МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Высшая математика»

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Методические рекомендации к лабораторным работам для студентов направления подготовки 15.03.06 «Мехатроника и робототехника» очной формы обучения

Могилев 2023

УДК 519.2
ББК 22.17
Т 33

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Высшая математика» «23» февраля 2023 г., протокол № 6

Составители: математик Е. Г. Галуза;
доц. Д. В. Роголев

Рецензент канд. физ.-мат. наук, доц. В. А. Ливинская

Приведены основные теоретические сведения, показаны образцы решения заданий, даны задания для самостоятельного выполнения.

Учебное издание

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Ответственный за выпуск В. Г. Замураев

Корректор И. В. Голубцова

Компьютерная верстка Е. В. Ковалевская

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 56 экз. Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение:
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 07.03.2019.
Пр-т Мира, 43, 212022, г. Могилев.

Содержание

Требования к составлению отчетов

Отчеты к лабораторным работам оформляются с использованием текстовых или табличных редакторов (LibreOffice и т. п.) и должны включать следующее.

1 Название и цель работы.

2 Расчётные формулы и/или функции.

3 Числовые ответы к задачам либо таблицы с результатами расчетов.

4 Анализ полученных результатов и выводы.

1 Лабораторная работа № 1. Элементы комбинаторики

Цель работы: изучить основные формулы комбинаторики.

Перестановками называют комбинации, состоящие из одних и тех же n различных элементов и отличающиеся только порядком их расположения.

Число всех возможных перестановок вычисляется по формуле $P_n = n!$

Размещениями называют комбинации, составленные из n различных элементов по k элементов, которые отличаются либо составом элементов, либо их порядком.

Число всех возможных размещений вычисляется по формуле

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)(n-2)...(n-(m-1)).$$

Сочетаниями называют комбинации, составленные из n различных элементов по k элементов, которые отличаются хотя бы одним элементом.

Число всех возможных сочетаний вычисляется по формуле $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

Ранее предполагалось, что все элементы различны. Если же некоторые элементы повторяются, то такие комбинации называются ***комбинациями с повторениями*** и их число находят уже по другим формулам.

Если при выборе k элементов из n элементы возвращаются обратно и упорядочиваются, то говорят, что это **размещения с повторениями**: $\overline{A}_n^k = n^k$.

Если при выборе k элементов из n элементы возвращаются обратно без последующего упорядочивания, то говорят, что это **сочетания с повторениями**: $\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$.

Если в множестве из n элементов есть k различных элементов, при этом первый элемент повторяется n_1 раз, второй элемент – n_2 раз,… k-й – n_k раз, причем $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$, то перестановки элементов данного множества называют перестановками с повторениями: $P_n(n_1, n_2, ..., n_k) = \dfrac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot ... \cdot n_k!}$.

Правило суммы. Если некоторый объект A может быть выбран из совокупности объектов a способами, а другой объект B может быть выбран b способами, то выбрать либо A, либо B можно $a+b$ способами.

Правило произведения. Если объект A можно выбрать из совокупности объектов a способами и после каждого такого выбора объект B можно выбрать b способами, то пара объектов $(A,\ B)$ в указанном порядке может быть выбрана ab способами.

Примеры решения задач

Пример 1 **–** Сколько четырёхзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, если каждая цифра входит в запись числа только один раз?

Решение

$$P_4 = 4! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 = 24.$$

Пример 2 – В высшей лиге по футболу 16 команд. Сколькими способами могут быть распределены медали чемпионата?

Решение

$$A_{16}^3 = \frac{16!}{(16-3)!} = \frac{16!}{13!} = 16\cdot 15\cdot 14 = 3360.$$

Пример 3 **–** Сколькими способами можно выбрать три детали из ящика, содержащего 10 деталей?

Решение

$$C_{10}^3 = \frac{10!}{3!(10-3)!} = \frac{10!}{3!\cdot 7!} = \frac{8\cdot 9\cdot 10}{2\cdot 3} = 120.$$

Контрольные вопросы

1 В чём отличие размещений и сочетаний?
2 Укажите критерии выбора правила суммы или правила произведения.

Задачи для самостоятельного решения

1 В розыгрыше первенства страны по футболу принимают участие 15 команд. Сколькими способами могут быть распределены золотая, серебряная и бронзовая медали?

2 В турнире принимали участие 12 шахматистов и каждые два шахматиста встретились один раз. Сколько партий было сыграно в турнире?

3 В партии из 12 деталей девять стандартных. Сколькими способами можно выбрать шесть деталей, из которых четыре были бы стандартными?

4 25 одноклассников решили обменяться фотографиями. Сколько всего фотографий было заказано?

5 На базе 20 наименований товаров. Сколькими способами их можно распределить по трем магазинам, если известно, что в первый магазин должно быть доставлено восемь, во второй – семь и в третий – пять наименований товаров?

6 Из спортивного клуба, насчитывающего 30 человек, надо составить команду из четырех человек для участия в беге на 1000 м. Сколькими способами это можно сделать? Сколькими способами можно составить команду из четырех человек для участия в эстафете 100 + 200 + 400 + 800?

7 Сколько различных диагоналей можно провести в восьмиугольнике; двенадцатиугольнике; *n*-угольнике?

2 Лабораторная работа № 2. Вероятность события. Классическая вероятность

Цель работы: изучить формулу классической вероятности.

Вероятностью события A называется математическая оценка возможности появления этого события в результате опыта.

Исход опыта является ***благоприятствующим*** событию A, если появление в результате опыта этого исхода влечёт за собой появление события A.

Вероятность события A равна отношению числа благоприятствующих событию A исходов опыта к общему числу попарно несовместных исходов опыта, образующих полную группу событий: $P(A)=\dfrac{m}{n}$.

Примеры решения задач

Пример 1 – Производится розыгрыш лотереи «5 из 35». Найти вероятность того, что игрок правильно угадает все 5 чисел.

Решение

Обозначим через A событие, состоящее в том, что игрок правильно угадал все 5 чисел. Искомая вероятность будет равна отношению числа исходов, благоприятствующих событию, к числу всех элементарных исходов:

$$P\left(A\right)=\frac{m}{n};\ m=1;\ n=C_{35}^{5}=\frac{35!}{5!\left(35-5\right)!}=324\,632;\ P\left(A\right)=\frac{1}{324\,632}\approx 0{,}000003.$$

Пример 2 – В партии из 10 деталей 7 стандартных. Найти вероятность того, что среди шести взятых наудачу деталей 4 стандартные.

Решение

Общее число возможных элементарных исходов испытания равно числу способов, которыми можно извлечь 6 деталей из 10, т. е. C_{10}^{6}.

Определим число исходов, благоприятствующих интересующему событию A (среди шести взятых деталей 4 стандартные). Четыре стандартные детали можно взять из семи стандартных деталей C_7^4 способами; при этом остальные $6-4=2$ детали должны быть нестандартными; взять же 2 нестандартные детали из $10-7=3$ нестандартных деталей можно C_3^2 способами. Следовательно, число благоприятствующих исходов равно $C_7^4 \cdot C_3^2$.

Искомая вероятность равна отношению числа исходов, благоприятствующих событию, к числу всех элементарных исходов:

$$P(A)=\frac{C_7^4 \cdot C_3^2}{C_{10}^6}=\frac{1}{2}.$$

Контрольные вопросы

1 Какие значения может принимать вероятность?

Задачи для самостоятельного решения

1 Четырехтомное собрание сочинений расположено на полке в случайном порядке. Чему равна вероятность того, что тома стоят в должном порядке справа налево или слева направо?

2 Студент пришел на экзамен, зная лишь 20 из 25 вопросов программы. Экзаменатор задал студенту три вопроса. Найти вероятность того, что студент знает все три вопроса.

3 Имеется шесть отрезков, длины которых равны соответственно 2, 4, 6, 8, 10, 12 единицам. Определить вероятность того, что с помощью взятых наугад трёх отрезков из данных шести можно построить треугольник.

4 В конверте среди 100 фотокарточек находится одна разыскиваемая. Из конверта наудачу извлечены 10 карточек. Найти вероятность того, что среди них окажется нужная.

5 Из десяти изделий два бракованных. Определить вероятность того, что среди пяти взятых для проверки изделий окажется хотя бы одно бракованное.

3 Лабораторная работа № 3. Вероятность события. Геометрическая вероятность

Цель работы: изучить понятие геометрической вероятности.

