3 Классификация параметров технического объекта.
- 4 Формулировка понятия «динамическая модель технического объекта».
- 5 Типы элементов структуры объекта, выделяемые при использовании метода сосредоточенных масс.
- 6 Физические свойства объекта, отображаемые выделяемыми элементами в методе сосредоточенных масс.
- 7 Какие виды энергии способны накапливать выделяемые элементы? Формулы для определения энергий элементов.
- 8 Параметры элементов динамической модели и единицы их измерения для поступательных и вращательных систем.
- 9 Сколько степеней свободы имеет сосредоточенная масса? Сколько сосредоточенных масс выделяется для отображения пространственного движения твердого тела, плоского движения?
- 10 Назначение компонентного уравнения элемента динамической модели. Структура компонентного уравнения.
- 11 Какие законы физики используются для получения компонентных уравнений инерционных, упругих, диссипативных элементов? Формулировки этих законов, запись формул и расшифровка всех их элементов.
- 12 Наименование реакций элементов на внешние воздействия. Объяснение алгоритма (порядка) получения компонентных уравнений на основе законов физики. Показать на примере всех видов элементов.
- 13 Назначение топологических уравнений моделируемого объекта. Какие свойства объекта описываются топологическими уравнениями?
- 14 Какой закон физики используется для получения топологических уравнений? Формулировка этого закона.
- 15 Какое состояние объекта описывает система дифференциальных уравнений? Какое состояние объекта описывает система алгебраических уравнений?
- 16 Формулировка условий, при которых объект будет находиться в статическом состоянии, в динамическом состоянии.
- 17 Методика построения модели статического состояния объекта.

## Лабораторная работа № 2. Моделирование трансмиссии автомобиля

### 1 Динамическая модель трансмиссии.

Трансмиссия автомобиля в общем случае содержит ряд взаимодействующих механизмов, предназначенных для передачи энергии двигателя к ведущим колёсам (сцепление, коробка передач, раздаточная коробка, главная передача, колёсные передачи).

На рисунке 6 приведена упрощённая динамическая модель трансмиссии, содержащая три сосредоточенные массы с моментами инерции  $J_1, J_2, J_3$ , два упругих элемента с коэффициентами жёсткости  $c_1, c_2$ , два диссипативных элемента с коэффициентами сопротивления  $\mu_1, \mu_2$  и два трансформаторных элемента  $TЭ_{11}$  и  $TЭ_{32}$ .

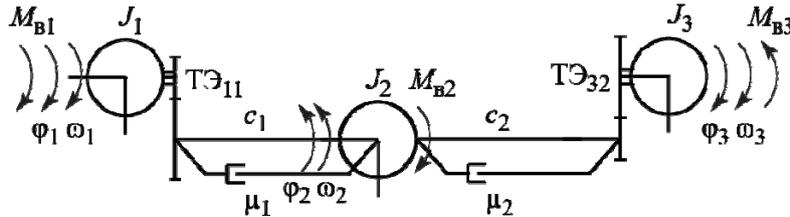


Рисунок 6 – Динамическая модель трансмиссии

Трансформаторные элементы располагаются в динамической модели между инерционными и упругими элементами. В обозначениях их параметров используются двойные индексы, характеризующие их расположение: первый индекс соответствует номеру инерционного элемента, а второй – номеру упругого элемента. Параметры трансформаторного элемента  $TЭ_{11}$  – передаточное число  $u_{11}$ , КПД  $\eta_{11}$  и коэффициент трансформации  $K_{11} = u_{11}\eta_{11}$ . Параметры  $TЭ_{32}$  –  $u_{32}, \eta_{32}, K_{32} = u_{32}\eta_{32}$ .

В трансмиссии автомобиля в качестве трансформаторных элементов в основном применяются зубчатые передачи. В динамической модели используется упрощённое изображение зубчатой передачи в виде зацепления ведущей и ведомой шестерён. При такой схеме она изменяет направление вращения на выходе ТЭ, что необходимо учитывать при введении фазовых координат типа потока  $\varphi_i$  и  $\omega_i$  (см. рисунок 6). Это позволит на основе выражения (21) безошибочно определить расположение в модели источника и потребителей энергии. В уравнениях математической модели значения параметров ТЭ принимаются без учёта их знаков, т. е. по модулю.

### 2 Определение параметров диссипативных элементов.

Параметры диссипативных элементов определяют на основе парциальных систем. На рисунке 7 приведены парциальные системы, предназначенные для определения параметров  $\mu_1$  и  $\mu_2$  динамической модели на рисунке 6.

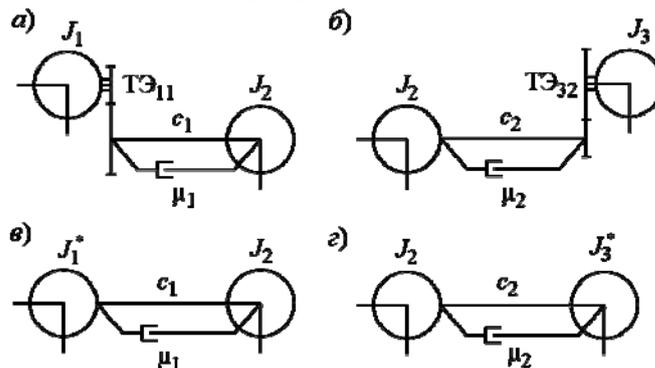


Рисунок 7 – Парциальные системы динамической модели трансмиссии

Значение  $\mu_j$  вычисляется по формуле

$$\mu_j = 2\gamma_j J_{\text{пр}j} \omega_j, \quad (46)$$

где  $\gamma_j$  – относительный коэффициент затухания колебаний;

$J_{\text{пр}j}$  – приведенный момент инерции парциальной системы (учитывает кинетическую энергию инерционных элементов парциальной системы);

$\omega_j$  – парциальная частота, рад/с.

Параметры  $J_{\text{пр}j}$  и  $\omega_j$  определяются по формулам

$$J_{\text{пр}j} = 1 / \left( \sum_{i=1}^N \frac{1}{J_i^*} \right); \quad \omega_j = \sqrt{c_j / J_{\text{пр}j}}, \quad (47)$$

где  $J_i^*$  – приведенный момент инерции  $i$ -го инерционного элемента к  $j$ -му диссипативному элементу.

В результате приведения парциальные модели получают вид, представленный на рисунке 7, в, г. Значения моментов инерции  $J_1^*$  и  $J_3^*$  определяют исходя из условия сохранения неизменной кинетической энергии инерционных элементов при их переносе к диссипативному элементу  $\mu_j$ :

$$J_1^* = J_1 u_{11}^2; \quad J_3^* = J_3 / u_{32}^2. \quad (48)$$

Из выражений (48) следует, что если инерционный элемент расположен на входе диссипативного элемента, то  $J_i$  умножают на квадрат передаточного числа ТЭ, а если на выходе, то делят.

### 3 Орграф модели трансмиссии.

На рисунке 8 построен орграф модели трансмиссии, соответствующий её динамической модели на рисунке 6. Согласно правилам построения орграфа каждая его ветвь должна соединять между собой сосредоточенные массы. Но ТЭ расположены между сосредоточенными массами и упругими элементами. Чтобы учесть эту особенность, расположения ТЭ<sub>ij</sub> в орграфе обозначаются выносными линиями, как показано на рисунке 8.

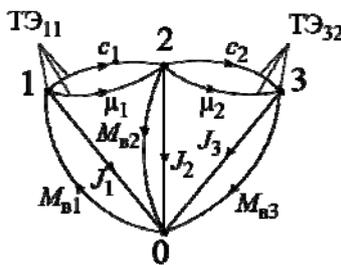


Рисунок 8 – Орграф модели трансмиссии

### 4 Матричная модель трансмиссии.

Для описания структуры модели трансмиссии, кроме матрицы инцидентностей, вводится матрица трансформаторных элементов (матрица ТЭ). В ней отображаются расположения ТЭ между сосредоточенными массами, упругими и диссипативными элементами. При этом в качестве инциденторов используются порядковые номера трансформаторных элементов. В таблице 3 приведена матрица инцидентностей модели трансмиссий, а в таблице 4 – матрица ТЭ.

Таблица 3 – Матрица инцидентов модели трансмиссии

| Узел       | Ветвь               |          |          |         |       |               |         |
|------------|---------------------|----------|----------|---------|-------|---------------|---------|
|            | Внешнее воздействие |          |          | Упругая |       | Диссипативная |         |
|            | $M_{в1}$            | $M_{в2}$ | $M_{в3}$ | $c_1$   | $c_2$ | $\mu_1$       | $\mu_2$ |
| 1          | 1                   | 0        | 0        | -1      | 0     | -1            | 0       |
| 2          | 0                   | -1       | 0        | 1       | -1    | 1             | -1      |
| 3          | 0                   | 0        | -1       | 0       | 1     | 0             | 1       |
| Подматрица | $A_в$               |          |          | $A_у$   |       | $A_д$         |         |

Таблица 4 – Матрица трансформаторных элементов

| Узел | Ветвь   |       |               |         |
|------|---------|-------|---------------|---------|
|      | Упругая |       | Диссипативная |         |
|      | $c_1$   | $c_2$ | $\mu_1$       | $\mu_2$ |
| 1    | 1       | 0     | 1             | 0       |
| 2    | 0       | 0     | 0             | 0       |
| 3    | 0       | 2     | 0             | 2       |

### 5 Топологические уравнения модели трансмиссии.

Топологические уравнения составляются по строкам матрицы инцидентов. При этом учитывается наличие трансформаторных элементов в соединениях сосредоточенных масс с упругими и диссипативными элементами. Эти элементы преобразуют моменты упругих и диссипативных элементов, действующие на сосредоточенные массы, а также угловые скорости вращения масс. Преобразование вращающих моментов определяется коэффициентами трансформации ТЭ, а угловых скоростей – передаточными числами ТЭ.

При наличии ТЭ между  $i$ -м узлом и  $j$ -м элементом значения моментов упругих и диссипативных элементов необходимо умножить на коэффициент трансформации  $K_{ij}$  данного ТЭ, возведённый в степень инцидента  $j$ -го элемента.

Составим топологические уравнения модели трансмиссии с учётом изложенного правила:

$$\left. \begin{aligned} M_{в1} - M_{у1}/K_{11} - M_{д1}/K_{11} - M_{и1} &= 0; \\ -M_{в2} + M_{у1} - M_{у2} + M_{д1} - M_{д2} - M_{и2} &= 0; \\ -M_{в3} + M_{у2}K_{32} + M_{д2}K_{32} - M_{и3} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

Подставим значения инерционных моментов  $M_{иi}$  с учётом выражений (5) и перенесём производные  $d\omega_i/dt$  в правые части уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\omega_1}{dt} &= \frac{M_{в1} - M_{у1}/K_{11} - M_{д1}/K_{11}}{J_1}; \\ \frac{d\omega_2}{dt} &= \frac{-M_{в2} + M_{у1} - M_{у2} + M_{д1} - M_{д2}}{J_2}; \\ \frac{d\omega_3}{dt} &= \frac{-M_{в3} + M_{у2}K_{32} + M_{д2}K_{32}}{J_3}. \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

### 6 Компонентные уравнения модели трансмиссии.

Компонентные уравнения составляются по столбцам матрицы инцидентов. В компонентные уравнения упругих элементов (28) входят потоковые переменные – углы поворота

сосредоточенных масс  $\varphi_i$ , а диссипативных элементов – скорости вращения масс  $\omega_i$ . Их преобразования определяются передаточными числами ТЭ.

