

Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования  
«Белорусско-Российский университет»

УТВЕРЖДАЮ

Первый проректор Белорусско-  
Российского университета

  
А.В. Машин

«28» 06 2021 г.

Регистрационный № УД-010304/Б.1.0.17/р

**ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ И ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ**  
(наименование дисциплины)

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ**

**Направление подготовки** 01.03.04 Прикладная математика

**Направленность (профиль)** Разработка программного обеспечения

**Квалификация** Бакалавр

|   | Форма обучения |
|---|----------------|
|   | Очная          |
| Курс  | 2              |
| Семестр                                     | 4              |
| Лекции, часы                                | 34             |
| Практические занятия, часы                  | 34             |
| Экзамен, семестр                            | 4              |
| Контактная работа по учебным занятиям, часы | 68             |
| Самостоятельная работа, часы                | 76             |
| Всего часов / зачётных единиц               | 144/4          |

Кафедра-разработчик программы: «Высшая математика»

Составители: А.М. Бутома, старший преподаватель,  
(И.О. Фамилия, учёная степень, учёное звание)

Л.И. Сотская, канд. физ-мат. наук, доцент  
(И.О. Фамилия, учёная степень, учёное звание)

Могилев, 2021

Рабочая программа составлена в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования - бакалавриат по направлению подготовки 01.03.04 Прикладная математика № 11 от 10.01.2018 г., учебным планом рег. № 010304-2 от 26.03.2021 г.

Рассмотрена и рекомендована к утверждению кафедрой «Высшая математика» 27.05.2021 г., протокол № 9.

Зав. кафедрой



В.Г. Замураев

Одобрена и рекомендована к утверждению Научно-методическим советом Белорусско-Российского университета

«16» июня 2021 г., протокол № 7.

Зам. председателя  
Научно-методического совета



С.А. Сухоцкий

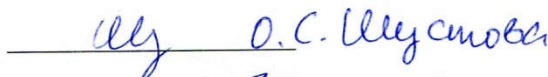
Рецензент:

И.В. Марченко, зав. кафедры алгебры, геометрии и дифференциальных уравнений  
(И.О. Фамилия, должность, учёная степень, учёное звание рецензента)

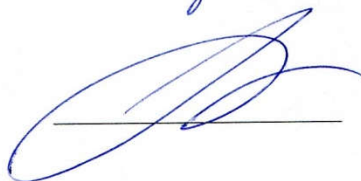
УО «МГУ имени А. А. Кулешова», кандидат физико-математических наук.  
(И.О. Фамилия, должность, учёная степень, учёное звание рецензента)

Рабочая программа согласована:

Ведущий библиотекарь



Начальник учебно-методического  
отдела



ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К РАБОЧЕЙ ПРОГРАММЕ УВО

по учебной дисциплине ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ И ОПТИМАЛЬНОЕ  
УПРАВЛЕНИЕ

специальности 01.03.04 Прикладная математика  
(Разработка программного обеспечения)

на 2023-2024 учебный год

| №№<br>пп     | Дополнения и изменения  |   |  | Основа-<br>ние                                 |
|--------------|---|---|--|--|
| 1            | П.7.1 изложить в новой редакции:<br>7.1 Основная литература   |   |  | Пополне-<br>ние<br>библио-<br>течного<br>фонда |
| №<br>п/<br>п | Библиографическое описание  | Гриф  | Количес-<br>тво<br>экземпля-<br>ров / URL  |  |
| 1            | Толпегин, О. А. Математическое программирование. Вариационное исчисление : учебное пособие для вузов / О. А. Толпегин. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2023. — 233 с. — (Высшее образование). | Рек. УМО ВО в качестве учебного пособия для студентов ВУЗ, обучающихся по инженерно-тех. напр.      | <a href="https://urait.ru/bcode/5133">https://urait.ru/bcode/5133</a><br>10                                |  |
| 2            | Рачков, М. Ю. Оптимальное управление в технических системах : учебное пособие для вузов / М. Ю. Рачков. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2023. — 120 с. — (Высшее образование).                | Рек. УМО ВО в качестве учебного пособия для студентов ВУЗ, обучающихся по инженерно-тех. напр.      | <a href="https://urait.ru/bcode/5137">https://urait.ru/bcode/5137</a><br>17                                |  |
| 2            | П.7.2 изложить в новой редакции:<br>7.2 Дополнительная литература   |   |  | Пополне-<br>ние<br>библио-<br>течного<br>фонда |
| №<br>п/<br>п | Библиографическое описание  | Гриф  | Количес-<br>тво<br>экземпля-<br>ров / URL  |  |
| 1            | Толпегин, О. А. Методы оптимального управления : учебник и практикум для вузов / О. А. Толпегин. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2023. — 234 с. — (Высшее образование).                       | Рек. УМО ВО в качестве учебника и практикума для студентов ВУЗ, обучающихся по инженерно-тех. напр. | <a href="https://urait.ru/bcode/5133">https://urait.ru/bcode/5133</a><br>09                                |  |
| 2            | Коган, Е.А. Обыкновенные дифференциальные уравнения и вариационное исчисление / Е. А. Коган – Москва. Издательство: НИЦ ИНФРА-М, 2020. – 293 с.   | Рек. межрегиональным УМС проф. образования в качестве учебного пособия для студентов ВУЗ.           | <a href="https://znaniyum.com/catalog/product/105892">https://znaniyum.com/catalog/product/105892</a><br>2 |  |