Пусть точка X выбирается случайным образом в области Ω. Тогда вероятность попадания точки в область A определяется по формуле

$$P(A) = \frac{\mu_A}{\mu_\Omega},$$

где μ_A – мера области A;

μ_Ω – мера области Ω.

В случае пространства R^1 мерой является длина соответствующих отрезков, для пространства R^2 – площадь областей, для пространства R^3 – объем соответствующих тел.

Примеры решения задач

Пример 1 – Два студента условились встретиться в определённом месте между 12 и 13 часами дня. Пришедший первым ждёт второго в течение 1/4 часа, после чего уходит. Найти вероятность того, что встреча состоится, если каждый студент наудачу выбирает момент своего прихода в течение указанного часа.

Решение

Пусть x – момент прихода первого студента, y – момент прихода второго студента. Тогда рассмотрим области на плоскости (рисунок 1):

$$\Omega = \left\{(x,y) \in R^2 : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\right\};\quad A = \left\{(x,y) \in R^2 : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, |x-y| \le \frac{1}{4}\right\}.$$

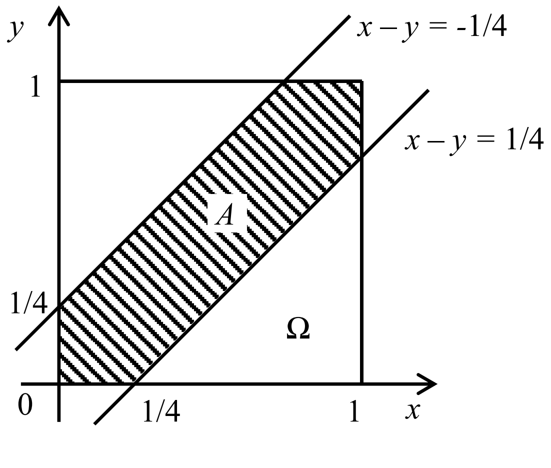

Рисунок 1

$$S_\Omega = 1 \text{ ед.}^2;\quad S_A = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{7}{16} \text{ ед.}^2;\quad P(A) = \frac{S_A}{S_\Omega} = \frac{7}{16}.$$

Контрольные вопросы

1 В каких случаях следует использовать геометрическую вероятность?
2 От чего зависит величина геометрической вероятности?

Задачи для самостоятельного решения

1 Найти вероятность того, что сумма двух наугад взятых положительных правильных дробей не больше единицы, а их произведение не больше 3/16.

2 На отрезке *AB*, длина которого 1, наугад поставлены две точки, в результате чего этот отрезок оказывается разделённым на три части. Найти вероятность того, что из трёх получившихся частей можно составить треугольник.

3 Задача Бюффона.

На плоскость, разграфленную параллельными прямыми линиями, отстоящими друг от друга на расстояние $2a$, наудачу бросается игла длиной $2l$. Какова вероятность того, что игла пересечёт одну из параллельных прямых, если $l \le a$?

4 Два парохода должны подойти к одному и тому же причалу. Время прихода обоих пароходов независимо и равновозможно в течение суток. Определить вероятность того, что одному из пароходов придется ожидать освобождения причала, если время стоянки первого – 1 ч, второго – 2 ч.

4 Лабораторная работа № 4. Условная вероятность

Цель работы: изучить теоремы сложения и умножения вероятностей, формулы полной вероятности и Байеса.

Теорема 1 (сложения вероятностей). *Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий*:

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

Теорема 2 (сложения вероятностей совместных событий). *Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления*:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

Событие A называется **независимым** от события B, вероятность события A не зависит от того, произошло событие B или нет. Событие A называется **зависимым** от события B, если вероятность события A меняется в зависимости от того, произошло событие B или нет.

Вероятность события B, вычисленная при условии, что имело место событие A, называется **условной вероятностью** события B:

$$P_A(B)=P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}.$$

Теорема 3 (умножения вероятностей). *Вероятность произведения двух событий (совместного появления этих событий) равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную при условии, что первое событие уже наступило*:

$$P(AB) = P(A)P(B \mid A).$$

Теорема 4 (полной вероятности). *Полная вероятность события А, которое может произойти вместе с одним из событий* $H_1, H_2, ..., H_n$, *равна сумме парных произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующие им условные вероятности наступления события А*:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A \mid H_i).$$

Теорема 5 (Байеса). *Вероятность гипотезы после испытания равна произведению вероятности гипотезы до испытания на соответствующую ей условную вероятность события, которое произошло при испытании, деленному на полную вероятность этого события*:

$$P(H_i \mid A) = \frac{P(H_i)P(A \mid H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A \mid H_i)}.$$

Примеры решения задач

Пример 1 – Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,7, а для второго – 0,8. Найти вероятность того, что при одном залпе в мишень попадает только один из стрелков.

Решение

Обозначим попадание в цель первым стрелком – событие A, вторым – событие B, промах первого стрелка – событие $\overline{A}$, промах второго – событие $\overline{B}$.

$$P(A) = 0,7; \quad P(\overline{A}) = 0,3; \quad P(B) = 0,8; \quad P(\overline{B}) = 0,2.$$

Вероятность того, что первый стрелок попадет в мишень, а второй – нет, находим по теореме 3: $P(A)P(\overline{B}) = 0,7 \cdot 0,2 = 0,14$.

Вероятность того, что второй стрелок попадёт в цель, а первый – нет, $P(\overline{A})P(B) = 0,3 \cdot 0,8 = 0,24$.

Тогда вероятность попадания в цель только одним стрелком вычисляется по теореме 1: $P = 0,14 + 0,24 = 0,38$.

Пример 2 – Вероятности того, что нужная деталь находится в первом, втором, третьем или четвертом ящике, соответственно $p_1 = 0,6$, $p_2 = 0,7$, $p_3 = 0,8$, $p_4 = 0,9$. Найти вероятность того, что эта деталь находится только в одном ящике.

Решение

$$P = p_1 q_2 q_3 q_4 + q_1 p_2 q_3 q_4 + q_1 q_2 p_3 q_4 + q_1 q_2 q_3 p_4,$$

$$P = 0,6 \cdot 0,3 \cdot 0,2 \cdot 0,1 + 0,4 \cdot 0,7 \cdot 0,2 \cdot 0,1 + 0,4 \cdot 0,3 \cdot 0,8 \cdot 0,1 + 0,4 \cdot 0,3 \cdot 0,2 \cdot 0,9 =$$
$$= 0,0036 + 0,0056 + 0,0096 + 0,0216 = 0,0404.$$

Пример 3 – Известно, что 5 % всех мужчин и 0,25 % всех женщин – дальтоники. На обследование прибыло одинаковое число мужчин и женщин. Наудачу выбранное лицо оказалось дальтоником. Какова вероятность, что это мужчина?

Решение

Рассмотрим событие A – наудачу выбранное лицо оказалось дальтоником.

По условию задачи возможны следующие две гипотезы:

1) H_1 – выбранное для обследования лицо оказалось мужчиной;

2) H_2 – выбранное для обследования лицо оказалось женщиной.

Так как на обследование прибыло одинаковое число мужчин и женщин, то вероятности наступления гипотез будут равны между собой, т. е. $P(H_1) = P(H_2) = 0,5$.

Вероятности быть дальтоником для мужчины и женщины известны из условия задачи. Они соответственно равны $P(A|H_1) = 0,05$; $P(A|H_2) = 0,0025$.

Для отыскания вероятности события A воспользуемся теоремой 4. Имеем

$$P(A) = 0,5 \cdot 0,05 + 0,5 \cdot 0,0025 = 0,025 + 0,00125 = 0,02625.$$

По условию задачи необходимо найти вероятность события, состоящего в том, что дальтоником окажется мужчина, т. е. $P(H_1 \mid A)$. Эту вероятность вычислим по формуле Байеса:

$$P(H_1 \mid A) = \frac{0,5 \cdot 0,05}{0,02625} \approx 0,95.$$

Контрольные вопросы

1 Какие события называются совместными?

2 Что называется гипотезой в теоремах полной вероятности и Байеса?

Задачи для самостоятельного решения

1 Баскетболист выполняет два штрафных броска. Вероятность попадания при каждом броске равна 0,8. Найти вероятность:

а) двух попаданий; б) одного попадания; в) хотя бы одного попадания.

2 Имеется коробка с девятью новыми теннисными мячами. Для игры берут три мяча; после игры их кладут обратно. При выборе мячей игранные от неигранных не отличают. Какова вероятность того, что после трех игр в коробке не останется неигранных мячей?