При наличии ТЭ между  $i$ -м узлом и  $j$ -м элементом значения  $\varphi_i$  и  $\omega_i$  необходимо умножить на передаточное число  $u_{ij}$  данного ТЭ, возведённое в степень инцидентора  $j$ -го элемента.

Составим компонентные уравнения упругих и диссипативных элементов модели трансмиссии:

$$\left. \begin{aligned} M_{y1} &= c_1(\varphi_1/u_{11} - \varphi_2); \\ M_{y2} &= c_2(\varphi_2 - \varphi_3 u_{32}); \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

$$\left. \begin{aligned} M_{д1} &= \mu_1(\omega_1/u_{11} - \omega_2); \\ M_{д2} &= \mu_2(\omega_2 - \omega_3 u_{32}). \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

Компонентные уравнения упругих элементов продифференцируем по времени:

$$\left. \begin{aligned} dM_{y1}/dt &= c_1(\omega_1/u_{11} - \omega_2); \\ dM_{y2}/dt &= c_2(\omega_2 - \omega_3 u_{32}). \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

### 7 Математическая модель динамических процессов трансмиссии.

Подставим выражения моментов диссипативных элементов  $M_{дk}$ , вычисляемые по формулам (52), в систему уравнений (50) и дополним эту систему уравнениями (53). Примем также во внимание, что  $K_{ij} = u_{ij}\eta_{ij}$ . В результате получим систему дифференциальных уравнений, описывающую динамические процессы функционирования трансмиссии,

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\omega_1}{dt} &= \frac{M_{в1} - M_{y1}/(u_{11}\eta_{11}) - \mu_1(\omega_1/u_{11} - \omega_2)/(u_{11}\eta_{11})}{J_1}; \\ \frac{d\omega_2}{dt} &= \frac{-M_{в2} + M_{y1} - M_{y2} + \mu_1(\omega_1/u_{11} - \omega_2) - \mu_2(\omega_2 - \omega_3 u_{32})}{J_2}; \\ \frac{d\omega_3}{dt} &= \frac{-M_{в3} + M_{y2} u_{32} \eta_{32} + \mu_2(\omega_2 - \omega_3 u_{32}) u_{32} \eta_{32}}{J_3}; \\ \frac{dM_{y1}}{dt} &= c_1(\omega_1/u_{11} - \omega_2); \\ \frac{dM_{y2}}{dt} &= c_2(\omega_2 - \omega_3 u_{32}). \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

Для интегрирования уравнений (54) задаются начальные условия фазовых координат  $\omega_{10}$ ,  $\omega_{20}$ ,  $\omega_{30}$ ,  $M_{y10}$ ,  $M_{y20}$ . Матрица Якоби уравнений (54) приведена в таблице 5.

Таблица 5 – Матрица Якоби системы дифференциальных уравнений (54)

| Фазовая координата                |                                |                                 |                             |                        |
|-----------------------------------|--------------------------------|---------------------------------|-----------------------------|------------------------|
| $\omega_1$                        | $\omega_2$                     | $\omega_3$                      | $M_{y1}$                    | $M_{y2}$               |
| $-\mu_1/(u_{11}^2 \eta_{11} J_1)$ | $\mu_1/(u_{11} \eta_{11} J_1)$ | 0                               | $-1/(u_{11} \eta_{11} J_1)$ | 0                      |
| $\mu_1/(u_{11} J_2)$              | $-(\mu_1 + \mu_2)/J_2$         | $\mu_2 u_{32}/J_2$              | $1/J_2$                     | $-1/J_2$               |
| 0                                 | $\mu_2 u_{32} \eta_{32}/J_3$   | $-\mu_2 u_{32}^2 \eta_{32}/J_3$ | 0                           | $u_{32} \eta_{32}/J_3$ |
| $c_1/u_{11}$                      | $-c_1$                         | 0                               | 0                           | 0                      |
| 0                                 | $c_2$                          | $-c_2 u_{32}$                   | 0                           | 0                      |

### 8 Математическая модель статических состояний трансмиссии.

В статическом состоянии скорости сосредоточенных масс  $\omega_i$  постоянны (в состоянии покоя  $\omega_i = 0$ , а при равномерном вращении  $\omega_i = \text{const}$ ), следовательно,  $d\omega_i/dt = 0$ . Взаимные перемещения масс отсутствуют, поэтому диссипации энергии не происходит, а потенциалы диссипативных элементов  $M_{д1} = M_{д2} = 0$ . В результате топологические уравнения (49) приводятся к виду

$$\left. \begin{aligned} M_{в1} - M_{y1}/(u_{11}\eta_{11}) &= 0; \\ -M_{в2} + M_{y1} - M_{y2} &= 0; \\ -M_{в3} + M_{y2}u_{32}\eta_{32} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

Подставим значения моментов упругих элементов  $M_{y1}$  и  $M_{y2}$ , используя выражения (51), а воздействия  $M_{вi}$  перенесём в правые части уравнений:

$$\left. \begin{aligned} -c_1(\varphi_1/u_{11} - \varphi_2)/(u_{11}\eta_{11}) &= -M_{в1}; \\ c_1(\varphi_1/u_{11} - \varphi_2) - c_2(\varphi_2 - \varphi_3u_{32}) &= M_{в2}; \\ c_2(\varphi_2 - \varphi_3u_{32})u_{32}\eta_{32} &= M_{в3}. \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

Получена система линейных алгебраических уравнений, описывающих статическое состояние трансмиссии. Решение её осуществляется в матричной форме. Матрица Якоби системы уравнений (56) приведена в таблице 6.

Таблица 6 – Матрица Якоби системы алгебраических уравнений (56)

| Фазовая координата         |                         |                         |
|----------------------------|-------------------------|-------------------------|
| $\varphi_1$                | $\varphi_2$             | $\varphi_3$             |
| $-c_1/(u_{11}^2\eta_{11})$ | $c_1/(u_{11}\eta_{11})$ | 0                       |
| $c_1/u_{11}$               | $-(c_1 + c_2)$          | $c_2u_{32}$             |
| 0                          | $c_2u_{32}\eta_{32}$    | $-c_2u_{32}^2\eta_{32}$ |

Матрица Якоби проверяется на вырожденность. Если она окажется вырожденной, необходимо исключить лишнюю степень свободы. Для этого в динамической модели на рисунке 6 закрепляется концевая масса  $J_3$  и соответственно преобразуется матрица Якоби.

По результатам решения уравнений (56) определяются значения  $\varphi_i$ , затем по формулам (51) вычисляются моменты упругих элементов  $M_{yi}$ . Система уравнений (56) решается дважды для определения начальных и конечных значений моментов упругих элементов  $M_{yi0}$  и  $M_{yik}$ , необходимых для построения переходной характеристики.

Величина уравновешивающего момента  $M_{в3}$ , обеспечивающая статическое равновесие системы, согласно структуре динамической модели (см. рисунок 6), находится из выражения

$$M_{в3} = M_{y2}u_{32}\eta_{32}. \quad (57)$$

Проверяется также устойчивость системы трансмиссии в статическом состоянии и в переходном процессе на основе анализа спектров матрицы системы дифференциальных уравнений и матрицы алгебраических уравнений.



$$J_y = m_1 \rho_y^2, \quad (58)$$

где  $\rho_y$  – радиус инерции кузова относительно оси  $y$ , м.

Упругие элементы с коэффициентами жёсткости  $c_1$  и  $c_2$  отображают упругие свойства рессор и шин колёс автомобиля. Их значения определяются по формуле

$$c_i = \frac{c_{pi} c_{шиi}}{c_{pi} + c_{шиi}}, \quad i = 1, 2, \quad (59)$$

где  $c_{pi}$ ,  $c_{шиi}$  – коэффициенты жёсткости соответственно рессоры и шины  $i$ -го моста (учитываются левые и правые рессоры и шины), Н·м.

Упругие свойства сиденья человека (водителя или пассажира) учитываются коэффициентом жёсткости  $c_3$ .

## 2 Воздействия внешней среды.

Воздействия внешней среды на систему подвески обусловлены неровностями опорной поверхности дороги, представляемыми функциями  $v_{B1}^*(t)$  и  $v_{B2}^*(t)$ . Под их влиянием изменяются деформации и усилия упругих элементов подвески и возникают вертикальные и угловые колебания кузова. Эти колебания сопровождаются изменениями проекций скоростей  $v_{xA}$ ,  $v_{zA}$ ,  $v_{xB}$ ,  $v_{zB}$  точек крепления рессор к кузову  $A$  и  $B$ , а также проекций скоростей  $v_{xE}$  и  $v_{zE}$  точки  $E$  расположения сиденья водителя в кузове. При этом наряду со скоростью  $v_1$  центра масс кузова  $O$  возникает угловая скорость  $\omega_y$  вращения кузова относительно оси  $y$ . Соотношения между этими скоростями определяются по формулам Эйлера:

$$\left. \begin{aligned} v_{xi} &= \omega_y z_i - \omega_z y_i; \\ v_{yi} &= \omega_z x_i - \omega_x z_i; \\ v_{zi} &= \omega_x y_i - \omega_y x_i, \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

где  $v_{xi}$ ,  $v_{yi}$ ,  $v_{zi}$  – проекции скорости  $i$ -й точки кузова на оси координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ;

$\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$  – угловые скорости вращения кузова относительно этих осей;

$x_i$ ,  $y_i$ ,  $z_i$  – координаты  $i$ -й точки.

На рисунке 9 отображены проекции скоростей точек  $A$ ,  $B$  и  $E$  на оси  $x$  и  $z$ , а также угловая скорость вращения  $\omega_y$ . Принимая во внимание, что при колебаниях кузова в вертикальной плоскости  $xOz$  угловые скорости  $\omega_x = \omega_z = 0$ , и пренебрегая проекциями скоростей  $v_{xA}$ ,  $v_{xB}$ ,  $v_{xE}$ , уравнения Эйлера в данной модели сводятся к выражению

$$v_{zi} = -\omega_y x_i. \quad (61)$$

Согласно этому выражению кузов осуществляет преобразование линейных скоростей  $v_{zA}$  и  $v_{zB}$  в угловую скорость вращения кузова  $\omega_y$ . Следовательно, кузов в данном случае выполняет функции **трансформаторных элементов**. Согласно определению передаточное число трансформаторного элемента равно отношению скорости на его входе к скорости на выходе. Вход и выход трансформаторного элемента определяются по направлению передачи потока энергии. Согласно рисунку 9 источник энергии колебаний образуется неровностями дороги. Поэтому входами трансформаторных элементов будут скорости точек  $A$  и  $B$ , а выходом – угловая скорость  $\omega_y$ . В результате на основе выражения (61) получаем параметры обоих трансформаторных элементов – их передаточные числа

$$u_A = v_{zA} / \omega_y = -x_A; \quad (62)$$

$$u_B = v_{zB} / \omega_y = -x_B, \quad (63)$$

где  $x_A, x_B$  – координаты точек  $A$  и  $B$  соответственно.