Рабочая программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры  
Высшая математика  
(название кафедры-разработчика программы)

(протокол № 7 от « 31 » 03 2023 г.)

Заведующий кафедрой

канд. физ.-мат. наук, доцент В.Г. Замураев  
(ученая степень, ученое звание)

УТВЕРЖДАЮ

Декан экономического факультета  
(название факультета, выпускающего по данной специальности)

канд. физ.-мат. наук, доцент И.И. Маковецкий  
(ученая степень, ученое звание)

29 06 2023

СОГЛАСОВАНО:

Зав. кафедрой

высшая математика В.Г. Замураев  
(название выпускающей кафедры данной специальности)

Ведущий библиотекарь

И.С. Шустова

Начальник учебно-методического  
отдела

О.Е. Печковская

29 06 2023

ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К РАБОЧЕЙ ПРОГРАММЕ УВО

по учебной дисциплине ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ И ОПТИМАЛЬНОЕ  
УПРАВЛЕНИЕ

специальности 01.03.04 Прикладная математика  
(Разработка программного обеспечения)

на 2022-2023 учебный год

| №№<br>п/п            | Дополнения и изменения   |  |   | Основание                            |
|----------------------|--|--|---|--------------------------------------|
| 1                    | П.7.1 изложить в новой редакции:<br>7.1 Основная литература  |  |   | Пополнение<br>библиотечного<br>фонда |
| №<br><br>п<br>/<br>п | Библиографическое описание   | Гриф   | Количес<br>тво<br>экземпля<br>ров /<br>URL                                  |                                      |
| 1                    | <b>Матвеев, А.С.</b> Введение в математическую теорию оптимального управления [Электронный ресурс]: учебник.– СПб: СПбГУ, 2018. – 194 с.– (Высшее образование: Бакалавриат). – Режим доступа: <a href="http://znanium.com/">http://znanium.com/</a>  |  | <a href="http://znanium/product/1244354">http://znanium/product/1244354</a> |                                      |
| 2                    | <b>Абдрахманов, В. Г.</b> Элементы вариационного исчисления и оптимального управления. Теория, задачи, индивидуальные задания : учеб. пособие / В. Г. Абдрахманов, А. В. Рабчук. - 2-е изд., испр. - СПб. ; М. ; Краснодар : Лань, 2021. - 112с. : ил. - (Учебники для вузов. Специальная литература). | Учебники для вузов. Специальная литература.  | 5   |                                      |
| 3                    | <b>Черняк, А. А.</b> Методы оптимизации. Теория и алгоритмы : учеб. пособие для вузов / А. А. Черняк [и др.]. - 2-е изд., испр. и доп. - М. : Юрайт, 2021. - 357с. - (Высшее образование).   | Рекомендовано УМО ВО в качестве учебного пособия для студентов вузов, обучающихся по инженерно-техническому направлению. | 8   |                                      |

Рабочая программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры  
Высшая математика

(название кафедры-разработчика программы)

(протокол № 7 от «31» 03 2022 г.)

Заведующий кафедрой

канд. физ.-мат. наук, доцент  
(ученая степень, ученое звание)

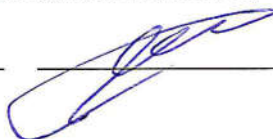


В.Г. Замураев

УТВЕРЖДАЮ

Декан экономического факультета  
(название факультета, выпускающего по данной специальности)

канд. физ.-мат. наук, доцент  
(ученая степень, ученое звание)



И.И. Маковецкий

«25» 05 2022 г.

СОГЛАСОВАНО:

Зав. кафедрой

высшая математика

(название выпускающей кафедры данной специальности)



В.Г. Замураев

Ведущий библиотекарь



Е.Н. Киселева

Начальник учебно-методического  
отдела



В.А. Кемова

«25» 05 2022 г.