3 Вероятность поражения цели первым стрелком при одном выстреле равна 0,8, а вторым стрелком – 0,6. Найти вероятность того, что цель будет поражена:

а) только одним стрелком; б) хотя бы одним стрелком.

4 В ящике 10 деталей, среди которых две нестандартные. Найти вероятность того, что в наудачу отобранных шести деталях окажется не более одной нестандартной.

5 Отдел технического контроля проверяет изделия на стандартность. Вероятность того, что изделие нестандартно, равна 0,1. Найти вероятность того, что:

а) из трех проверенных изделий только два окажутся нестандартными;

б) нестандартным окажется только четвёртое проверенное изделие.

6 В первой коробке содержится 20 радиоламп, из них 18 стандартных; во второй коробке – 10 радиоламп, из них девять стандартных. Из второй коробки наудачу взята лампа и переложена в первую. Найти вероятность того, что лампа, наудачу извлечённая из первой коробки, будет стандартной.

7 Три стрелка производят по одному выстрелу по одной и той же мишени. Вероятность попадания для первого стрелка равна 0,6, для второго – 0,5, для третьего – 0,4. В результате произведённых выстрелов в мишени оказались две пробоины. Найти вероятность того, что в мишень попали второй и третий стрелки.

5 Лабораторная работа № 5. Последовательность независимых испытаний

Цель работы: изучить основные формулы повторения испытаний.

Пусть в результате n независимых испытаний, проведённых в одинаковых условиях, событие A наступает с вероятностью $P(A) = p$, а противоположное ему событие $\overline{A}$ с вероятностью $P(\overline{A}) = 1 - p$.

Вероятность $P_n(k)$ того, что в результате n испытаний событие A наступило ровно k раз, определяется по **формуле Бернулли**: $P_n(k) = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$.

Формула Пуассона. Если число испытаний n велико, а вероятность p появления события A в каждом испытании очень мала, то используют приближенную формулу $P_n(k) \approx \dfrac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$, где k – число появлений события A в n независимых испытаниях, $\lambda = np$.

Локальная теорема Муавра – Лапласа. Вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события A равна p ($0 < p < 1$), событие A наступит k раз, равна (тем точнее, чем больше n)

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x).$$

Здесь $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$; $x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$.

Существует таблица значений функции $\varphi(x)$ для $0 \le x < 4$; $\varphi(x \ge 4) \approx 0$; функция $\varphi(x)$ – чётная ($\varphi(-x) = \varphi(x)$).

Интегральная теорема Лапласа. Вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события A равна p ($0 < p < 1$), событие A наступит не менее k_1 и не более k_2 раз, приближённо равна

$$P_n(k_1, k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

где $\Phi(x)$ – функция Лапласа, $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx$, её значения находят из таблиц;

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}};$$

$$x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

Примеры решения задач

Пример 1 – По цели производится 5 выстрелов. Вероятность попадания для каждого выстрела равна 0,4. Найти вероятность того, что в цель попали не менее трех раз.

Решение

Вероятность не менее трех попаданий складывается из вероятности пяти попаданий, четырех попаданий и трех попаданий. Так как выстрелы независимы, то можно применить формулу Бернулли:

$$P_5(5) = p^5 = 0,4^5 = 0,01024; \; P_5(4) = \frac{5!}{4! \cdot 1!} p^4 (1-p) = 0,0768;$$

$$P_5(3) = \frac{5!}{3! \cdot 2!} p^3 (1-p)^2 = 0,2304.$$

Окончательно получаем вероятность не менее трех попаданий из пяти выстрелов: $P = 0,01204 + 0,0768 + 0,2304 = 0,31744$.

Пример 2 – При въезде в новый дом в осветительную сеть было включено 400 новых электроламп. Каждая электролампа в течение года перегорит с вероятностью 0,1. Найти вероятность того, что в течение года не менее 50 первоначально включенных ламп придется заменить новыми.

Решение

Воспользуемся интегральной формулой Лапласа.

Событие A – электролампа в течение года перегорит.

$P(A) = p = 0{,}1$; $n = 400$; $k_1 = 50$; $k_2 = n = 400$; $q = 1 - p = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$.

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{50 - 400\cdot 0{,}1}{\sqrt{400\cdot 0{,}1\cdot 0{,}9}} = \frac{10}{20\cdot 0{,}3} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3} \approx 1{,}67;$$

$$x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{400 - 400\cdot 0{,}1}{\sqrt{400\cdot 0{,}1\cdot 0{,}9}} = \frac{360}{6} = 60;$$

$P_{400}(50;400) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1) \approx \Phi(60) - \Phi(1{,}67) \approx 0{,}5 - 0{,}4525 = 0{,}0475$.

Контрольные вопросы

1 Опишите понятие схемы Бернулли.

2 В каких случаях применяется каждая из приближённых формул?

Задачи для самостоятельной работы

1 Магазин получил 1000 бутылок минеральной воды. Вероятность того, что при перевозке бутылка окажется разбитой, равна 0,03. Найти вероятность того, что магазин получит разбитых бутылок:

а) ровно две; б) менее двух; в) более двух; г) хотя бы одну.

2 В мастерской имеется 10 моторов. При существующем режиме работы вероятность того, что мотор в данный момент работает с полной нагрузкой, равна 0,8. Найти вероятность того, что в данный момент не менее восьми моторов работают с полной нагрузкой.

3 Всхожесть семян пшеницы составляет 80 %. Найти вероятность того, что из 100 посеянных семян число взошедших окажется:

а) равным 80; б) заключённым между 80 и 100.

4 Коммутатор учреждения обслуживает 600 абонентов. Вероятность того, что в течение одной минуты абонент позвонит на коммутатор, равна 0,005. Найти вероятность того, что в течение одной минуты позвонят:

а) три абонента; б) хотя бы один абонент; в) никто не позвонит.

5 Вероятность выигрыша по лотерейному билету равна 0,2. Куплено 250 билетов. Найти вероятность того, что выигрышными окажутся:

а) ровно 60 билетов; б) не более 60 билетов.

6 Лабораторная работа № 7. Скалярные случайные величины. Дискретные величины

Цель работы: ознакомиться с понятием дискретных случайных величин.

Дискретной случайной величиной называется такая величина, которая в результате опыта может принимать определённые значения с определённой вероятностью, образующие счётное множество.

Соотношение между возможными значениями случайной величины и их вероятностями называется **законом распределения дискретной** случайной величины. Закон распределения может быть задан аналитически, в виде таблицы или графически.

Таблица соответствия значений случайной величины и их вероятностей называется **рядом распределения**. Графическое представление этой таблицы называется **многоугольником распределения.**

Функцией распределения называют функцию $F(x)$, определяющую вероятность того, что случайная величина *X* в результате испытания примет значение, меньшее *x*: $F(x) = P(X < x)$.

Математическим ожиданием дискретной случайной величины называется сумма произведений всех возможных значений случайной величины на их вероятности: $m_x = M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$.

Дисперсией (рассеиванием) дискретной случайной величины называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от её математического ожидания:

$$D(X) = M\left[X - M(X)\right]^2 \text{ или } D(X) = M(X^2) - \left[M(X)\right]^2.$$

Средним квадратическим отклонением случайной величины X называется квадратный корень из дисперсии: $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.

Примеры решения задач

Пример 1 – По цели производится 5 выстрелов. Вероятность попадания для каждого выстрела равна 0,4. Найти вероятности числа попаданий и построить многоугольник распределения.

Решение

Вероятности пяти попаданий из пяти возможных, четырех из пяти и трех из пяти были найдены ранее по формуле Бернулли (см. пример 1 лабораторной работы № 5) и равны соответственно $P_5(5)=0{,}01024,\ P_5(4)=0{,}0768,\ P_5(3)=0{,}2304$. Аналогично находим: $P_5(2)=0{,}345;\ P_5(1)=0{,}2592;\ P_5(0)=0{,}0778$.

Представим графически зависимость числа попаданий от их вероятностей (рисунок 2).