Вместе с тем угловая скорость  $\omega_y$  вызывает возникновение проекции скорости  $v_{zE}$  точки  $E$  сиденья. Поскольку в данном случае энергия передаётся от кузова к сиденью, входом ТЭ будет скорость  $\omega_y$ , а выходом –  $v_{zE}$ . Следовательно, передаточное число данного трансформаторного элемента

$$u_E = \omega_y / v_{zE} = -1/x_E. \quad (64)$$

Координаты  $x_A$  и  $x_B$  при определении передаточных чисел принимаются со своими знаками. С другой стороны, их можно рассматривать как длины рычагов  $AO$  и  $BO$ , осуществляющих преобразование соответствующих скоростей точек кузова, т. е. это трансформаторные элементы рычажного типа.

Так как угол поворота кузова  $\varphi_y$  при колебаниях небольшой, то потери на трение в шарнирах крепления рессор к кузову незначительны, поэтому КПД рассматриваемых ТЭ можно считать равными единице.

### 3 Определение параметров диссипативных элементов подвески.

Параметры диссипативных элементов – коэффициенты сопротивления  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  определяют на основе парциальных систем по формуле

$$\mu_i = 2\gamma_i m_{\text{пр}i} \omega_i, \quad i = \overline{1, 3}, \quad (65)$$

где  $m_{\text{пр}i}$  – приведенная масса  $i$ -й парциальной системы, кг.

Модели парциальных систем подвески кузова и сиденья приведены на рисунке 10.

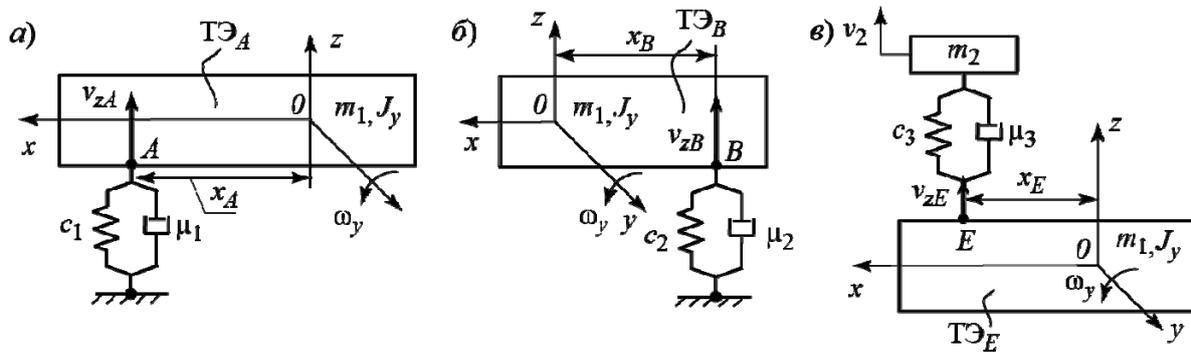


Рисунок 10 – Парциальные системы подвески автомобиля

В состав этих моделей входят диссипативные и упругие элементы соответствующих подвесок и непосредственно взаимодействующие с ними инерционные и трансформаторные элементы. Модели для определения параметров  $\mu_1$  и  $\mu_2$  (см. рисунок 10,  $a, б$ ) содержат по два инерционных элемента. Один из них с параметром  $m_1$  (масса кузова) совершает поступательное движение, а второй с параметром  $J_y$  – вращательное движение. Так как инерционный элемент  $J_y$  в этих моделях расположен на выходах диссипативных элементов  $\mu_1$  и  $\mu_2$ , то для вычисления приведенных масс  $m_{\text{пр}1}$  и  $m_{\text{пр}2}$  получаем следующие выражения:

$$m_{\text{пр1}} = \frac{1}{\frac{1}{m_1} + \frac{u_A^2}{J_y}}; \quad m_{\text{пр2}} = \frac{1}{\frac{1}{m_1} + \frac{u_B^2}{J_y}}. \quad (66)$$

В модель для определения параметра  $\mu_3$  (см. рисунок 10, в) входят три инерционных элемента с параметрами  $m_1$ ,  $m_2$  и  $J_y$ . Элемент  $J_y$  в данной модели находится на входе диссипативного элемента  $\mu_3$ , поэтому значение  $m_{\text{пр3}}$  определяется по формуле

$$m_{\text{пр3}} = \frac{1}{\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{J_y u_E^2}}. \quad (67)$$

#### 4 Орграф модели подвески автомобиля.

Испытания автомобиля на плавность хода проводятся при постоянной скорости движения  $v_x = \text{const}$ , поэтому осуществляется моделирование лишь вертикальных и угловых колебаний кузова, описываемых фазовыми координатами  $v_1$  и  $\omega_y$ , а также вертикальные колебания человека, отображаемые фазовой координатой  $v_2$ . В результате рассматривается колебательная система с тремя степенями свободы.

На рисунке 11 построен орграф подвески автомобиля.

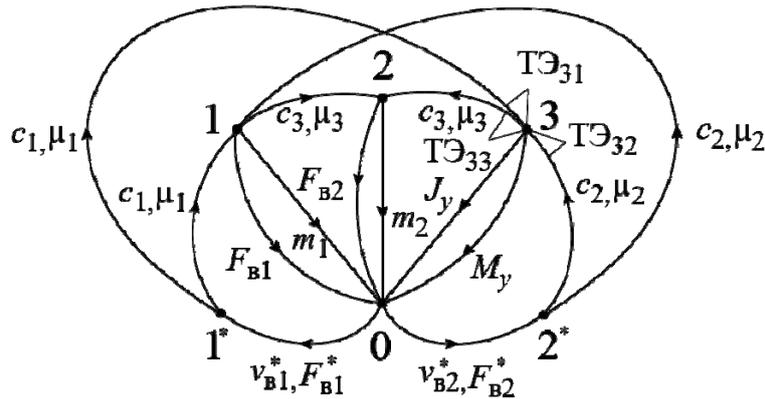


Рисунок 11 – Орграф подвески автомобиля

Узлы 1 и 2 отображают сосредоточенные массы  $m_1$  и  $m_2$ , а узел 3 – вращающуюся массу с моментом инерции  $J_y$ . На массы  $m_1$  и  $m_2$  оказывают воздействия силы тяжести  $F_{B1} = m_1 g$  и  $F_{B2} = m_2 g$  соответственно, а на вращающуюся массу – момент  $M_y$ , обусловленный наездом колёс автомобиля на пороговое препятствие. Воздействие момента  $M_y$  скачкообразное, вызывающее возникновение переходной характеристики.

Узлы  $1^*$  и  $2^*$  отображают опорную поверхность дороги под передними и задними колёсами автомобиля, а функции  $F_{B1}^*$  и  $F_{B2}^*$  представляют собой реакции дороги на колёса, характеризующие нагрузку на дорогу.

Структуру и элементный состав динамической модели подвески автомобиля представим двумя матрицами – матрицей инциденций (таблица 7) и матрицей трансформаторных элементов (таблица 8).

## 5 Матричная модель подвески автомобиля.

Таблица 7 – Матрица инцидентий модели подвески

| Узел | Ветвь       |          |       |            |            |         |       |       |               |         |         |
|------|-------------|----------|-------|------------|------------|---------|-------|-------|---------------|---------|---------|
|      | Воздействие |          |       |            |            | Упругая |       |       | Диссипативная |         |         |
|      | $F_{B1}$    | $F_{B2}$ | $M_y$ | $F_{B1}^*$ | $F_{B2}^*$ | $c_1$   | $c_2$ | $c_3$ | $\mu_1$       | $\mu_2$ | $\mu_3$ |
| 1    | -1          | 0        | 0     | 0          | 0          | 1       | 1     | -1    | 1             | 1       | -1      |
| 2    | 0           | -1       | 0     | 0          | 0          | 0       | 0     | 1     | 0             | 0       | 1       |
| 3    | 0           | 0        | -1    | 0          | 0          | 1       | 1     | -1    | 1             | 1       | -1      |
| 1*   | 0           | 0        | 0     | 1          | 0          | -1      | 0     | 0     | -1            | 0       | 0       |
| 2*   | 0           | 0        | 0     | 0          | 1          | 0       | -1    | 0     | 0             | -1      | 0       |

Таблица 8 – Матрица трансформаторных элементов

| Узел | Ветвь   |       |       |               |         |         |
|------|---------|-------|-------|---------------|---------|---------|
|      | Упругая |       |       | Диссипативная |         |         |
|      | $c_1$   | $c_2$ | $c_3$ | $\mu_1$       | $\mu_2$ | $\mu_3$ |
| 1    | 0       | 0     | 0     | 0             | 0       | 0       |
| 2    | 0       | 0     | 0     | 0             | 0       | 0       |
| 3    | 1       | 2     | 3     | 1             | 2       | 3       |
| 1*   | 0       | 0     | 0     | 0             | 0       | 0       |
| 2*   | 0       | 0     | 0     | 0             | 0       | 0       |

## 6 Топологические уравнения модели подвески.

По строкам матрицы инцидентий с учётом информации матрицы трансформаторных элементов составляем топологические уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv_1}{dt} &= \frac{-F_{B1} + F_{y1} + F_{y2} - F_{y3} + F_{d1} + F_{d2} - F_{d3}}{m_1}; \\ \frac{dv_2}{dt} &= \frac{-F_{B2} + F_{y3} + F_{d3}}{m_2}; \\ \frac{d\omega_y}{dt} &= \frac{-M_y + (F_{y1} + F_{d1})u_{31} + (F_{y2} + F_{d2})u_{32} - (F_{y3} + F_{d3})/u_{33}}{J_y}, \end{aligned} \right\} \quad (68)$$

где  $F_{y1}$ ,  $F_{y2}$ ,  $F_{y3}$ ,  $F_{d1}$ ,  $F_{d2}$ ,  $F_{d3}$  – усилия упругих и диссипативных элементов, Н.

В уравнениях (68) приняты следующие обозначения передаточных чисел трансформаторных элементов:  $u_{31} = u_A$ ;  $u_{32} = u_B$ ;  $u_{33} = u_E$ .

## 7 Компонентные уравнения модели подвески.

По столбцам матрицы инцидентий с учётом наличия трансформаторных элементов получаем следующие компонентные уравнения упругих элементов:

$$\left. \begin{aligned} F_{y1} &= c_1(z_{B1}^* - z_1 - \varphi_y u_{31}); \\ F_{y2} &= c_2(z_{B2}^* - z_1 - \varphi_y u_{32}); \\ F_{y3} &= c_3(z_1 - z_2 + \varphi_y / u_{33}), \end{aligned} \right\} \quad (69)$$

где  $z_1$ ,  $z_2$  – вертикальные перемещения масс  $m_1$  и  $m_2$ , м;

$z_{B1}^*$ ,  $z_{B2}^*$  – геометрические координаты неровностей дороги, м.