## 1 ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

### 1.1 Цель учебной дисциплины

развитие у студентов алгоритмического и аналитического мышления; формирование навыков, необходимых для изучения, анализа, прогнозирования и управления процессами, происходящими в технике, экономике.

### 1.2 Планируемые результаты изучения дисциплины

В результате освоения учебной дисциплины студент должен

#### знать:

- классические понятия вариационного исчисления: функционал и его вариации, определение вариации с помощью производной, уравнение Эйлера;
- основные понятия и методы теории оптимального управления сосредоточенными и распределёнными системами; методы синтеза оптимального управления;
- классическую и современную литературу по вариационному исчислению и оптимальному управлению.

#### уметь:

- анализировать ситуацию, выбирать математические модели, проверять адекватность моделей исследуемым процессам;
- формулировать постановки задач моделирования для функционалов различного вида;
- применять вариационный подход к моделированию процессов, происходящих в технике и экономике;
- разрабатывать алгоритмы и применять методы оптимального управления к решению практических задач в технике и экономике.

#### владеть:

- навыками анализа ситуации, моделирования процессов и формулировки вариационных задач, в том числе задач оптимального управления;
- навыками применения методов вариационного исчисления и оптимального управления к решению задач.

### 1.3 Место учебной дисциплины в системе подготовки студента

Дисциплина относится к Блоку 1 "Дисциплины (модули)" (Обязательная часть).

Перечень учебных дисциплин, изучаемых ранее, усвоение которых необходимо для изучения данной дисциплины:

- Математический анализ;
- Аналитическая геометрия;
- Обыкновенные дифференциальные уравнения;

Перечень учебных дисциплин, которые будут опираться на данную дисциплину:

- Математическое программирование;
- Исследование операций и теория игр;
- Математическое моделирование в естествознании, технике и экономике.

Кроме того, знания, полученные при изучении дисциплины, будут применены при прохождении учебной и производственной практик.

### 1.4 Требования к освоению учебной дисциплины

Освоение данной учебной дисциплины должно обеспечивать формирование следующих компетенций:

| Коды | Наименования формируемых компетенций |
|------|--------------------------------------|
|------|--------------------------------------|

|                         |   |
|-------------------------|---|
| формируемых компетенций |   |
| ОПК-2                   | Способен обоснованно выбирать, дорабатывать и применять для решения исследовательских и проектных задач математические методы и модели, осуществлять проверку адекватности моделей, анализировать результаты, оценивать надёжность и качество функционирования систем |
| ПК-1                    | Способен формулировать постановки задач моделирования, осуществлять анализ математических моделей и проверять их корректность   |

## 2 СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Вклад дисциплины в формирование результатов обучения выпускника (компетенций) и достижение обобщённых результатов обучения происходит путём освоения содержания обучения и достижения частных результатов обучения, описанных в данном разделе.

### 2.1 Содержание учебной дисциплины

| Номер тем | Наименование тем  | Содержание  | Коды формируемых компетенций |
|-----------|---|---|------------------------------|
| 1         | Задачи, приводящие к вариационным формулировкам.                            | Рассмотрение различных задач, приводящих к поиску максимума или минимума некоторой интегральной величины.   | ОПК-2, ПК-1                  |
| 2         | Основы дифференциального исчисления в линейных нормированных пространствах. | Линейные нормированные и банаховы пространства. Непрерывность и дифференцируемость функционала. определённого на нормированном пространстве. Дифференциалы Фреше и Гато, первая вариация.                                     | ОПК-2                        |
| 3         | Основные леммы вариационного исчисления.                                    | Экстремум функционала, необходимое условие экстремума функционала. Основные леммы вариационного исчисления.   | ОПК-2                        |
| 4         | Вариационные задачи с фиксированными границами.                             | Простейшая задача вариационного исчисления. Уравнения Эйлера. Функционалы от нескольких функций. Функционалы с производными высшего порядка. Функционалы от функции нескольких переменных. Канонический вид уравнений Эйлера. | ОПК-2, ПК-1                  |
| 5         | Простейшие задачи вариационного исчисления с подвижными границами.          | Вариационные задачи с подвижными концами. Естественные краевые условия. Задачи с подвижными границами. Условия трансверсальности. Экстремали с угловыми точками. Условия Вейерштрасса -Эрдмана.                               | ОПК-2, ПК-1                  |
| 6         | Тема 5. Вариационные задачи на условный экстремум.                          | Основные типы задач на условный экстремум. Задача Лагранжа. Изопериметрическая задача. Необходимые условия экстремума в задаче Лагранжа. Необходимые условия экстремума в изопериметрической задаче. Задача Больца и          | ОПК-2, ПК-1                  |