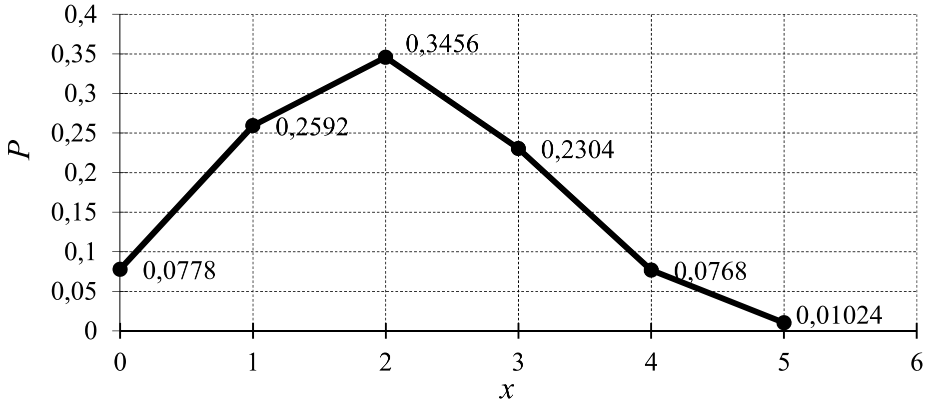

Рисунок 2

Пример 2 – Испытывается устройство, состоящее из четырех независимо работающих приборов. Вероятности отказа каждого из приборов равны соответственно $p_1=0{,}3$, $p_2=0{,}4$, $p_3=0{,}5$, $p_4=0{,}6$. Найти математическое ожидание и дисперсию числа отказавших приборов.

Принимая за случайную величину число отказавших приборов, видим, что эта случайная величина может принимать значения 0, 1, 2, 3 или 4.

$$p(0)=q_1q_2q_3q_4=0{,}7\cdot 0{,}4\cdot 0{,}5\cdot 0{,}4=0{,}084.$$

$$p(1)=p_1q_2q_3q_4+q_1p_2q_3q_4+q_1q_2p_3q_4+q_1q_2q_3p_4=0{,}302.$$

$$p(2)=p_1p_2q_3q_4+p_1q_2p_3q_4+p_1q_2q_3p_4+q_1p_2p_3q_4+q_1p_2q_3p_4+q_1q_2p_3p_4=0{,}38.$$

$$p(3)=p_1p_2p_3q_4+p_1p_2q_3p_4+p_1q_2p_3p_4+q_1p_2p_3p_4=0{,}198.$$

$$p(4)=p_1p_2p_3p_4=0{,}036.$$

Получаем следующий закон распределения (таблица 1).

Таблица 1

x	0	1	2	3	4
p	0,084	0,302	0,38	0,198	0,036

$$M(X)=0{,}302+2\cdot 0{,}38+3\cdot 0{,}198+4\cdot 0{,}036=1{,}8.$$

$$M(X^2)=0{,}302+4\cdot 0{,}38+9\cdot 0{,}198+16\cdot 0{,}036=4{,}18.$$

$$D(X)=M(X^2)-\left[M(X)\right]^2=4{,}18-3{,}24=0{,}94.$$

Контрольные вопросы

1 Какая случайная величина называется дискретной?
2 Какой смысл понятий математического ожидания и дисперсии?

Задачи для самостоятельного решения

1 Охотник, имеющий пять патронов, стреляет в цель до первого попадания (или пока не израсходует все патроны). Найти математическое ожидание и дисперсию СВ X – число израсходованных патронов. Построить график функции распределения этой СВ, если вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,4.

2 Два стрелка стреляют по одной мишени, делая независимо друг от друга по два выстрела. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка – 0,5, для второго – 0,6. Построить ряд распределения случайной величины X – общего числа попадания и найти её числовые характеристики $M(X)$ и $D(X)$.

3 В партии 10 % нестандартных деталей. Наудачу отобраны четыре детали. Написать закон распределения ДСВ X – числа нестандартных деталей среди четырех отобранных (табличный, графический, аналитический).

4 Из урны, содержащей три белых и пять черных шаров, наугад извлекают три шара. Пусть СВ X – число вынутых черных шаров. Построить ряд распределения СВ X и найти её математическое ожидание.

5 Имеется шесть ключей, из которых только один подходит к замку. Составить ряд распределения СВ X – числа попыток при открывании замка, если ключ, не подошедший к замку, в последующих опробованиях не участвует. Чему равны математическое ожидание и дисперсия этой случайной величины?

6 Найти закон распределения ДСВ X, которая может принимать только два значения: x_1 – с вероятностью $p_1 = 0,4$ и x_2 (причем $x_2 < x_1$), если известны математическое ожидание $M(X) = 3,2$ и дисперсия $D(X) = 0,96$.

7 Лабораторная работа № 8. Скалярные случайные величины. Непрерывные величины

Цель работы: ознакомиться с понятием непрерывных случайных величин.

Непрерывной случайной величиной называется величина, которая может принимать любые значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка.

Плотностью распределения вероятностей непрерывной случайной величины X называется функция $f(x)$ – первая производная от функции распределения $F(x)$: $f(x) = F'(x)$.

Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу (a, b), равна определенному интегралу от плотности распределения, взятому в пределах от a до b: $P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$.

Функция распределения может быть найдена по формуле $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx.$

Несобственный интеграл от плотности распределения в пределах от $-\infty$ до $+\infty$ равен единице: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$

Математическим ожиданием непрерывной случайной величины X называется интеграл $M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$.

Дисперсией непрерывной случайной величины называется математическое ожидание квадрата её отклонения

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(X)]^2 f(x)dx \text{ или } D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - [M(X)]^2 .$$

Примеры решения задач

Пример 1 **–** Непрерывная случайная величина задана плотностью распределения

$$f(x) = \begin{cases} A\cos 2x \quad \text{при} \quad -\dfrac{\pi}{4} \le x \le \dfrac{\pi}{4}; \\ 0 \qquad\qquad \text{при} \quad |x| > \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Требуется определить коэффициент A, найти функцию распределения, определить вероятность того, что случайная величина x попадет в интервал $\left(\dfrac{\pi}{6}; 2\right)$.

Решение

Найдём коэффициент A:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{-\pi/4} 0dx + \int_{-\pi/4}^{\pi/4} A\cos 2xdx + \int_{\pi/4}^{\infty} 0dx = \left.\frac{A\sin 2x}{2}\right|_{-\pi/4}^{\pi/4} = A = 1.$$

Найдем функцию распределения:

1) на участке $x < -\dfrac{\pi}{4}$: $\quad F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{x} 0dx = 0$;

2) на участке $-\dfrac{\pi}{4} \le x \le \dfrac{\pi}{4}$: $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{-\pi/4} 0dx + \int\limits_{-\pi/4}^{x} \cos 2x dx = \dfrac{\sin 2x}{2}\Bigg|_{-\pi/4}^{x} = \dfrac{\sin 2x}{2} + \dfrac{1}{2}$;

3) на участке $x > \dfrac{\pi}{4}$: $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{-\pi/4} 0dx + \int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos 2x dx + \int\limits_{\pi/4}^{x} 0dx = \dfrac{\sin 2x}{2}\Bigg|_{-\pi/4}^{\pi/4} = 1.$

Итого:

$$f(x) = \begin{cases} \cos 2x & \text{при} \quad -\dfrac{\pi}{4} \le x \le \dfrac{\pi}{4}; \\ 0 & \text{при} \quad |x| > \dfrac{\pi}{4}; \end{cases} \qquad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < -\dfrac{\pi}{4}; \\ \dfrac{\sin 2x + 1}{2} & \text{при} \quad -\dfrac{\pi}{4} \le x \le \dfrac{\pi}{4}; \\ 1 & \text{при} \quad x > \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Найдём вероятность попадания случайной величины в интервал $\left(\dfrac{\pi}{6}; 2\right)$:

$$P\left(\frac{\pi}{6} < x < 2\right) = \int\limits_{\pi/6}^{2} f(x)dx = \int\limits_{\pi/6}^{\pi/4} \cos 2x dx + \int\limits_{\pi/4}^{2} 0dx = \frac{\sin 2x}{2}\Bigg|_{\pi/6}^{\pi/4} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} = 0,067 .$$

Ту же самую вероятность можно искать и другим способом:

$$P\left(\frac{\pi}{6} < x < 2\right) = F(2) - F(\pi/6) = 1 - \frac{\sin(\pi/3) + 1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} = 0,067.$$

Контрольные вопросы

1 Какая случайная величина называется непрерывной?
2 Какая характеристика существует только для непрерывных СВ?