Компонентные уравнения диссипативных элементов

$$\left. \begin{aligned} F_{д1} &= \mu_1(v_{в1}^* - v_1 - \omega_y u_{31}); \\ F_{д2} &= \mu_2(v_{в2}^* - v_1 - \omega_y u_{32}); \\ F_{д3} &= \mu_3(v_1 - v_2 + \omega_y / u_{33}). \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

Компонентные уравнения упругих элементов продифференцируем по времени:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dF_{y1}}{dt} &= c_1(v_{в1}^* - v_1 - \omega_y u_{31}); \\ \frac{dF_{y2}}{dt} &= c_2(v_{в2}^* - v_1 - \omega_y u_{32}); \\ \frac{dF_{y3}}{dt} &= c_3(v_1 - v_2 + \omega_y / u_{33}). \end{aligned} \right\} \quad (71)$$

### 8 Математическая модель динамических процессов подвески.

Подставим выражения усилий диссипативных элементов  $F_{дk}$ , вычисляемые по формулам (70), в систему топологических уравнений (68) и дополним эту систему уравнениями (71). При моделировании переходных характеристик предполагается движение автомобиля по гладкой опорной поверхности горизонтальной дороги, для которой  $v_{в1}^* = 0$ ,  $v_{в2}^* = 0$ . В результате получаем систему дифференциальных уравнений, описывающую динамические процессы функционирования подвески автомобиля,

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv_1}{dt} &= \frac{-F_{в1} + F_{y1} + F_{y2} - F_{y3} - \mu_1(v_1 + \omega_y u_{31}) - \mu_2(v_1 + \omega_y u_{32})}{m_1} - \frac{\mu_3(v_1 - v_2 + \omega_y / u_{33})}{m_1}; \\ \frac{dv_2}{dt} &= \frac{-F_{в2} + F_{y3} + \mu_3(v_1 - v_2 + \omega_y / u_{33})}{m_2}; \\ \frac{d\omega_y}{dt} &= \frac{-M_y + F_{y1}u_{31} + F_{y2}u_{32} - F_{y3}/u_{33} - \mu_1(v_1 + \omega_y u_{31})u_{31}}{J_y} - \frac{\mu_2(v_1 + \omega_y u_{32})u_{32} + \mu_3(v_1 - v_2 + \omega_y / u_{33})/u_{33}}{J_y}; \\ \frac{dF_{y1}}{dt} &= -c_1(v_1 + \omega_y u_{31}); \\ \frac{dF_{y2}}{dt} &= -c_2(v_1 + \omega_y u_{32}); \\ \frac{dF_{y3}}{dt} &= c_3(v_1 - v_2 + \omega_y / u_{33}). \end{aligned} \right\} \quad (72)$$

На основе дифференциальных уравнений (72) составляется матрица Якоби, а для их интегрирования задаются начальные значения фазовых координат  $v_{10}$ ,  $v_{20}$ ,  $\omega_{y0}$ ,  $F_{y10}$ ,  $F_{y20}$ ,  $F_{y30}$ . Для получения переходной характеристики используются конечные значения внешних воздействий.

### 9 Математическая модель статических состояний подвески.

В статическом состоянии автомобиля компонентные уравнения (68) приводятся к следующему виду:

$$\left. \begin{aligned} -F_{B1} + F_{y1} + F_{y2} - F_{y3} &= 0; \\ -F_{B2} + F_{y3} &= 0; \\ -M_y + F_{y1}u_{31} + F_{y2}u_{32} - F_{y3}/u_{33} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (73)$$

Подставим значения усилий упругих элементов  $F_{y1}$ ,  $F_{y2}$ ,  $F_{y3}$ , используя выражения (69), а воздействия  $F_{B1}$ ,  $F_{B2}$ ,  $M_y$  перенесём в правые части уравнения. В результате получаем систему алгебраических уравнений статического состояния подвески

$$\left. \begin{aligned} -c_1(z_1 + \varphi_y u_{31}) - c_2(z_1 + \varphi_y u_{32}) - c_3(z_1 - z_2 + \varphi_y / u_{33}) &= F_{B1}; \\ c_3(z_1 - z_2 + \varphi_y / u_{33}) &= F_{B2}; \\ -c_1(z_1 + \varphi_y u_{31})u_{31} - c_2(z_1 + \varphi_y u_{32})u_{32} - c_3(z_1 - z_2 + \varphi_y / u_{33})/u_{33} &= M_y. \end{aligned} \right\} \quad (74)$$

На основе этих уравнений составляется матрица Якоби и в процессе их решения находятся начальные и конечные значения фазовых координат  $z_{10}$ ,  $z_{20}$ ,  $\varphi_{y0}$ ,  $z_{1k}$ ,  $z_{2k}$ ,  $\varphi_{yk}$ , а затем по формулам (69) вычисляются соответствующие значения усилий упругих элементов.

### **Контрольные вопросы**

- 1 Сколько степеней свободы имеет твердое тело (кузов автомобиля) в плоском движении?
- 2 Как определяется количество степеней свободы твёрдого тела?
- 3 Сколько топологических уравнений необходимо составить для описания плоского движения твёрдого тела?
- 4 Компонентные уравнения инерционных элементов при моделировании плоского движения твёрдого тела.
- 5 Уравнения Эйлера для определения соотношений между проекциями линейных скоростей точек твёрдого тела на оси декартовой системы координат и угловыми скоростями его вращения относительно этих осей.
- 6 Какой элемент описывает преобразование соотношений между линейными скоростями точек твёрдого тела и угловыми скоростями его вращения?
- 7 Что собой представляет конструктивно трансформаторный элемент объекта с твёрдым телом, совершающим плоское движение?
- 8 Как определяются значения передаточных чисел трансформаторных элементов при моделировании плоского движения твёрдого тела?
- 9 Определение деформации упругих элементов, взаимодействующих с твёрдым телом при плоском движении.
- 10 Определение параметров диссипативных элементов механической системы при моделировании объектов с плоским движением твёрдого тела.
- 11 Как учитывается наличие трансформаторных элементов в динамической модели объекта с плоским движением твёрдого тела при составлении топологических и компонентных уравнений структурно-матричным методом?

## **Лабораторная работа № 4. Моделирование гидравлической системы**

### **1 Принципиальная схема гидросистемы.**

Построение динамической модели гидравлической системы осуществляется на основе принципиальной схемы, на которой отображаются основные её конструктивные компоненты. На рисунке 12 приведена принципиальная схема простейшей гидравлической системы, в состав которой входят источник энергии – гидронасос 4, переливной клапан 5, гидрораспределитель 6 и гидравлические магистрали 1–3.

Характеристиками гидронасоса являются подача  $Q_H$ ,  $\text{м}^3/\text{с}$ , и давление  $p_H$ , Па. Потребители энергии представляют собой гидроаппараты, создающие противодействия  $p_{B_i}$  при соответствующих расходах жидкости  $Q_{B_i}$ . Если подача насоса  $Q_H$  превышает суммарный потребляемый расход  $Q_{II}$  всеми потребителями, открывается переливной клапан 5 и перепускает избыток подачи на слив в бак. При этом клапан обеспечивает поддержание практически постоянного давления насоса  $p_H = \text{const}$ . Такую систему называют системой с источником неограниченной энергии. Если же  $Q_H < Q_{II}$ , тогда это источник ограниченной энергии. В таком случае принимают  $Q_H = \text{const}$ , а давление  $p_H$  подлежит определению.

Гидромагистраль 3 отображает утечки жидкости гидросистемы, обусловленные негерметичностью конструктивных элементов в линии подачи к потребителю.

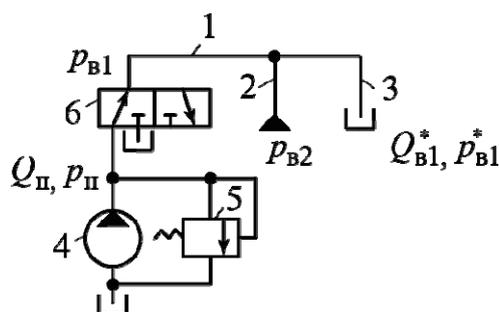


Рисунок 12 – Принципиальная схема гидравлической системы

## 2 Динамическая модель гидросистемы.

При построении динамической модели гидросистемы учитывают физические свойства гидравлических магистралей, характеристики источников и потребителей энергии. Если гидромагистраль достаточно длинная, их разделяют на ряд участков и выделяют в них дискретные элементы, отображающие инерционные, упругие и диссипативные свойства. На рисунке 13 показан фрагмент динамической модели такой гидромагистрали, разделённой на два участка.

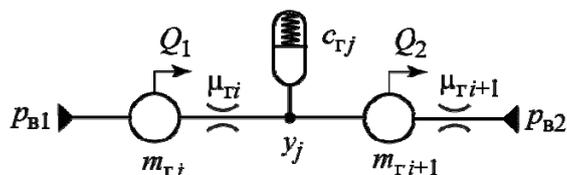


Рисунок 13 – Фрагмент динамической модели гидравлической магистрали

При моделировании гидравлической системы *фазовой координатой типа потока* принимают расход жидкости  $Q$ ,  $\text{м}^3/\text{с}$ , а *типа потенциала* – давление  $p$ , Па. В связи с этим единицы измерения параметров элементов гидравлической системы отличаются от единиц, используемых для механической поступательной системы. Различаются также и наименования параметров.

Каждый выделенный участок гидромагистрали обладает одновременно всеми основными физическими свойствами – инерционными, упругими и диссипативными, что необходимо учитывать при построении динамической модели гидросистемы. Для их отображения инерционный и диссипативный элементы располагают непосредственно на модели участка гидромагистрали, а упругие элементы устанавливают в узлах ветвления гидромагистралей, в том числе на стыках участков – при дискретизации гидромагистрали.

На рисунке 13 показаны расположение элементов модели в участках гидромагистрали и принятые их обозначения. Инерционные элементы (сосредоточенные массы) изображают в виде кружков (аналогично механической системе), диссипативные элементы – в виде дросселей, а упругие элементы – в виде гидроаккумуляторов. Параметры инерционных элементов  $m_{Г1}$  и  $m_{Г2}$  называют *коэффициентами гидравлической массы*, параметры диссипативных элементов  $\mu_{Г1}$  и  $\mu_{Г2}$  – *коэффициентами гидравлического сопротивления*, а параметр  $c_{Г}$  – *коэффициентом гидравлической жёсткости* [1].

Как следует из рисунка 13, гидравлические потери (диссипация энергии) зависят от абсолютной скорости жидкости в участке гидромагистрали, в то время как в механической системе потери на трение определяются относительной скоростью сосредоточенных масс.

На рисунке 14 представлена динамическая модель гидросистемы, соответствующая принципиальной схеме на рисунке 12.

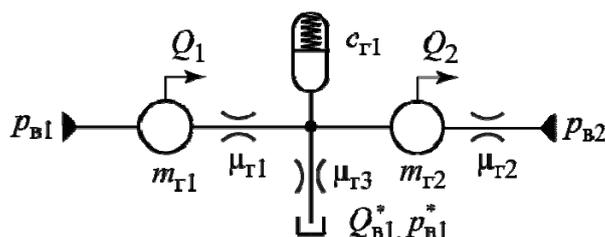


Рисунок 14 – Динамическая модель гидравлической системы

Воздействия внешней среды на гидросистему отображены функциями  $p_{В1}$ ,  $p_{В2}$ ,  $Q_{В1}^*$ ,  $p_{В1}^*$ . Воздействие  $p_{В1}$  представляет собой давление источника энергии (насоса), воздействие  $p_{В2}$  – противодействие потребителя энергии, воздействие  $Q_{В1}^*$  определяет величину утечек жидкости, а давление  $p_{В1}^*$  характеризует сопротивление, создаваемое внешней средой утечкам рабочей жидкости (реакция внешней среды). При сливе в атмосферу  $p_{В1}^* = 0$ .