|    |  |   |             |
|----|--|---|-------------|
|    |  | задача Майера.  |             |
| 7  | Достаточные условия экстремума.  | Квадратичный функционал. Вторая вариация функционала. Слабый экстремум. Условие Лежандра. Уравнение Якоби. Сильный экстремум.   | ПК-1        |
| 8  | Задача оптимального управления   | Постановка задачи оптимального управления. Критерии качества. Задача Лагранжа в форме Понtryгина.   | ОПК-2, ПК-1 |
| 9  | Синтез оптимального управления.  | Линейные задачи оптимального управления. Вариационные методы в задачах синтеза оптимального управления.   | ОПК-2, ПК-1 |
| 10 | Принцип максимума.   | Автономная система управления. Формулировка принципа максимума. Сопряжённая система. Функция Понtryгина. Линейная задача оптимального быстрогодействия. Задача синтеза управления.                                    | ОПК-2, ПК-1 |
| 11 | Пространства функций, имеющих обобщённые производные.                      | Обобщённое решение уравнений в частных производных. Связь обобщённого решения с классическим.   | ОПК-2       |
| 12 | Оптимальное управление распределёнными системами.                          | Оптимальное управление распределёнными системами: постановка задач управления, виды целевых функций, управлений и наблюдений. Построение выпуклого полунепрерывного снизу коэрцитивного функционала специального вида | ОПК-2, ПК-1 |
| 13 | Компромиссное управление эллиптическими системами.                         | Получение оптимизационных систем для различных комбинаций типов управлений и наблюдений.  | ОПК-2, ПК-1 |
| 14 | Компромиссное управление параболическими системами.                        | Компромиссное управление параболическими системами. Получение оптимизационных систем для различных комбинаций типов управлений и наблюдений.  | ОПК-2, ПК-1 |
| 15 | Аппроксимативная управляемость систем.                                     | Задачи с жёстким управлением. Преобразование Лежандра. Минимизация функционалов с использованием сопряжённых функционалов.  | ОПК-2, ПК-1 |
| 16 | Аппроксимативная управляемость эллиптическими и параболическими системами. | Аппроксимативная управляемость эллиптическими и параболическими системами.  | ПК-1        |
| 17 | Метод градиентного спуска отыскания минимумов целевых функционалов.        | Метод градиентного спуска отыскания минимумов целевых функционалов. Численная реализация градиентного метода.   | ОПК-2, ПК-1 |

## 2.2 Учебно-методическая карта учебной дисциплины

| № недели | Лекции<br>(наименование тем)  | Часы | Практические<br>(семинарские)<br>занятия  | Часы | Лабораторные<br>занятия | Часы | Самостоятельная<br>работа, часы | Форма контроля<br>знаний | Баллы (max) |
|----------|---|------|---|------|-------------------------|------|---------------------------------|--------------------------|-------------|
| Модуль 1 |   |      |   |      |                         |      |                                 |                          |             |
| 1        | Тема 1. Задачи, приводящие к вариационным проблемам.                                | 2    | Тема 1. Задачи вариационного исчисления.  | 2    |                         |      | 2                               |                          |             |
| 2        | Тема 2. Основы дифференциального исчисления в линейных нормированных пространствах. | 2    | Тема 2. Пространства функций, вычисление норм в различных функциональных пространствах.   | 2    |                         |      | 2                               |                          |             |
| 3        | Тема 3. Основы дифференциального исчисления в линейных нормированных пространствах. | 2    | Тема 3. Непрерывность и дифференцируемость функционалов.                                  | 2    |                         |      | 2                               |                          |             |
| 4        | Тема 4. Основы дифференциального исчисления в линейных нормированных пространствах. | 2    | Тема 4. Первая вариация функционала.  | 2    |                         |      | 2                               |                          |             |
| 5        | Тема 5. Основные леммы вариационного исчисления.                                    | 2    | Тема 5. Экстремум функционала. Необходимое условие экстремума.                            | 2    |                         |      | 2                               |                          |             |
| 6        | Тема 6. Вариационные задачи с фиксированными границами.                             | 2    | Тема 6. Уравнения Эйлера для простейшей задачи вариационного исчисления.                  | 2    |                         |      | 2                               |                          |             |
| 7        | Тема 7. Вариационные задачи с фиксированными границами.                             | 2    | Тема 7. Функционалы, зависящие от нескольких функций                                      | 2    |                         |      | 2                               |                          |             |
| 8        | Тема 8. Вариационные задачи с фиксированными границами.                             | 2    | Тема 8. Функционалы, зависящие от производных высшего порядка (уравнения Эйлера-Пуассона) | 2    |                         |      | 2                               | КР<br>ПКУ                | 30<br>30    |
| Модуль 2 |   |      |   |      |                         |      |                                 |                          |             |
| 9        | Тема 9. Вариационные задачи с фиксированными границами.                             | 2    | Тема 9. Функционалы, зависящие от   | 2    |                         |      | 2                               |                          |             |