Задачи для самостоятельного решения

1 По известной модели распределения для СВ X:
- найти значение константы C;
- найти $F(x)$ и $f(x)$;
- построить графики $F(x)$ и $f(x)$;
- вычислить $M(X)$, $D(X)$, M_o, M_e, A, E;
- найти $P(a \le X \le b)$,

если она задана следующим образом:

а) $f(x)=\begin{cases} C, & \text{если } x\in[1,7]; \\ 0, & \text{если } x\notin [1,7]; \end{cases}$ $\qquad a = 2,\ b = 5;$

б) $f(x)=\begin{cases} Cx^2, & \text{если } 0\le x\le 10; \\ 0, & \text{если } x\le 0, x>10; \end{cases}$ $\qquad a = 1,\ b = 4;$

в) $F(x)=\begin{cases} 1-\dfrac{C}{x^2}, & \text{если } x\ge 1; \\ 0, & \text{если } x<1; \end{cases}$ $\qquad a = 1,\ b = 3;$

г) $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{если } x<0; \\ Cx^2, & \text{если } 0\le x<2; \\ x-\dfrac{7}{4}, & \text{если } 2\le x<\dfrac{11}{4}; \\ 1, & \text{если } x\ge\dfrac{11}{4}; \end{cases}$ $\qquad a = 0,\ b = 3.$

8 Лабораторная работа № 9. Законы распределения некоторых случайных величин

Цель работы: изучить законы распределения случайных величин.

Биноминальное распределение ДСВ X – числа успехов в схеме Бернулли при проведении n независимых испытаний с вероятностью успеха p:

$$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}, \qquad k=0,\ 1,\ 2,...,n;$$
$$MX=np;\ DX=npq.$$

Распределение Пуассона. Если число испытаний n достаточно велико, а вероятность появления события A в каждом испытании мала ($p \le 0{,}1$), то

$$P_n(k)=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},\ \lambda=np, \qquad k=0,\ 1,\ 2,...,n;$$
$$MX=DX=\lambda.$$

Непрерывная случайная величина имеет **равномерное распределение** на отрезке $[a,\ b]$, если на этом отрезке плотность распределения случайной величины постоянна, а вне его равна нулю:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\notin[a,b]; \\ \dfrac{1}{b-a}, & x\in[a,b]. \end{cases}$$

$$\text{Тогда } F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x<a;\\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{при} \quad a\le x\le b;\\ 1 & \text{при} \quad x>b;\end{cases} \quad MX=\frac{a+b}{2};\ DX=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

Показательным (экспоненциальным) называется распределение вероятностей непрерывной случайной величины *X*, которое описывается плотностью

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x<0;\\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{при} \quad x\ge 0\end{cases} \qquad (\lambda>0).$$

$$\text{Тогда } F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x<0;\\ 1-e^{-\lambda x} & \text{при} \quad x\ge 0;\end{cases} \quad m_x=\frac{1}{\lambda};\ D(X)=\frac{1}{\lambda^2}.$$

Нормальным называется распределение вероятностей непрерывной случайной величины, которое описывается плотностью вероятности

$$f(x)=\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}.$$

Параметры m_x и σ_x являются соответственно математическим ожиданием и средним квадратическим отклонением случайной величины *X*.

$$F(x)=\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}dx.$$

Примеры решения задач

Пример 1 – Цена деления шкалы измерительного прибора равна 0,2. Показания прибора округляются до ближайшего деления. Найти вероятность того, что при отсчете будет сделана ошибка менее 0,04.

Решение

Ошибку округления можно рассматривать как случайную величину *X*, которая имеет равномерное распределение в промежутке между двумя соседними делениями, следовательно, её плотность вероятности имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases}5 & \text{при } 0<x\le 0{,}2;\\ 0 & \text{при } x<0 \text{ или } x>0{,}2.\end{cases}$$

Ошибка отсчета будет менее 0,04, если случайная величина заключена в интервале (0; 0,4) или (0,16; 0,2). Следовательно, получаем, что вероятность того, что при отсчете будет сделана ошибка меньше 0,04, $p = 0,4$.

Пример 2 – Время безотказной работы прибора распределено по показательному закону $f(t) = \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot t}$ при $t \geq 0$ (t – время). Найти вероятность того, что прибор проработает безотказно 100 ч, если в среднем данные приборы работают безотказно 50 ч.

Решение

Из условия следует, что $\frac{1}{\lambda} = M(X) = 50$. Тогда $\lambda = 0{,}02$. В результате получаем, что $P(X \geq 100) = 1 - F(100) = e^{-2} = 0{,}13534$.

Итак, вероятность безотказной работы прибора в течение 100 ч равна 0,14.

Пример 3 – Рост мужчин некоторой возрастной группы распределён по нормальному закону с математическим ожиданием a = 165 см и средним квадратичным отклонением $\sigma = 5$ см. Какую долю костюмов 3-го роста следует предусмотреть в общем объеме производства для данной возрастной группы (3-й рост – 170–176 см)?

Решение

X – рост в сантиметрах представителя данной возрастной группы. Тогда доля P мужчин ростом 170–176 см

$$P = \Phi\left(\frac{176-165}{5}\right) - \Phi\left(\frac{170-165}{5}\right) = \Phi(2{,}2) - \Phi(1) = 0{,}1448.$$

Значит, доля костюмов 3-го роста должна составлять приблизительно 14,5 % общего числа.

Пример 4 – Определить среднеквадратичную ошибку прибора, если систематических ошибок он не имеет, а случайные ошибки X распределены по нормальному закону и с вероятностью 0,95 не выходят за пределы ± 20 мк.

Решение

Из условия задачи следует, что $P(|x| \leq 20) = 0{,}95$. С другой стороны, т. к. $a = M(X) = 0$, то $P(|x| \leq 20) = P(|x-a| \leq 20) = \Phi\left(\frac{20}{\sigma}\right)$. Таким образом, $\Phi\left(\frac{20}{\sigma}\right) = 0{,}95$. Воспользовавшись таблицей функции $\Phi(x)$, находим, что

$\Phi(x) = 0{,}95$ при $x = 0{,}96$, следовательно, $\dfrac{20}{\sigma} = 1{,}96$, откуда $\sigma = \dfrac{20}{1{,}96} \approx 10{,}2$ мк.

Контрольные вопросы

1 Какие законы распределения относятся только к дискретным СВ?
2 Какие законы распределения относятся к непрерывным СВ?

Задачи для самостоятельного решения

1 Троллейбусы некоторого маршрута идут строго по расписанию. Интервал движения составляет 9 мин. Найти вероятность того, что пассажир, подошедший к остановке, будет ожидать очередного троллейбуса менее 3 мин.

2 Случайная величина X равномерно распределена на отрезке [–3; 2]. Найти функцию распределения $F(x)$ этой случайной величины.

3 Среднее время работы каждого из трёх элементов, входящих в техническое устройство, равно 750 ч. Для безотказной работы устройства необходима безотказная работа хотя бы одного из трёх этих элементов. Определить вероятность того, что устройство будет работать от 450 до 600 ч, если время T работы каждого из трёх элементов независимо и распределено по показательному закону.

4 Случайная величина X подчинена нормальному закону распределения с математическим ожиданием $M(X) = 2$ и дисперсией $D(X) = 9$. Написать выражения для плотности вероятности и функции распределения этой случайной величины.

5 Диаметр валиков, изготавливаемых станком-автоматом, есть нормальная случайная величина X с параметрами $a = 10$ мм и $\sigma = 0{,}1$ мм. Найти интервал, в котором с вероятностью 0,9973 будут заключены диаметры изготовленных валиков.

9 Лабораторная работа № 10. Векторные случайные величины. Числовые характеристики векторных случайных величин

Цель работы: ознакомиться с понятием векторных случайных величин.

Примеры решения задач

Пример 1 – Матрица распределения системы двух дискретных случайных величин (X, Y) задана таблицей 2.

Таблица 2

X	Y		
	0	2	5
1	0,1	0,1	0,2
2	0,2	0,3	0,1

Найти математическое ожидание, дисперсию и корреляционный момент системы (X, Y).