### 3 Параметры динамической модели гидросистемы.

Параметр инерционного элемента (коэффициент гидравлической массы  $m_{Г}$ ) вычисляется по формуле

$$m_{Г} = m_{ж} / A^2 = \rho V / A^2, \quad (75)$$

где  $m_{ж}$  – масса жидкости дискретного участка трубопровода, кг;

$A$  – площадь поперечного сечения трубопровода, м<sup>2</sup>;

$\rho$  – плотность рабочей жидкости (можно принять 850 кг/м<sup>3</sup>);

$V$  – объем жидкости в дискретном участке трубопровода, м<sup>3</sup>.

Согласно формуле (75) единица измерения коэффициента массы кг/м<sup>4</sup>.

Упругий элемент гидравлической системы учитывает сжимаемость жидкости (газожидкостной смеси) и деформируемость трубопроводов. Коэффициент гидравлической жесткости  $c_{Г}$  упругого элемента находится по формуле

$$c_{Г} = 1 / \sum_{j=1}^N (1/c_{Гj}), \quad (76)$$

где  $c_{Гj}$  – коэффициент жесткости  $j$ -го участка трубопровода, сообщающегося с узлом ветвления гидромагистрали, Н/м<sup>5</sup>;

$N$  – количество ветвей гидромагистрали, примыкающих к данному узлу.

Коэффициент жесткости  $c_{Гj}$  определяется с использованием формул

$$c_{Гj} = E_{прj} / (V_j \psi_j); \quad (77)$$

$$E_{прj} = \frac{E_c}{1 + d_{трj} E_c / (\delta_{трj} E_{трj})}, \quad (78)$$

где  $E_{прj}$  – приведенный модуль упругости газожидкостной смеси  $j$ -го участка трубопровода, Па;

$V_j$  – объем  $j$ -го участка трубопровода, м<sup>3</sup>;

$\psi_j$  – доля объема жидкости  $j$ -го участка трубопровода, отнесенная к данному упругому элементу;

$E_c$  – модуль объемной упругости газожидкостной смеси (можно принять  $0,4 \cdot 10^9$  Па);

$E_{трj}$  – модуль упругости материала  $j$ -го участка трубопровода (для стали

$E_{трj} = 2,1 \cdot 10^{11}$  Па; для латуни  $E_{трj} = 9 \cdot 10^{10}$  Па);

$d_{трj}, \delta_{трj}$  – диаметр и толщина стенки  $j$ -го участка трубопровода, м.

Диссипативный элемент гидравлической системы учитывает потери по длине трубопровода (линейные и нелинейные) и в местных сопротивлениях. Коэффициент гидравлического сопротивления  $\mu_r$ , Н·с/м<sup>5</sup>, вычисляется по формуле

$$\mu_r = \frac{25,2 \rho \nu l}{A^2} + \left( \frac{0,433 \lambda_T \rho l}{A^2 \sqrt{A}} + \frac{\zeta \rho}{2 A^2} \right) |Q|, \quad (79)$$

где  $\nu$  – кинематический коэффициент вязкости жидкости,  $\nu = 5 \cdot 10^{-5}$  м<sup>2</sup>/с;

$l$  – длина участка трубопровода, м;

$\lambda_T$  – коэффициент потерь на трение при турбулентном потоке,  $\lambda_T = 0,025 \dots 0,030$ ;

$\zeta$  – коэффициент местного сопротивления.

В задании на выполнение лабораторной работы перечисляются все местные сопротивления, установленные в каждом участке трубопроводов. Значения коэффициентов  $\zeta$  приведены в [6, с. 83–99].

Для дросселя величина  $\zeta$  вычисляется по формуле

$$\zeta = \left( \frac{A_i}{A_{др} C} \right)^2, \quad (80)$$

где  $A_i$  – площадь поперечного сечения  $i$ -го трубопровода, м<sup>2</sup>;

$A_{др}$  – площадь отверстия дросселя, м<sup>2</sup>;

$C$  – коэффициент расхода дросселя,  $C = 0,63 \dots 0,65$ .

#### 4 Орграф модели гидросистемы.

Орграф модели гидросистемы построен на основе динамической модели (см. рисунок 14) и представлен на рисунке 15. Узлы 1 и 2 отображают сосредоточенные массы жидкости в гидромагистралях, а узел 1\* – утечку жидкости во внешнюю среду. Особенность гидравлической системы заключается в том, что ветви диссипативных элементов  $\mu_{Г1}$  и  $\mu_{Г2}$  направлены от узлов 1 и 2 к базовому узлу 0, отображающему внешнюю среду, т. к. гидравлические потери зависят от абсолютной скорости движения жидкости в трубопроводе. Внешние воздействия на сосредоточенные массы жидкости в магистралях представляют со-

бой давления  $p_{в1}$  и  $p_{в2}$ . Канал утечки жидкости считается безынерционным, т. к. масса жидкости в нём незначительная. Поэтому внешнее воздействие на него представляется в виде потока слива  $Q_{в1}^*$ , а  $p_{в1}^*$  – это давление во внешней среде, в которую происходит слив жидкости утечек.

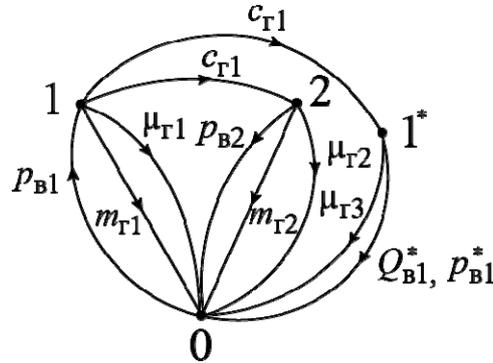


Рисунок 15 – Орграф модели гидравлической системы

### 5 Матричная модель гидросистемы.

На основании орграфа составляем матричную модель гидросистемы. Матрица инцидентий модели гидросистемы приведена в таблице 9.

Таблица 9 – Матрица инцидентий

| Узел | Ветвь       |          |            |          |               |            |            |
|------|-------------|----------|------------|----------|---------------|------------|------------|
|      | Воздействие |          |            | Упругая  | Диссипативная |            |            |
|      | $p_{в1}$    | $p_{в2}$ | $p_{в1}^*$ | $c_{Г1}$ | $\mu_{Г1}$    | $\mu_{Г2}$ | $\mu_{Г3}$ |
| 1    | 1           | 0        | 0          | -1       | -1            | 0          | 0          |
| 2    | 0           | -1       | 0          | 1        | 0             | -1         | 0          |
| 1*   | 0           | 0        | -1         | 1        | 0             | 0          | -1         |

### 6 Топологические уравнения гидросистемы.

По строкам матрицы инцидентий составляем топологические уравнения:

$$\left. \begin{aligned} p_{в1} - p_{у1} - p_{д1} - p_{и1} &= 0; \\ -p_{в2} + p_{у1} - p_{д2} - p_{и2} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (81)$$

где  $p_{у1}$  – давление упругого элемента, Па;

$p_{д1}$ ,  $p_{д2}$  – потери давления в диссипативных элементах, Па;

$p_{и1}$ ,  $p_{и2}$  – давления инерционных элементов, Па.

Строка 1\* матрицы инцидентий позволяет получить уравнение для определения давления внешней среды, в которую осуществляется утечка жидкости из неплотностей гидроматриали:

$$p_{в1}^* = p_{у1} - p_{д3}. \quad (82)$$

### 7 Компонентные уравнения гидросистемы.

При вычислении давлений упругих элементов гидросистемы используется дифференциальная форма компонентного уравнения. Для упругого элемента  $c_{Г1}$  динамической модели по соответствующему столбцу матрицы инцидентий получаем следующее выражение:

$$\frac{dp_{y1}}{dt} = c_{\Gamma 1}(Q_1 - Q_2 - Q_{B1}^*). \quad (83)$$

Компонентные уравнения диссипативных элементов

$$\left. \begin{aligned} p_{д1} &= \mu_{\Gamma 1} Q_1; \\ p_{д2} &= \mu_{\Gamma 2} Q_2; \\ p_{д3} &= \mu_{\Gamma 3} Q_{B1}^*. \end{aligned} \right\} \quad (84)$$

Потоки жидкости в магистралях (1) и (2) турбулентные. Кроме того, в магистралях имеются местные сопротивления. Поэтому в уравнениях (84) целесообразно выделить линейные и нелинейные потери (см. формулу 79), используя следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} p_{д1} &= \mu_{\Gamma л1} Q_1 + \mu_{\Gamma н1} |Q_1| Q_1; \\ p_{д2} &= \mu_{\Gamma л2} Q_2 + \mu_{\Gamma н2} |Q_2| Q_2, \end{aligned} \right\} \quad (85)$$

где  $\mu_{\Gamma л1}$ ,  $\mu_{\Gamma л2}$  – коэффициенты гидравлических сопротивлений, обусловленные линейными потерями;

$\mu_{\Gamma н1}$ ,  $\mu_{\Gamma н2}$  – коэффициенты гидравлических сопротивлений, обусловленные нелинейными потерями.

Если утечка жидкости из магистралей питания потребителей происходит в атмосферу, т. е.  $p_{B1}^* = 0$ , тогда на основе выражения (82) находим  $p_{д3} = p_{y1}$ . В этом случае получаем следующее выражение для вычисления расхода утечек:

$$Q_{B1}^* = p_{y1} / \mu_{\Gamma 3}. \quad (86)$$

Режим движения жидкости в щелях негерметичных соединений магистралей ламинарный, поэтому при вычислении  $\mu_{\Gamma 3}$  используется линейная часть выражения (79), т. е.  $\mu_{\Gamma л3}$ .

Давления  $p_{и1}$  и  $p_{и2}$  определяют инерционные потери, обусловленные затратами на разгон массы жидкости в гидромагистралях в переходном процессе. Значения  $p_{и1}$  и  $p_{и2}$  вычисляются по формулам

$$\left. \begin{aligned} p_{и1} &= m_{\Gamma 1} \frac{dQ_1}{dt}; \\ p_{и2} &= m_{\Gamma 2} \frac{dQ_2}{dt}. \end{aligned} \right\} \quad (87)$$

## 8 Математическая модель динамических процессов гидросистемы.

Подставим выражения инерционных давлений  $p_{и1}$  и  $p_{и2}$  и диссипативных потерь  $p_{д1}$ ,  $p_{д2}$ , вычисляемые соответственно по формулам (87) и (85), в систему топологических уравнений (81) и дополним её уравнением (83). В результате получим систему нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих динамические процессы функционирования гидросистемы,

$$\left. \begin{aligned} \frac{dQ_1}{dt} &= \frac{P_{B1} - P_{Y1} - \mu_{ГЛ1}Q_1 - \mu_{ГН1}|Q_1|Q_1}{m_{Г1}}; \\ \frac{dQ_2}{dt} &= \frac{-P_{B2} + P_{Y1} - \mu_{ГЛ2}Q_2 - \mu_{ГН2}|Q_2|Q_2}{m_{Г1}}; \\ \frac{dp_{Y1}}{dt} &= c_{Г1}(Q_1 - Q_2 - p_{Y1}/\mu_{ГЛ3}). \end{aligned} \right\} \quad (88)$$

При интегрировании системы дифференциальных уравнений (88) задаются начальные условия фазовых координат  $Q_{10}$ ,  $Q_{20}$ ,  $p_{Y10}$ , получаемые на основе математической модели статического состояния системы при исходных значениях внешних воздействий  $P_{B10}$ ,  $P_{B20}$ . Для построения переходных характеристик используются конечные значения внешних воздействия  $P_{B1к}$ ,  $P_{B2к}$ .