|       |   |    |   |    |  |    |                  |          |
|-------|---|----|---|----|--|----|------------------|----------|
|       |   |    | функций нескольких переменных (уравнения Эйлера-Остроградского)   |    |  |    |                  |          |
| 10    | Тема 10. Простейшие задачи вариационного исчисления с подвижными границами.         | 2  | Тема 10. Задачи с подвижными концами. Естественные условия. Задачи с подвижными границами. Условия трансверсальности. | 2  |  | 4  |                  |          |
| 11    | Тема 11. Вариационные задачи на условный экстремум.                                 | 2  | Тема 11. Задачи на условный экстремум. Задача Лагранжа и изопериметрическая задача.                                   | 2  |  | 2  |                  |          |
| 12    | Тема 12. Достаточные условия экстремума.  | 2  | Тема 12. Достаточные условия экстремума функционала. Задача Лагранжа в форме Понтрягина                               | 2  |  | 2  |                  |          |
| 13    | Тема 13. Синтез оптимального управления.  | 2  | Тема 13. Вариационные методы в задачах синтеза оптимального управления  | 2  |  | 2  |                  |          |
| 14    | Тема 14. Компромиссное управление эллиптическими системами.                         | 2  | Тема 14. Компромиссное управление эллиптическими системами.   | 2  |  | 4  |                  |          |
| 15    | Тема 15. Компромиссное управление параболическими системами.                        | 2  | Тема 15. Компромиссное управление параболическими системами.  | 2  |  | 2  |                  |          |
| 16    | Тема 16. Аппроксимативная управляемость эллиптическими и параболическими системами. | 2  | Тема 16. Жёсткое управление эллиптическими и параболическими системами.   | 2  |  | 2  |                  |          |
| 17    | Тема 17. Метод градиентного спуска отыскания минимумов целевых функционалов.        | 2  | Тема 17. Метод градиентного спуска  | 2  |  | 4  | ЗИЗ<br>ПКУ       | 30<br>30 |
| 18-20 |   |    |   |    |  | 36 | ПА*<br>(экзамен) | 40       |
| Итого |   | 34 |   | 34 |  | 76 |                  | 144      |

\* - если предусмотрено учебным планом

Сумма часов «Итого» должна соответствовать часам на титульном листе

Принятые обозначения:

Текущий контроль –

КР – контрольная работа;

ЗИЗ – защита индивидуального задания;

ПКУ – промежуточный контроль успеваемости.

ПА - Промежуточная аттестация.

Итоговая оценка определяется как сумма текущего контроля и промежуточной аттестации и соответствует баллам:

Экзамен

|        |         |        |                   |                     |
|--------|---------|--------|-------------------|---------------------|
| Оценка | Отлично | Хорошо | Удовлетворительно | Неудовлетворительно |
| Баллы  | 87-100  | 65-86  | 51-64             | 0-50                |

### 3 ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

При изучении дисциплины используется модульно-рейтинговая система оценки знаний студентов. Применение форм и методов проведения занятий при изучении различных тем курса представлено в таблице.

| № п/п | Форма проведения занятия | Вид аудиторных занятий |                      | Всего часов |
|-------|--------------------------|------------------------|----------------------|-------------|
|       |                          | Лекции                 | Практические занятия |             |
| 1     | Традиционные             | 1-17                   | 1-17                 | 68          |
|       | <b>ИТОГО</b>             | 34                     | 34                   | 68          |

### 4 ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА

Используемые оценочные средства по учебной дисциплине представлены в таблице и хранятся на кафедре.

| № п/п | Вид оценочных средств          | Количество комплектов |
|-------|--------------------------------|-----------------------|
| 1     | Вопросы к экзамену             | 1                     |
| 2     | Экзаменационные билеты         | 1                     |
| 3     | Тестовые (контрольные) задания | 1                     |
| 4     | Индивидуальные задания         | 1                     |