Решение

$$M(X)=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3}x_i p_{ij}=\sum_{i=1}^{2}\left(x_i\sum_{j=1}^{3}p_{ij}\right)=x_1\left(p_{11}+p_{12}+p_{13}\right)+$$
$$+x_2\left(p_{21}+p_{22}+p_{23}\right)=1\cdot\left(0{,}1+0{,}1+0{,}2\right)+2\cdot\left(0{,}2+0{,}3+0{,}1\right)=1{,}6\,.$$

$$M(Y)=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3}y_j p_{ij}=\sum_{j=1}^{3}y_j\sum_{i=1}^{2}p_{ij}=y_1\left(p_{11}+p_{21}\right)+y_2\left(p_{12}+p_{22}\right)+y_3\left(p_{13}+p_{23}\right)=$$
$$=0\cdot\left(0{,}1+0{,}2\right)+2\cdot\left(0{,}1+0{,}3\right)+5\cdot\left(0{,}2+0{,}1\right)=2{,}3\,.$$

$$D(X)=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3}x_i^2 p_{ij}-\left(M(X)\right)^2=x_1^2\left(p_{11}+p_{12}+p_{13}\right)+$$
$$+x_2^2\left(p_{21}+p_{22}+p_{23}\right)-\left(M(X)\right)^2=$$
$$=1^2\cdot\left(0{,}1+0{,}1+0{,}2\right)+2^2\cdot\left(0{,}2+0{,}3+0{,}1\right)-\left(1{,}6\right)^2=0{,}24\,.$$

$$D(Y)=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3}y_j^2 p_{ij}-\left(M(Y)\right)^2=y_j^2\left(p_{11}+p_{21}\right)+$$
$$+y_2^2\left(p_{12}+p_{22}\right)+y_3^2\left(p_{13}+p_{23}\right)-\left(M(Y)\right)^2=$$
$$=0^2\cdot\left(0{,}1+0{,}2\right)+2^2\cdot\left(0{,}1+0{,}3\right)+5^2\cdot\left(0{,}2+0{,}1\right)-\left(2{,}3\right)^2=3{,}81.$$

$$\mu_{XY}=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3}x_i y_j p_{ij}-M(X)\cdot M(Y)=x_1y_1p_{11}+x_1y_2p_{12}+x_1y_3p_{13}+$$
$$+x_2y_1p_{21}+x_2y_2p_{22}+x_2y_3p_{23}-M(X)\cdot M(Y)=$$
$$=1\cdot0\cdot0{,}1+1\cdot2\cdot0{,}1+1\cdot5\cdot0{,}2+2\cdot0\cdot0{,}2+2\cdot2\cdot0{,}3+2\cdot5\cdot0{,}1-1{,}6\cdot2{,}3=$$
$$=3{,}4-3{,}68=-0{,}28\,.$$

Контрольные вопросы

1 Какой вид имеет закон распределения двумерной дискретной СВ?
2 Что показывает корреляционный момент системы СВ?

Задачи для самостоятельного решения

1 Случайный вектор (X,Y) задан таблицей распределения 3.

Таблица 3

x_i	y_i				
	–2	–1	0	1	2
–1	0,05	0,15	0,15	0,10	0,05
0	0,05	0,10	0,10	0,05	0
2	0	0,05	0,05	0,05	0,05

Написать законы распределения случайных компонент X и Y. Найти коэффициент корреляции между X и Y.

2 Передаются два сообщения, каждое из которых может быть искажено независимо друг от друга с вероятностями $p_1 = 0{,}6$ и $p_2 = 0{,}3$ соответственно. Найти закон распределения двумерной случайной величины (X,Y), если:

$$X = \begin{cases} 1, \text{ если 1-е сообщение искажено;} \\ 0, \text{ если 1-е сообщение не искажено;} \end{cases}$$

$$Y = \begin{cases} 1, \text{ если 2-е сообщение искажено;} \\ 0, \text{ если 2-е сообщение не искажено.} \end{cases}$$

3 Число X выбирается случайным образом из множества целых чисел $\{1;2;3\}$. Затем из того же множества наудачу выбирается число Y, большее или равное X. Построить таблицу распределения двумерной случайной величины (X, Y), найти коэффициент корреляции.

4 Закон распределения дискретной двумерной случайной величины (X, Y) задан таблицей 4.

Таблица 4

X	Y		
	–1	0	1
1	0,15	0,3	0,35
2	0,05	0,05	0,1

Найти законы распределения составляющих X и Y. Вычислить вероятности $P(X = 2,\ Y = 0)$ и $P(X > Y)$. Установить, зависимы или нет составляющие X и Y.

5 Двумерная случайная величина (X,Y) задана таблицей 5 распределения.

Таблица 5

X	Y		
	3	4	5
0	0,02	0,12	0,06
1	0,03	0,18	0,09
2	0,05	0,30	0,15

Найти законы распределения составляющих X и Y, а также условный закон распределения величины Y при $X = 0$.

10 Лабораторные работы № 12–13. Выборка и её характеристики. Статистические оценки параметров распределения. Точечное и интервальное оценивание

Цель работы: изучить методы обработки статистического материала.

Постановка задачи. Дан статистический материал: случайная величина X – результат n измерений некоторой величины. Требуется:

1) определить размах варьирования R;
2) составить статистический ряд распределения частот СВ X;
3) составить интервальные статистические ряды частот и относительных частот;
4) построить полигон и гистограмму относительных частот;
5) найти эмпирическую функцию распределения и построить её график;
6) вычислить выборочные значения числовых характеристик СВ X: математического ожидания $M(X)$, дисперсии $D(X)$, среднего квадратического отклонения $\sigma(X)$;
7) по виду полигона и гистограммы относительных частот, построенных в занятии 10, сделать выбор закона распределения СВ X;
8) найти точечные оценки параметров предполагаемого распределения, записать функцию распределения и плотность вероятности СВ X.

Пример выполнения

Случайная величина X – диаметр головки заклёпки. Получены результаты измерения $n = 90$ головок (в миллиметрах).

13,39	13,42	13,38	13,48	13,51	13,33	13,44	13,49	13,46
13,40	13,50	13,43	13,37	13,42	13,45	13,50	13,52	13,51
13,42	13,51	13,39	13,40	13,32	13,38	13,41	13,46	13,39
13,45	13,43	13,37	13,49	13,57	13,38	13,41	13,35	13,47
13,38	13,42	13,39	13,41	13,58	13,54	13,39	13,39	13,38
13,43	13,39	13,45	13,41	13,57	13,55	13,40	13,41	13,32
13,40	13,42	13,47	13,62	13,59	13,43	13,48	13,38	13,34
13,39	13,51	13,48	13,33	13,36	13,40	13,52	13,40	13,60
13,37	13,42	13,34	13,37	13,43	13,46	13,36	13,32	13,56
13,49	13,34	13,43	13,42	13,47	13,54	13,39	13,41	13,48

1 Найдем минимальное $x_{\min} = 13,32$ и максимальное $x_{\max} = 13,62$ значения вариант вариационного ряда и определим размах варьирования как разность между крайними значениями вариант: $R = x_{\max} - x_{\min} = 13,62 - 13,32 = 0,3$.

2 Подсчитаем частоты вариант и составим статистический ряд распределения частот (таблица 6).

Таблица 6

Диаметр головки x_i, мм	Частота m_i	Диаметр головки x_i, мм	Частота m_i
13,32	1	13,48	4
13,33	2	13,49	3
13,34	3	13,50	2
13,35	1	13,51	4
13,36	3	13,52	2
13,37	5	13,53	0
13,38	5	13,54	2
13,39	11	13,55	1
13,40	6	13,56	1
13,41	6	13,57	1
13,42	7	13,58	1
13,43	5	13,59	1
13,44	1	13,60	1
13,45	3	13,61	0
13,46	4	13,62	1
13,47	2		Контроль: $\sum_i m_i = 90$

3 Разобьём отрезок $[x_{\min}; x_{\max}]$ на k частичных интервалов равной длины и подсчитаем частоты попадания наблюдаемых значений СВ X в частичные интервалы. Число интервалов выбирают произвольно $(5 \le k \le 15)$ так, чтобы их длина $h = \dfrac{R}{k}$ была конечной десятичной дробью. Выберем $k = 6$, тогда $h = \dfrac{0,3}{6} = 0,05$.

Составим интервальные статистические ряды распределения частот и относительных частот (таблица 7, столбцы 2; 4 и 2; 5).

В столбцах 6–10 дополнительно подсчитаны числа, нужные при выполнении следующих заданий.

Таблица 7

Номер интервала	Интервал $[x_i, x_{i+1})$	Подсчёт частот	Частота n_i в интервале	Относительная частота $w_i = \dfrac{n_i}{n}$
1	2	3	4	5
1	$[13,32;13,37)$	1 + 2 + 3 + 1 + 3	10	10/90
2	$[13,37;13,42)$	5 + 5 + 11 + 6 + 6	33	33/90
3	$[13,42;13,47)$	7 + 5 + 1 + 3 + 4	20	20/90
4	$[13,47;13,52)$	2 + 4 + 3 + 2 + 4	15	15/90
5	$[13,52;13,57)$	2 + 2 + 0 + 1 + 1	6	6/90
6	$[13,57;13,62)$	2 + 1 + 1 + 1 + 0 + 1	6	6/90

Окончание таблицы 7

Накопленная частота n_x	Относительная накопленная частота $\frac{n_x}{n}$	Плотность частоты $\frac{n_i}{h}$	Плотность относительной частоты $\frac{w_i}{h}$	Середина интервала $\frac{x_i + x_{i+1}}{2}$
6	7	8	9	10
10	10/90	200	20/9	13,345
43	43/90	660	22/3	13,395
63	70/90	400	40/9	13,445
78	78/90	300	10/3	13,495
84	84/90	120	4/3	13,545
90	1	120	4/3	13,595

Контроль: $\sum_{i=1}^{6} n_i = 90 = n$, $\sum_{i=1}^{6} w_i = 1$.