### 9 Математическая модель статических состояний гидросистемы.

В статическом состоянии гидросистемы устанавливаются постоянные расходы жидкости и давления в её гидромагистралях. В этом состоянии жидкость движется по магистралям с постоянными скоростями. Поэтому, в отличие от механической системы, в гидромагистралях всегда имеют место диссипативные потери давления  $p_{д1}$ ,  $p_{д2}$ ,  $p_{д3}$ . С учётом этого на основе уравнений (88) получаем систему нелинейных алгебраических уравнений, описывающих статическое состояние гидросистемы,

$$\left. \begin{aligned} P_{B1} - P_{Y1} - \mu_{ГЛ1}Q_1 - \mu_{ГН1}|Q_1|Q_1 &= 0; \\ -P_{B2} + P_{Y1} - \mu_{ГЛ2}Q_2 - \mu_{ГН2}|Q_2|Q_2 &= 0; \\ Q_1 - Q_2 - p_{Y1}/\mu_{ГЛ3} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (89)$$

Результатом решения этой системы уравнений при исходных внешних воздействиях  $P_{B10}$ ,  $P_{B20}$  являются начальные значения фазовых координат  $Q_{10}$ ,  $Q_{20}$ ,  $p_{Y10}$ , а при конечных внешних воздействиях  $P_{B1к}$ ,  $P_{B2к}$  – конечные значения фазовых координат  $Q_{1к}$ ,  $Q_{2к}$ ,  $p_{Y1к}$ .

### 10 Оценка устойчивости гидравлической системы.

Для оценки устойчивости гидравлической системы необходимо использовать матрицу Якоби. Обычно оценивают устойчивость гидросистемы в конечном статическом состоянии. Так как система уравнений статики (89) нелинейная, то элементы матрицы Якоби представляют собой частные производные от нелинейных функций по фазовым координатам системы. Приведём матрицу Якоби нелинейной системы уравнений (89) в общем виде:

$$J = \begin{bmatrix} J(1,1) = \partial f_1 / \partial Q_1, & J(1,2) = \partial f_1 / \partial Q_2, & J(1,3) = \partial f_1 / \partial p_{Y1}; \\ J(2,1) = \partial f_2 / \partial Q_1, & J(2,2) = \partial f_2 / \partial Q_2, & J(2,3) = \partial f_2 / \partial p_{Y1}; \\ J(3,1) = \partial f_3 / \partial Q_1, & J(3,2) = \partial f_3 / \partial Q_2, & J(3,3) = \partial f_3 / \partial p_{Y1}, \end{bmatrix} \quad (90)$$

где  $f_1, f_2, f_3$  – нелинейные функции фазовых координат, расположенные в соответствующих строках системы уравнений (89);

$Q_1, Q_2, p_{Y1}$  – фазовые координаты системы.

Выражения для вычисления элементов матрицы Якоби системы алгебраических уравнений (89) приведены в таблице 10.

Таблица 10 – Элементы матрицы Якоби системы алгебраических уравнений.

| Элемент матрицы Якоби                      |  |                          |
|--|--|--------------------------|
| $J(1, 1) = -(\mu_{гг1} + 2\mu_{гн1} Q_1 )$ | $J(1, 2) = 0$                              | $J(1, 3) = -1$           |
| $J(2, 1) = 0$                              | $J(2, 2) = -(\mu_{гг2} + 2\mu_{гн2} Q_2 )$ | $J(2, 3) = 1$            |
| $J(3, 1) = 1$                              | $J(3, 2) = -1$                             | $J(3, 3) = -1/\mu_{гг3}$ |

### Контрольные вопросы

- 1 Фазовые координаты, используемые при моделировании гидравлических систем, единицы их измерения.
- 2 Наименования параметров элементов гидравлической системы и их обозначения.
- 3 Единицы измерения параметров элементов гидравлической системы.
- 4 Компонентные уравнения элементов гидравлической системы.
- 5 Классификация составляющих гидравлических потерь в трубопроводах гидравлических систем и характеристика их физических свойств.
- 6 Общий вид компонентного уравнения диссипативного элемента гидравлической системы (с учётом особенностей составляющих гидравлических потерь).
- 7 Особенности построения динамической модели гидравлической системы (расположение элементов в динамической модели, задание внешних воздействий).
- 8 Особенности построения орграфа гидравлической системы.
- 9 Особенности моделирования статического состояния гидравлической системы.
- 10 Построение математической модели статического состояния гидросистемы.
- 11 Определение матрицы Якоби математической модели гидравлической системы.
- 12 Особенности моделирования источников ограниченной и неограниченной энергий гидравлической системы.
- 13 Моделирование утечек рабочей жидкости из гидравлической системы.

### Лабораторная работа № 5. Исключение топологических вырождений динамических моделей технических объектов

Для применения структурно-матричного метода математического моделирования необходимо при построении динамической модели технического объекта не допускать топологических вырождений.

**Топологическими вырождениями называют неправильные размещения элементов в структуре динамической модели.** Если в динамической модели инерционные элементы чередуются с упругими, то такая модель называется **регулярной**. Она не имеет топологических вырождений. Если такое чередование нарушается, это приводит к возникновению топологического вырождения.

Динамическая модель с топологическим вырождением подлежит преобразованию с целью его исключения. **Преобразование модели выполняется на основе закона сохранения энергии.** После выполнения преобразования кинетическая и потенциальная энергии полученной модели должны сохраниться такими же, как у исходной модели.

В динамической модели на рисунке 16, а сосредоточенные массы с моментами инерции  $J_1$  и  $J_2$  разделены трансформаторным элементом ТЭ<sub>1</sub>, но между ними нет упругого элемента. Следовательно, это топологическое вырождение. Кроме того, модель имеет ещё одно топологическое вырождение. Второе топологическое вырождение этой модели обусловлено тем, что между упругими элементами  $c_1$  и  $c_2$  нет сосредоточенной массы.

Для исключения этих вырождений следует объединить массы  $J_1$  и  $J_2$  и упругие элементы  $c_1$  и  $c_2$ .

При объединении масс  $J_1$  и  $J_2$  необходимо выполнить условие **сохранения кинетической энергии** системы неизменной:

$$E_{ki}^* = E_{k1} + E_{k2}, \quad (91)$$

где  $E_{ki}^*$  – кинетическая энергия объединенной массы  $J_i^*$  (рисунок 16, б, в);

$E_{k1}$ ,  $E_{k2}$  – кинетические энергии масс  $J_1$  и  $J_2$  соответственно:

$$E_{k1} = J_1 \omega_1^2 / 2; \quad (92)$$

$$E_{k2} = J_2 \omega_2^2 / 2. \quad (93)$$

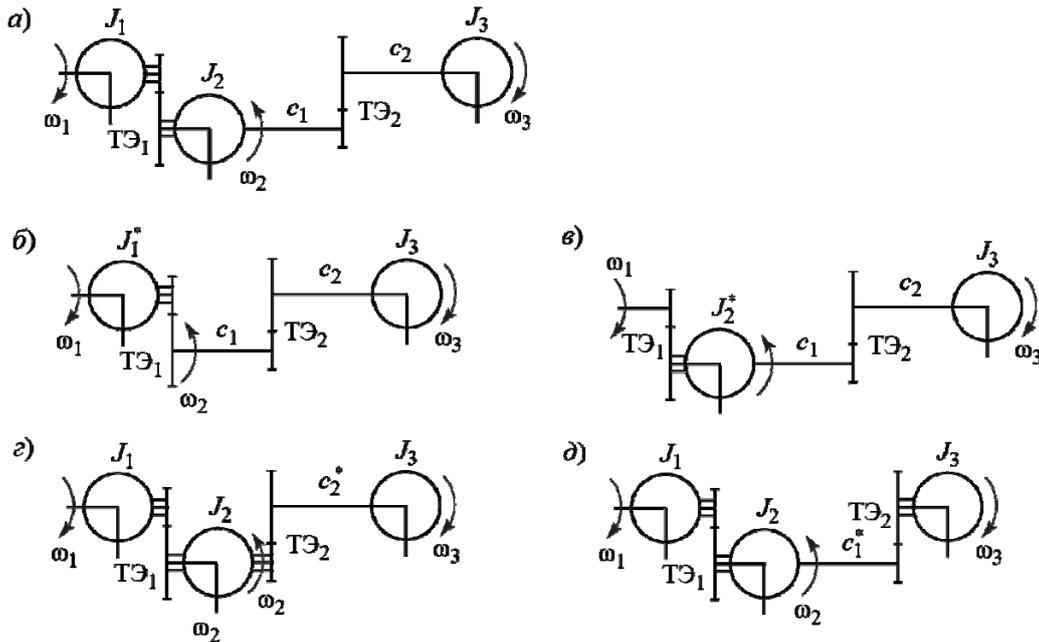


Рисунок 16 – Динамическая модель объекта с топологическими вырождениями (а); варианты исключения первого вырождения (б, в); варианты исключения второго вырождения (г, д)

Если приведение выполнить к модели на рисунке 16, б, то кинетическая энергия  $E_{k1}^*$  объединённой массы  $J_1^*$  будет соответствовать выражению

$$E_{k1}^* = J_1^* \omega_1^2 / 2. \quad (94)$$

Подставим значения  $E_{k1}^*$ ,  $E_{k1}$  и  $E_{k2}$  в выражение (91):

$$J_1^* \omega_1^2 / 2 = J_1 \omega_1^2 / 2 + J_2 \omega_2^2 / 2. \quad (95)$$

Учитывая передаточное число  $u_1 = \omega_1 / \omega_2$  трансформаторного элемента ТЭ<sub>1</sub>, подставим значение  $\omega_2$  в выражение (95). В результате

$$J_1^* = J_1 + J_2 / u_1^2. \quad (96)$$

Если приведение выполнить к модели на рисунке 16, в, получим

$$E_{k2}^* = J_2^* \omega_2^2 / 2. \quad (97)$$

Тогда

$$J_2^* \omega_2^2 / 2 = J_1 \omega_1^2 / 2 + J_2 \omega_2^2 / 2. \quad (98)$$

Подставим значение  $\omega_1 = \omega_2 u_1$ . В результате получаем

$$J_2^* = J_1 u_1^2 + J_2. \quad (99)$$

Сравнивая между собой выражения (96) и (99), приходим к выводу, что при переносе массы против направления потока энергии её момент инерции  $J_2$  необходимо делить на квадрат передаточного числа  $u_1^2$  трансформаторного элемента ТЭ<sub>1</sub>, а если по направлению потока энергии, то момент инерции переносимой массы  $J_1$  необходимо умножить на  $u_1^2$ .