### 5 МЕТОДИКА И КРИТЕРИИ ОЦЕНКИ КОМПЕТЕНЦИЙ СТУДЕНТОВ

#### 5.1 Уровни сформированности компетенций

| № п/п | Уровни сформированности компетенции  | Содержательное описание уровня* | Результаты обучения** |
|-------|--|---------------------------------|-----------------------|
|       | <i>Компетенция ОПК-2</i>   |                                 |                       |
|       | <i>Код и наименование индикатора достижения компетенции ОПК-2.9 Способен обоснованно выбирать, дорабатывать и применять для решения исследовательских и проектных задач методы и модели вариационного исчисления и теории оптимального управления,</i> |                                 |                       |

|  |                     |  |   |
|--|---------------------|--|---|
| осуществлять проверку адекватности моделей, анализировать результаты, оценивать надёжность и качество функционирования систем.   |                     |  |   |
| 1  | Пороговый уровень   | Знать основные определения и теоремы вариационного исчисления и оптимального управления. Уметь выбирать математические модели для исследуемых процессов, аналогичных ранее изученным; критерии для проверки адекватности предлагаемой модели реальному процессу.                       | Уметь распознавать математические объекты и свойства исследуемых объектов. Предлагать адекватные математические модели.                                 |
| 2  | Продвинутый уровень | Уметь дорабатывать известные математические модели и проверять адекватность моделей исследуемому процессу. анализировать результаты и качество предлагаемой модели.  | Уметь применять модели, которые не являются типичными, но знакомы студентам или выходят за рамки известного лишь в небольшой степени.                   |
| 3  | Высокий уровень     | Знать и понимать актуальные проблемы вариационного исчисления и оптимального управления, выходящие за рамки учебной информации; уметь предлагать новые, не аналогичные ранее изученным математические модели; уметь проверять адекватность предлагаемых моделей исследуемым процессам. | Уметь предлагать новые, не аналогичные ранее изученным, математические модели; уметь объяснять, анализировать и интерпретировать полученные результаты. |
| <i>Компетенция ПК-1</i>  |                     |  |   |
| <i>Код и наименование индикатора достижения компетенции ПК-1.5 Способен применять знание вариационного исчисления и теории оптимального управления при проведении научно-исследовательских разработок.</i> |                     |  |   |
| 1  | Пороговый уровень   | Знать и понимать основные определения, леммы и теоремы вариационного исчисления и оптимального управления. Уметь найти необходимую информацию  | Уметь применять знания, полученные в ходе изучения предмета при постановке задач моделирования  |

|   |                     |  |  |
|---|---------------------|--|--|
|   |                     | и использовать её для постановки задач моделирования вариационных задач и задач оптимального управления.   | типичных процессов.  |
| 2 | Продвинутый уровень | Знать доказательства, области применимости задач вариационного исчисления и теории оптимального управления к различным моделям. Уметь дорабатывать известные модели для постановки задач изучаемых процессов.  | Уметь применять модифицированные модели процессов, которые не являются типичными, но знакомы студентам или выходят за рамки известного лишь в небольшой степени. |
| 3 | Высокий уровень     | Знать и понимать актуальные вопросы постановки моделей задач вариационного исчисления и оптимального управления, выходящих за рамки учебной информации; уметь предлагать новые модели, проверять и доказывать их применимость к исследуемым процессам. | Уметь формулировать новые, отличающиеся от ранее изученных моделей; уметь объяснять, анализировать и интерпретировать предлагаемые модели.                       |

## 5.2 Методика оценки знаний, умений и навыков студентов

| Результаты обучения      | Оценочные средства                                       |
|--------------------------|--|
| <i>Компетенция ОПК-2</i> |  |
| Пороговый уровень        | Индивидуальные задания<br>Тестовые (контрольные) задания |
| Продвинутый уровень      | Индивидуальные задания<br>Тестовые (контрольные) задания |
| Высокий уровень          | Индивидуальные задания<br>Тестовые (контрольные) задания |
| <i>Компетенция ПК-1</i>  |  |
| Пороговый уровень        | Индивидуальные задания<br>Тестовые (контрольные) задания |
| Продвинутый уровень      | Индивидуальные задания<br>Тестовые (контрольные) задания |
| Высокий уровень          | Индивидуальные задания<br>Тестовые (контрольные) задания |

### 5.3 Критерии оценки индивидуальных заданий

Защита студентом индивидуального задания позволяет студенту получить максимум 30 баллов. Оценка индивидуального задания преподавателем определяется на основе ответов на вопросы и решения задач студентом. При этом студент получает:

20% от максимального числа баллов за задание в случае, когда продемонстрировано полное незнание изученного материала, отсутствие элементарных умений и навыков;