4 Построим полигон относительных частот (рисунок 3) по данным столбцов 5 и 10 (см. таблицу 7), соединяя точки $(y_i; w_i)$, y_i – середины интервалов.

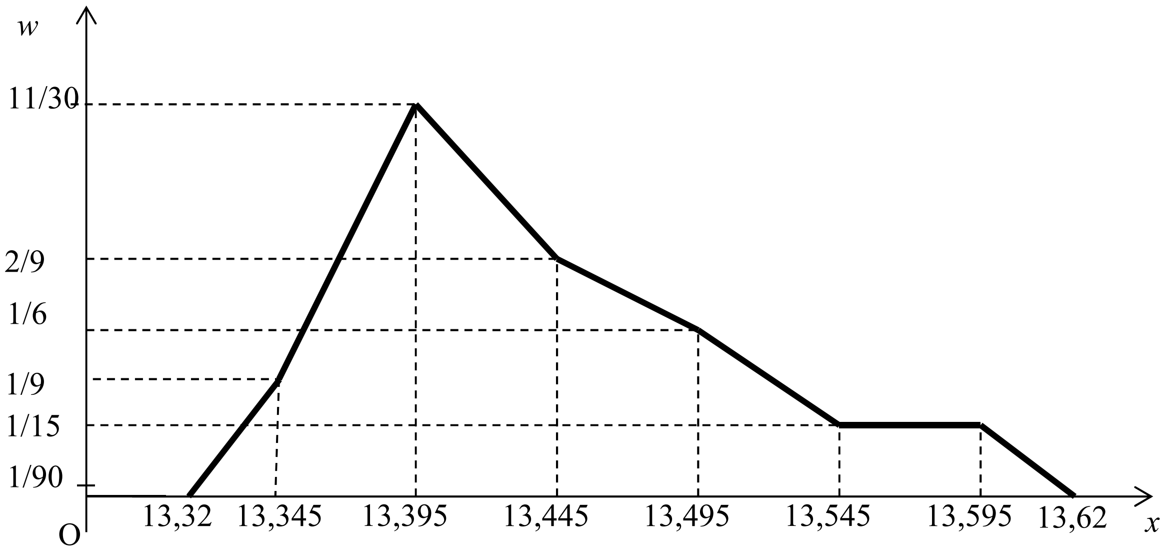

Рисунок 3

По данным столбцов 2 и 9 таблицы 7 построим гистограмму относительных частот (рисунок 4) – ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы $(x_i; x_{i+1})$, а высоты равны отношению w_i/h – плотности относительной частоты. Площадь гистограммы относительных частот $\sum_{i=1}^{6} h \cdot \frac{w_i}{h} = \sum_{i=1}^{6} w_i = 1$.

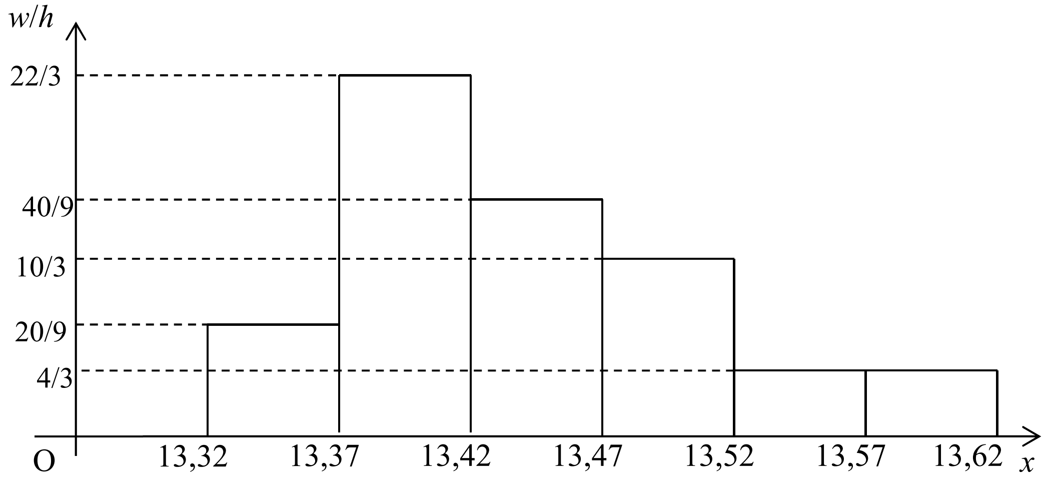

Рисунок 4

По гистограмме и полигону относительных частот можно судить о форме эмпирической кривой распределения – графике функции $f^*(x)$ (эмпирической плотности вероятности).

5 По данным таблицы 7 (столбцы 2 и 7) найдем эмпирическую функцию распределения (таблица 8) по формуле

$$F^*(x) = W(X < x) = \frac{n_x}{n}.$$

Таблица 8

X	$\le 13{,}32$	13,37	13,42	13,47	13,52	13,57	$> 13{,}62$
$F^*(x)$	0	1/9	43/90	7/10	39/45	42/45	1

Построим график $F^*(x)$: сначала на интервалах $(-\infty;13{,}32)$ и $(13{,}62;\infty)$, а затем в указанных в таблице 8 точках. Учитывая непрерывность функции $F^*(x)$, полученные точки соединим (рисунок 5).

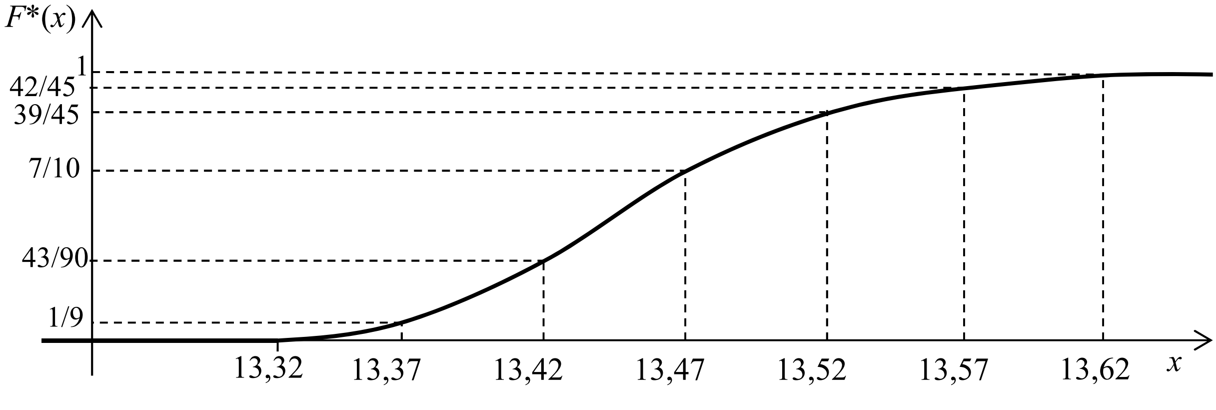

Рисунок 5

6 Найдем $M_в(X)=\overline{X}$ по формуле

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{6}y_i\cdot n_i\ ,$$

где y_i – середина i-го интервала;

n_i – его частота;

n – объем выборки (таблица 7, столбцы 4 и 10).

$$\overline{X}=\frac{1}{90}\cdot\left(13,345\cdot10+13,395\cdot33+13,445\cdot20+13,495\cdot15+13,545\cdot6+13,595\cdot6\right)=$$
$$=\frac{1}{90}\cdot\left(133,45+442,035+268,9+202,425+81,27+81,57\right)=\frac{1}{90}\cdot1209,65\approx13,44\,.$$

Вычислим $D_в(X)$ по формуле

$$D_в\left(X\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{6}\left(y_i-\overline{X}\right)^2\cdot n_i\ .$$

$$D_в\left(X\right)=\frac{1}{90}\Big(\left(13,345-13,44\right)^2\cdot10+\left(13,395-13,44\right)^2\cdot33+\left(13,445-13,44\right)^2\cdot20+$$
$$+\left(13,495-13,44\right)^2\cdot15+\left(13,545-13,44\right)^2\cdot6+\left(13,595-13,44\right)^2\cdot6\Big)=$$
$$=\frac{1}{90}\left(0,09025+0,066825+0,0005+0,045375+0,06615+0,14415\right)=$$
$$=\frac{1}{90}\cdot0,4794\approx0,0053\,.$$
$$\sigma_в\left(X\right)=\sqrt{D_в\left(X\right)}=\sqrt{\frac{1}{90}\cdot0,4794}\approx0,073\,.$$

7 Полигон и гистограмма относительных частот (см. рисунки 3 и 4) напоминают нормальную кривую (рисунок 6, кривая Гаусса). Поэтому предположим, что распределение СВ X (диаметра головки заклёпки) является *нормальным*.