Для исключения второго топологического вырождения динамической модели, представленной на рисунке 16, а, следует объединить упругие элементы  $c_1$  и  $c_2$ , сохраняя при этом неизменной потенциальную энергию системы.

Потенциальная энергия  $i$ -го упругого элемента вычисляется по формуле

$$E_{\text{п}i} = c_i \Delta \varphi_i^2 / 2, \quad (100)$$

где  $\Delta \varphi_i$  – деформация  $i$ -го упругого элемента.

Момент упругого элемента  $M_{y_i}$  также определяется величиной его деформации  $\Delta \varphi_i$ :

$$M_{y_i} = c_i \Delta \varphi_i. \quad (101)$$

Подставим значение  $\Delta \varphi_i$ , выраженное из (101), в формулу (100). В результате получим выражение для вычисления потенциальной энергии  $E_{\text{п}i}$  через момент упругого элемента

$$E_{\text{п}i} = M_{y_i}^2 / (2c_i). \quad (102)$$

Используя выражение (102), получим следующие расчётные формулы:

$$E_{\text{п}1} = M_{y1}^2 / (2c_1); \quad (103)$$

$$E_{\text{п}2} = M_{y2}^2 / (2c_2). \quad (104)$$

Объединим упругие элементы  $c_1$  и  $c_2$  путём переноса элемента  $c_1$  к элементу  $c_2$  через трансформаторный элемент ТЭ<sub>2</sub> (рисунок 16, з). Потенциальная энергия полученного объединённого упругого элемента  $c_2^*$

$$E_{\text{п}2}^* = (M_{y2}^*)^2 / (2c_2^*), \quad (105)$$

где  $M_{y2}^*$  – момент упругого элемента  $c_2^*$ :

$$M_{y2}^* = M_{y1} u_2, \quad (106)$$

$u_2$  – передаточное число трансформаторного элемента ТЭ<sub>2</sub>.

Запишем выражение равенства потенциальных энергий исходной и преобразованной моделей, используя выражения (103)–(105):

$$(M_{y2}^*)^2 / (2c_2^*) = M_{y1}^2 / (2c_1) + M_{y2}^2 / (2c_2). \quad (107)$$

Соотношение между моментами  $M_{y1}$  и  $M_{y2}$  определяется коэффициентом трансформации  $K_2$  трансформаторного элемента ТЭ<sub>2</sub>:

$$M_{y2} = M_{y1}K_2 = M_{y1}u_2\eta_2, \quad (108)$$

где  $u_2$ ,  $\eta_2$  – передаточное число и КПД ТЭ<sub>2</sub>.

При выполнении преобразований динамической модели потерями в ТЭ<sub>2</sub> можно пренебречь и принять  $\eta_2 = 1$ . Тогда

$$M_{y2} = M_{y1}u_2. \quad (109)$$

Очевидно, что моменты упругих элементов  $c_2$  и  $c_2^*$  должны быть взаимно равными, т. к. элемент  $c_2^*$  в модели на рисунке 16,  $z$  располагается на месте элемента  $c_2$ . Следовательно,  $M_{y2}^* = M_{y2}$ . Учитывая это, подставим в выражение (107) значение  $M_{y1} = M_{y2}/u_2$ . После соответствующих сокращений получаем

$$\frac{1}{c_2^*} = \frac{1}{c_1u_2^2} + \frac{1}{c_2}. \quad (110)$$

В результате находим искомое значение коэффициента жёсткости объединённого упругого элемента  $c_2^*$ , получаемое при переносе упругого элемента  $c_1$  к элементу  $c_2$  через трансформаторный элемент ТЭ<sub>2</sub>:

$$c_2^* = \frac{c_1u_2^2c_2}{c_1u_2^2 + c_2}. \quad (111)$$

При переносе упругого элемента  $c_2$  к элементу  $c_1$  (рисунок 16,  $d$ ) получаем равенство

$$(M_{y1}^*)^2 / (2c_1^*) = M_1^2 / (2c_1) + M_2^2 / (2c_2). \quad (112)$$

Учитывая соотношение (109), подставим значение  $M_{y2}$ . После соответствующих сокращений получаем

$$\frac{1}{c_1^*} = \frac{1}{c_1} + \frac{u_2^2}{c_2}. \quad (113)$$

В результате

$$c_1^* = \frac{c_1c_2/u_2^2}{c_1 + c_2/u_2^2}. \quad (114)$$

Сравнивая между собой выражения (111) и (114), приходим к выводу, что при переносе упругого элемента против направления потока энергии его коэффициент жёсткости  $c_2$  необходимо делить на квадрат передаточного числа  $u_2^2$  трансформаторного элемента ТЭ<sub>2</sub>, а если по направлению потока энергии, коэффициент жёсткости переносимого элемента  $c_1$  необходимо умножить на  $u_2^2$ .

### **Контрольные вопросы**

1 Классификация динамических моделей технических объектов в зависимости от их конфигурации.

2 Какие нарушения в построении структуры динамической модели приводят к топологическим вырождениям?

3 При наблюдении каких условий динамическая модель объекта называется регулярной?

4 Какие возможны варианты структуры динамической модели, при которых она будет содержать топологические вырождения?

5 Какие преобразования необходимо производить, чтобы избавиться от топологического вырождения, обусловленного неправильным размещением упругих элементов модели?

6 Какие преобразования необходимо производить, чтобы избавиться от топологического вырождения, обусловленного неправильным размещением инерционных элементов модели?

## Лабораторная работа № 6. Упрощение динамических моделей механических систем

### 1 Обоснование необходимости упрощения динамической модели.

При построении динамической модели технического объекта проектировщики и исследователи обычно стремятся учесть структуру и физические свойства всех конструктивных механизмов объекта, что в результате приводит к сложной математической модели. Полученная модель при этом характеризуется широким спектром матрицы Якоби и высокими значениями резонансных частот, значительно превышающими частоты внешних возмущающих воздействий. Система дифференциальных уравнений оказывается плохо обусловленной, её решение существенно затрудняется и может сопровождаться неустойчивостью вычислительного процесса. Такую модель следует признать чрезмерно подробной и необоснованно сложной. Её целесообразно упростить, исключив некоторое число степеней свободы динамической модели. При этом будет определяться ограниченный спектр резонансных частот, включающий лишь те частоты, на которых возможно возникновение резонансных колебаний моделируемого объекта. Математическая модель при этом упрощается, а главное – улучшается обусловленность системы дифференциальных уравнений, уменьшаются погрешности вычислений, сокращаются затраты ресурсов на проектирование технической системы.

При упрощении необходимо выявить элементы динамической модели, которые обуславливают наличие высоких значений собственных и резонансных частот. Спектр резонансных частот можно определить по спектру матрицы Якоби. Мнимые части собственных значений – это резонансные частоты системы. Если при определении спектра матрицы Якоби не учитывать диссипативные элементы, тогда вещественные части собственных значений будут равны нулю, следовательно, колебания будут незатухающие. В этом случае мнимые части представляют собой собственные частоты системы. Значения резонансных частот немного меньше собственных.

Однако по спектру матрицы Якоби нельзя выявить элементы динамической модели объекта, создающие высокие частоты. Для этого используется **метод парциальных частот**. Этот метод заключается в расчленении исходной динамической модели на **парциальные системы** и последующие определения их парциальных частот.

Различают два основных типа парциальных систем:

1) одномассовая, базовым элементом которой является масса, а система включает все элементы, взаимодействующие с этой массой;

2) двухмассовая, базовым элементом которой является упругий элемент, а также все взаимодействующие с ним элементы.

При определении **собственных парциальных частот** используемых парциальных систем диссипативные элементы не учитываются. Взаимная замена этих парциальных систем позволяет осуществлять упрощение динамических моделей.

На рисунке 17 представлены одномассовая и двухмассовая парциальные системы.

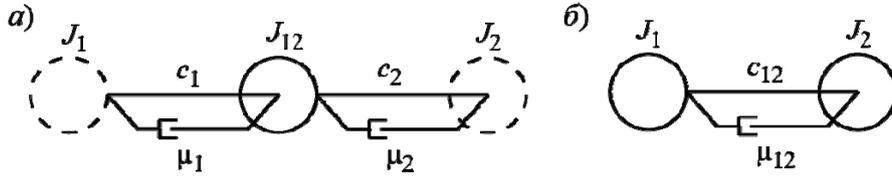
Взаимная замена этих парциальных систем основана на следующих соотношениях между их параметрами:

$$\frac{J_1}{J_1 + J_2} = \frac{c_1}{c_1 + c_2}; \quad (115)$$

$$\frac{J_2}{J_1 + J_2} = \frac{c_2}{c_1 + c_2}; \quad (116)$$

$$J_{12} = J_1 + J_2; \quad (117)$$

$$c_{12} = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2}. \quad (118)$$



*a* – одномассовая; *б* – двухмассовая

Рисунок 17 – Простейшие парциальные системы:

Для выявления элемента с наивысшей частотой используют одномассовые парциальные системы. Парциальная частота  $i$ -й массы вычисляется по формуле

$$\omega_{\Pi i} = \sqrt{\frac{\sum c_j}{J_i}}, \quad (119)$$

где  $J_i$  – момент инерции  $i$ -й массы;

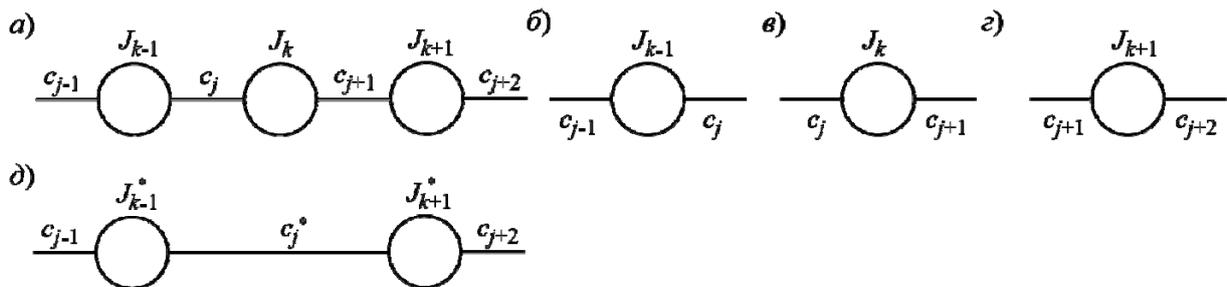
$c_j$  – коэффициент жёсткости  $j$ -го упругого элемента, взаимодействующего с  $i$ -й массой.

Учитываются все упругие элементы, входящие в состав парциальной системы, поэтому в формуле (119) их параметры суммируются.