40% от максимального числа баллов за задание в случае, когда допущены существенные ошибки, показавшие, что студент не обладает обязательными умениями по данной теме в полной мере;

60% от максимального числа баллов за задание в случае, когда допущено более одной ошибки, но студент обладает обязательными умениями по проверяемой теме;

80% от максимального числа баллов за задание в случае, когда оно выполнено полностью, но обоснования шагов решения недостаточны (если умение обосновывать рассуждения не являлось специальным объектом проверки), допущена одна незначительная ошибка;

100% от максимального числа баллов за задание в случае, когда оно выполнено полностью, в логических рассуждениях и обосновании решения нет пробелов и ошибок, в решении нет математических ошибок (возможна одна неточность, описка, которая не является следствием незнания или непонимания учебного материала).

### 5.4 Критерии оценки контрольных работ

Выполнение контрольной работы позволяет студенту получить максимум 30 баллов. Оценка контрольной работы преподавателем определяется на основе решения задач студентом. При этом студент получает:

6 баллов в случае правильных ответов на 20% вопросов и задач;

12 баллов в случае правильных ответов на 40% вопросов и задач;

18 баллов в случае правильных ответов на 60% вопросов и задач;

24 балла в случае правильных ответов на 80% вопросов и задач;

30 баллов в случае правильных ответов на 100% вопросов и задач.

### 5.6 Критерии оценки экзамена

Согласно подразделу 2.2 итоговая экзаменационная оценка определяется в результате установления соответствия между суммой баллов промежуточного контроля успеваемости и текущей аттестации (экзамена) и оценкой по пятибалльной шкале. Промежуточный контроль успеваемости оценивается до 60 баллов, а текущая аттестация – до 40 баллов.

| Оценка | Отлично | Хорошо | Удовлетворительно | Неудовлетворительно |
|--------|---------|--------|-------------------|---------------------|
| Баллы  | 87-100  | 65-86  | 51-64             | 0-50                |

В рамках экзамена студент получает:

**0–7** балла за фрагментарные знания по базовым вопросам в объеме рабочей программы, недостаточными для усвоения последующих дисциплин, неуверенное использование терминологии, неумение решать типовые задачи;

**1–10** балла – за фрагментарные знания по базовым вопросам в объеме рабочей программы, недостаточными для усвоения последующих дисциплин, неуверенное использование терминологии, неумение решать типовые задачи под руководством преподавателя; грубые ошибки в рассуждениях или в решении задачи;

**11–23** баллов – за владение базовыми знаниями (знает основные понятия, владеет терминологией) в объеме рабочей программы, достаточными для усвоения последующих дисциплин, умение решать простейшие типовые задачи;

**24–32** баллов за полные знания в объеме рабочей программы, правильное использование терминологии, способность решать типовые задачи учебной дисциплины;

**33–40** баллов за систематизированные, глубокие и полные знания в объеме рабочей программы, точное использование научной терминологии и свободное владение инструментарием учебной дисциплины, умение анализировать и применять теоретические знания при самостоятельном решении типовых учебных задач и задач повышенной сложности, способность делать обоснованные выводы.

## **6 МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ОРГАНИЗАЦИИ И ВЫПОЛНЕНИЮ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ**

Самостоятельная работа студентов (СРС) направлена на закрепление и углубление освоения учебного материала, развитие практических умений. СРС включает следующие виды самостоятельной работы студентов:

- конспектирование;
- решение задач и упражнений по образцу;
- работа с лекционными материалами, включая основную и дополнительную литературу, которые представлены в пунктах 7.1 и 7.2;
- работа с материалами курса, вынесенными на самостоятельное изучение;
- работа со справочной литературой;
- выполнение контрольных работ;
- подготовка к аудиторным занятиям и контрольным работам;
- подготовка к экзамену.

Для СРС рекомендуется использовать источники, приведенные в п. 7.

Перечень методических указаний приведен в п. 7.4.1 и они хранятся в кабинете математики (к. 405). Кроме того, их электронные варианты представлены в университетской сети Интернет по адресу: [есо.bgu.by](http://есо.bgu.by).

По адресу [сдо.bgu.by](http://сдо.bgu.by) (учебные материалы), находится разработанный на кафедре электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК), который включает:

- курс лекций;
- методические рекомендации для практических занятий;
- примеры контрольных заданий
- вопросы к экзаменам,
- образцы экзаменационных билетов;
- список литературы.

## **7 УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ**

### **7.1 Основная литература**

| № п/п | Библиографическое описание   | Гриф | Количество экземпляров |
|-------|--|------|------------------------|
| 1     | Матвеев А.С. Введение в математическую теорию оптимального управления [Электронный ресурс]: учебник.– СПб: |      | ЭБС «Znanium»          |



|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
|  | СПбГУ, 2018. – 194 с.– (Высшее образование: Бакалавриат). – Режим доступа: <a href="http://znanium.com/">http://znanium.com/</a> |  |  |
|--|--|--|--|

## 7.2 Дополнительная литература

| № п/п | Библиографическое описание  | Гриф  | Количество экземпляров |
|-------|---|---|------------------------|
| 1     | Аттетков А.В., Зарубин В.С., Канатников А.Н. Методы оптимизации [Электронный ресурс]: учебное пособие. – М.: Инфра-М, 2019. – 270 с.– (Высшее образование: Бакалавриат). – Режим доступа: <a href="http://znanium.com/">http://znanium.com/</a> | Рекомендовано Министерством Образования РФ в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений | ЭБС «Znanium»          |

## 7.3 Перечень ресурсов сети Интернет по изучаемой дисциплине

Eco.bru.by, cdo.bru.by, exponenta.ru, википедия, <http://www.intuit.ru>

**7.4 Перечень наглядных и других пособий, методических рекомендаций по проведению учебных занятий, а также методических материалов к используемым в образовательном процессе техническим средствам**

### 7.4.1 Методические рекомендации

1 Бутома, А.М. Вариационное исчисление и оптимальное управление. Методические рекомендации к практическим занятиям для студентов направления подготовки 01.03.04 «Прикладная математика» дневной формы обучения. / А. М. Бутома. Л.И. Сотская // Могилев: Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования «Белорусско-Российский университет». – 2021. – 48 с.

### 7.4.2 Информационные технологии

**7.4.3 Перечень программного обеспечения, используемого в образовательном процессе**

Свободно распространяемое ПО Open Office

## 8 МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Материально-техническое обеспечение дисциплины содержится в паспорте лаборатории «ПУЛ 4», рег. номер 535-405/1-20.

## ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ И ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

(наименование дисциплины)

### АННОТАЦИЯ К РАБОЧЕЙ ПРОГРАММЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Направление подготовки 01.03.04 Прикладная математика

Направленность (профиль) Разработка программного обеспечения

|   | Форма обучения |
|---|----------------|
|   | Очная          |
| Курс  | 2              |
| Семестр                                     | 4              |
| Лекции, часы                                | 34             |
| Практические занятия, часы                  | 34             |
| Экзамен, семестр                            | 4              |
| Контактная работа по учебным занятиям, часы | 68             |
| Самостоятельная работа, часы                | 76             |
| Всего часов / зачётных единиц               | 144/4          |

#### 1.1 Цель учебной дисциплины

развитие у студентов алгоритмического и аналитического мышления; формирование навыков, необходимых для изучения, анализа, прогнозирования и управления процессами, происходящими в технике, экономике.

#### 1.2 Планируемые результаты изучения дисциплины

В результате освоения учебной дисциплины студент должен

##### знать:

- классические понятия вариационного исчисления: функционал и его вариации, определение вариации с помощью производной, уравнение Эйлера;
- основные понятия и методы теории оптимального управления сосредоточенными и распределёнными системами; методы синтеза оптимального управления;
- классическую и современную литературу по вариационному исчислению и оптимальному управлению.

##### уметь:

- анализировать ситуацию, выбирать математические модели, проверять адекватность моделей исследуемым процессам;
- формулировать постановки задач моделирования для функционалов различного вида;
- применять вариационный подход к моделированию процессов, происходящих в технике и экономике;
- разрабатывать алгоритмы и применять методы оптимального управления к решению практических задач в технике и экономике.

##### владеть:

- навыками анализа ситуации, моделирования процессов и формулировки вариационных задач, в том числе задач оптимального управления;
- навыками применения методов вариационного исчисления и оптимального управления к решению задач.

### 3. Требования к освоению учебной дисциплины

Освоение данной учебной дисциплины должно обеспечивать формирование следующих компетенций:

| Коды формируемых компетенций | Наименования формируемых компетенций  |
|------------------------------|---|
| ОПК-2                        | Способен обоснованно выбирать, дорабатывать и применять для решения исследовательских и проектных задач математические методы и модели, осуществлять проверку адекватности моделей, анализировать результаты, оценивать надёжность и качество функционирования систем |
| ПК-1                         | Способен проводить научно-исследовательские разработки при исследовании самостоятельных тем   |

### 4. Образовательные технологии

Традиционные