Масса  $J_{12}$ , имеющая наивысшую парциальную частоту, подлежит ликвидации, а её величина перераспределяется между смежными массами исходя из условия сохранения кинетической энергии, т. е.  $E_{к12} = E_{к1} + E_{к2}$ . Упругие элементы  $c_1$  и  $c_2$  объединяются в один элемент  $c_{12}$  из условия сохранения потенциальной энергии  $E_{\Pi 12} = E_{\Pi 1} + E_{\Pi 2}$ . В результате число степеней свободы системы уменьшается на единицу, т. е. происходит упрощение динамической модели с сохранением всех её физических свойств, поскольку сохраняются неизменными кинетическая и потенциальная энергии системы.

## 2 Методика выполнения процесса упрощения динамической модели.

На рисунке 18, *a* представлен фрагмент динамической модели, содержащей только инерционные и упругие элементы, а на рисунке 18, *б–г* – одномассовые парциальные системы, выделенные из рассматриваемого фрагмента.



*a* – исходная модель; *б–г* – парциальные системы; *д* – динамическая модель после упрощения

Рисунок 18 – Иллюстрация этапов выполнения процесса упрощения динамической модели

Парциальные частоты одномассовых парциальных систем определим по формулам

$$\omega_{\text{пк}k-1} = \sqrt{\frac{c_{j-1} + c_j}{J_{k-1}}}; \quad \omega_{\text{пк}k} = \sqrt{\frac{c_j + c_{j+1}}{J_k}}; \quad \omega_{\text{пк}k+1} = \sqrt{\frac{c_{j+1} + c_{j+2}}{J_{k+1}}}. \quad (120)$$

Предположим, что  $\omega_{\text{пк}k}$  больше всех остальных парциальных частот. Тогда масса  $J_k$  подлежит ликвидации путём перераспределения её величины  $J_k$  между массами  $J_{k-1}$  и  $J_{k+1}$ , а упругие элементы  $c_j$  и  $c_{j+1}$  объединяются. В результате фрагмент модели на рисунке 18, а заменяется фрагментом на рисунке 18, д. Преобразования выполняются на основе выражений (115)–(118).

Представим массу  $J_k$  состоящей из двух составляющих:

$$J_k = \Delta J_{k-1} + \Delta J_{k+1}, \quad (121)$$

где  $\Delta J_{k-1}$  – часть массы  $J_k$ , присоединяемая к массе  $J_{k-1}$ ;

$\Delta J_{k+1}$  – часть массы  $J_k$ , присоединяемая к массе  $J_{k+1}$ .

Фрагмент динамической модели после её упрощения представлен на рисунке 18, д. Параметры полученной модели вычисляются по формулам

$$J_{k-1}^* = J_{k-1} + \Delta J_{k-1}; \quad (122)$$

$$J_{k+1}^* = J_{k+1} + \Delta J_{k+1}; \quad (123)$$

$$c_j^* = \frac{c_j c_{j+1}}{c_j + c_{j+1}}. \quad (124)$$

Для определения  $\Delta J_{k-1}$  и  $\Delta J_{k+1}$  используем формулы (115) и (116):

$$\frac{\Delta J_{k-1}}{\Delta J_{k-1} + \Delta J_{k+1}} = \frac{c_j}{c_j + c_{j+1}}; \quad \frac{\Delta J_{k+1}}{\Delta J_{k-1} + \Delta J_{k+1}} = \frac{c_{j+1}}{c_j + c_{j+1}}. \quad (125)$$

Учитывая выражение (121), получаем расчётные формулы для вычисления значений  $\Delta J_{k-1}$  и  $\Delta J_{k+1}$

$$\Delta J_{k-1} = J_k \frac{c_j}{\sum c}; \quad (126)$$

$$\Delta J_{k+1} = J_k \frac{c_{j+1}}{\sum c}, \quad (127)$$

где  $\sum c = c_j + c_{j+1}$ .

Таким образом, параметр инерционного элемента (сосредоточенной массы), исключаемого из динамической модели, распределяется между смежными сосредоточенными массами пропорционально коэффициентам жёсткости примыкающих к ним упругих элементов.

### 3 Упрощение динамической модели объекта с трансформаторными элементами.

Рассмотрим методику упрощения на примере динамической модели объекта, представленной на рисунке 19.

Вначале выделим одномассовые парциальные системы с учётом всех взаимодействующих элементов с данной массой. Первая парциальная система приведена на рисунке 20, а.

Она содержит базовый элемент с параметром  $J_1$  и взаимодействующие с ним трансформаторный элемент  $T\Theta_{11}$  и упругий элемент с параметром  $c_1$ . Для определения парциальной частоты этой системы на основе формулы (119) её необходимо привести к стандартному виду, содержащему только инерционный и упругий элементы, как показано на рисунке 20, б, т. е. перенести упругий элемент  $c_1$  через трансформаторный элемент  $T\Theta_{11}$  к инерционному элементу  $J_1$ .

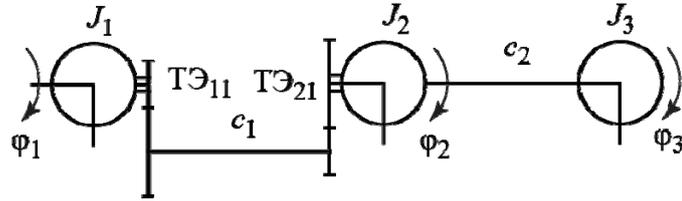


Рисунок 19 – Динамическая модель объекта с трансформаторными элементами

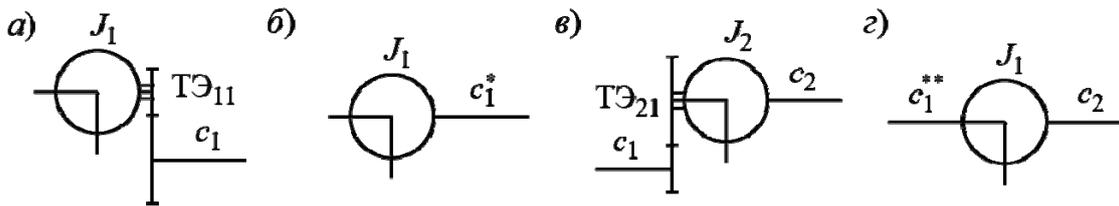


Рисунок 20 – Одномассовые парциальные системы динамической модели объекта с трансформаторными элементами

В лабораторной работе № 5 показано, что при переносе упругого элемента против направления потока энергии значение его параметра  $c_1$  необходимо разделить на квадрат передаточного числа трансформаторного элемента  $T\Theta_{11}$ , т. е. на  $u_{11}^2$ . В результате получим эквивалентный упругий элемент с параметром  $c_1^*$ , вычисляемым по формуле

$$c_1^* = c_1 / u_{11}^2. \quad (128)$$

Парциальную частоту первой парциальной системы вычислим по формуле

$$\omega_{п1} = \sqrt{c_1^* / J_1} = \sqrt{c_1 / (u_{11}^2 J_1)}. \quad (129)$$

Вторая парциальная система приведена на рисунке 20, в. В неё входят базовый инерционный элемент  $J_2$ , два упругих элемента  $c_1$  и  $c_2$  и трансформаторный элемент  $T\Theta_{21}$ . Приведение этой парциальной системы к стандартному виду показано на рисунке 20, з. При этом осуществлён перенос упругого элемента  $c_1$  через  $T\Theta_{21}$  к инерционному элементу  $J_2$  по направлению потока энергии. В этом случае значение  $c_1$  необходимо умножить на квадрат передаточного числа трансформаторного элемента  $T\Theta_{21}$ :

$$c_1^{**} = c_1 u_{21}^2. \quad (130)$$

Парциальная частота этой системы  $\omega_{п2}$  определится по формуле

$$\omega_{п2} = \sqrt{(c_1^{**} + c_2) / J_2} = \sqrt{(c_1 u_{21}^2 + c_2) / J_2}. \quad (131)$$

Третья парциальная система стандартная, поскольку содержит только инерционный  $J_3$  и упругий  $c_2$  элементы, а её парциальная частота

$$\omega_{п3} = \sqrt{c_2/J_3} . \quad (132)$$

Предположим, что максимальную парциальную частоту имеет вторая парциальная система, т. е.  $\omega_{пmax} = \omega_{п2}$ . Тогда инерционный элемент  $J_2$  следует ликвидировать, перераспределив значение его параметра  $J_2$  между массами  $J_1$  и  $J_3$  на основе выражений (126) и (127). При этом можно использовать парциальную систему на рисунке 20, г. Значения  $\Delta J_1$  и  $\Delta J_3$ , подлежащие переносу соответственно к массам  $J_1$  и  $J_3$ , определим по формулам

$$\Delta J_1 = J_2 \frac{c_1^{**}}{c_1^{**} + c_2}; \quad \Delta J_3 = J_2 \frac{c_2}{c_1^{**} + c_2} . \quad (133)$$

Но значение  $\Delta J_1$  необходимо перенести через трансформаторные элементы  $TЭ_{21}$  и  $TЭ_{11}$  для присоединения его к массе  $J_1$ . Причём этот перенос осуществляется против направления потока энергии. Следовательно, значение  $\Delta J_1$  необходимо делить на передаточные числа обоих трансформаторных элементов  $TЭ_{21}$  и  $TЭ_{11}$ . В результате получаем новые значения параметров первого  $J_1^*$  и третьего  $J_3^*$  инерционных элементов

$$J_1^* = J_1 + \Delta J_1 / (u_{11}^2 u_{21}^2); \quad J_3^* = J_3 + \Delta J_3 . \quad (134)$$

На рисунке 21 приведена полученная динамическая модель исследуемого объекта после выполненного упрощения с ликвидацией сосредоточенной массы  $J_2$ , имеющей наивысшую парциальную частоту.

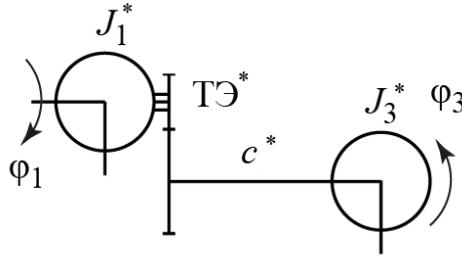


Рисунок 21 – Динамическая модель исследуемого объекта после выполненного упрощения

Параметры этой модели  $c^*$  и  $u^*$  вычислены по формулам

$$c^* = \frac{c_1^{**} c_2}{c_1^{**} + c_2}; \quad u^* = u_{11} u_{21} . \quad (135)$$

### Контрольные вопросы

- 1 Каковы причины необходимости упрощения структуры динамической модели?
- 2 Что такое резонансная частота системы? Сколько резонансных частот имеет динамическая система?
- 3 Чем отличается резонансная частота от собственной частоты?
- 4 Как определяется спектр резонансных частот динамической системы?
- 5 Можно ли по спектру матрицы Якоби выяснить, какая сосредоточенная масса имеет максимальную собственную парциальную частоту?
- 6 Какие существуют виды простейших парциальных систем? Каковы варианты структуры этих систем?
- 7 Для каких целей используются одномассовые и двухмассовые парциальные системы?

**Список литературы**

1 **Тарасик, В. П.** Математическое моделирование технических систем: учебник / В. П. Тарасик. – Минск: Новое знание; Москва: ИНФРА-М, 2016. – 592 с.

2 Справочное пособие по гидравлике, гидромашинам и гидроприводам / Под общ. ред. Б. Б. Некрасова. – Минск: Высшэйшая школа, 1985. – 382 с.