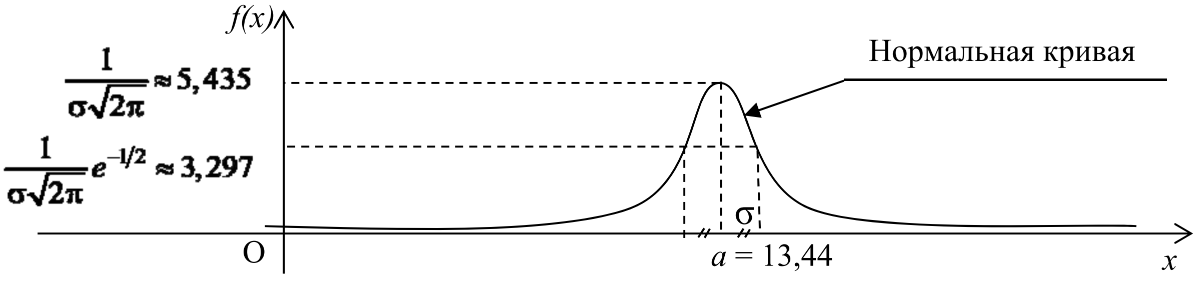

Рисунок 6

8 Плотность вероятности и функция распределения СВ X, распределенной по нормальному закону, имеют вид:

$$f\left(x\right)=\frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\left(x-a\right)^2}{2\sigma^2}}; \tag{1}$$

$$F\left(x\right)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x}e^{-\frac{\left(x-a\right)^2}{2\sigma^2}}dt. \tag{2}$$

Найдем точечные оценки параметров $a=M\left(X\right)$ и $\sigma=\sigma(X)$ нормального распределения:

$$\begin{cases}\tilde{a}=\widetilde{M}\left(X\right)=M_{в}\left(X\right)=\overline{X}\approx 13,44;\\ \sigma_{в}=\sqrt{\tilde{D}\left(X\right)}=\sqrt{\dfrac{n}{n-1}D_{в}\left(X\right)}=\sqrt{\dfrac{1}{89}\cdot 0,4794}\approx 0,0734,\end{cases} \tag{3}$$

где $\tilde{M}\left(X\right)$, $\tilde{D}\left(X\right)$ – точечные оценки соответственно для $M\left(X\right)$ и $D\left(X\right)$.

Следовательно, плотность вероятности предполагаемого распределения $N\left(a,\sigma\right)$ имеет вид:

$$f\left(x\right)=\frac{1}{0,0734\cdot\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{\left(x-13,44\right)^2}{0,0108}},$$

её график изображён на рисунке 6, и *функция распределения*

$$F\left(x\right)=\frac{1}{0,0734\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x}e^{-\frac{\left(t-13,44\right)^2}{0,0108}}dt$$

(учли формулы (1)–(3)).

Контрольные вопросы

1 В чем состоит отличие вариационного и статистического рядов?

2 Какие характеристики СВ можно оценить по виду полигона и гистограммы относительных частот?

Варианты заданий для самостоятельного решения

1 При обработке наружного диаметра 100 карданных валов получены следующие размеры (в миллиметрах).

42,2	42,0	43,3	43,7	42,5	42,9	43,0	42,7	42,4	42,6
41,7	41,9	41,8	43,2	42,4	42,5	42,5	42,5	43,0	42,5
41,2	41,6	42,6	40,3	41,6	43,4	43,5	42,7	43,1	42,6
42,5	40,6	44,1	42,0	40,4	42,0	43,1	42,5	43,4	42,5
43,2	42,8	40,7	43,6	42,5	41,1	41,3	43,6	43,8	42,8
42,5	43,3	42,9	40,8	41,1	42,3	40,2	43,1	43,7	42,6
42,8	43,6	42,5	41,5	40,0	41,4	42,1	44,0	42,4	43,9
42,4	42,5	42,4	42,9	42,2	43,5	43,0	42,8	43,2	43,4
42,5	42,6	42,6	42,4	43,5	43,8	43,4	42,5	42,8	41,3
42,1	42,5	42,4	43,4	44,0	42,6	42,5	44,0	41,7	43,2

2 Из продукции токарного станка, изготавливающего валики, отобрано для анализа распределения диаметров 150 валиков. Получены следующие данные (в сантиметрах).

3,9	4,0	3,7	4,0	3,9	4,0	3,7	4,0	4,0	4,3	3,9	3,9	3,8	3,8	4,0
4,8	4,4	4,1	4,2	3,4	4,4	4,2	4,1	4,2	4,1	3,8	4,6	4,1	4,2	3,9
4,0	3,8	4,0	3,8	4,0	3,9	4,0	4,0	3,9	4,3	4,0	4,0	4,0	4,0	4,0
4,6	4,2	4,1	4,4	3,9	4,2	4,1	3,7	4,1	4,2	3,6	3,7	3,7	4,4	4,4
3,8	4,0	3,9	4,0	4,0	4,0	4,0	4,0	4,0	4,3	4,0	4,0	3,8	3,8	4,0
4,4	3,6	4,6	3,7	4,1	4,4	3,9	4,1	3,4	3,9	4,0	4,0	4,0	4,0	4,3
4,0	4,0	4,0	4,0	4,0	4,0	4,0	4,0	4,0	3,9	4,2	4,2	4,4	4,1	4,1
4,2	4,1	4,2	4,4	4,2	3,4	4,2	3,9	4,1	3,6	3,9	3,9	3,9	3,9	3,9
3,8	3,8	4,0	4,0	4,0	4,0	4,0	4,0	4,0	4,3	4,1	4,1	4,1	4,2	4,2
4,0	4,8	4,1	4,6	4,4	3,9	4,1	3,6	3,9	4,2	3,8	4,0	4,0	4,0	4,3

3 Случайная величина X – время работы элемента (в часах) для 100 элементов приняла следующие значения.

2,4	7,3	8,5	27,4	26,1	18,1	19,4	17,3	18,6	19,1
24,3	24,0	9,6	13,2	17,1	16,8	2,9	11,3	2,8	3,1
14,5	5,2	5,7	6,9	4,7	8,1	5,3	10,2	11,4	17,1
2,3	21,3	12,4	16,1	3,1	4,7	5,8	6,2	11,7	10,3
2,7	2,9	4,2	5,6	11,0	17,2	3,8	4,1	3,1	7,3
8,1	13,1	12,7	21,0	3,0	4,2	10,0	9,2	2,5	4,7
4,3	5,9	11,7	10,2	2,9	2,8	6,1	3,2	4,8	12,0
13,2	2,7	19,1	17,3	2,4	4,3	13,2	11,2	7,3	3,2
2,6	6,3	7,1	7,6	8	8,9	12,4	19,2	5,2	5,9
4,1	7,8	12,0	3,3	2,3	7,7	18,1	20,2	2,8	6,1

4 Измерения 120 интервалов поступления агломерата под выгрузку дали следующие результаты (в часах).

1,8	2,0	5,7	3,0	1,3	1,4	2,2	2,2	2,5	1,8	6,7	2,6
0,9	5,5	1,9	1,3	1,5	1,8	2,9	2,7	3,2	2,0	3,0	3,5
7,6	3,6	2,1	2,4	7,0	2,2	3,0	1,8	1,8	3,0	2,1	2,1
2,0	2,3	2,8	1,8	2,8	3,2	3,3	2,3	1,6	3,0	1,3	6,0
2,6	2,8	7,8	3,6	1,8	2,8	1,8	1,8	2,2	1,5	2,3	2,9
1,6	1,7	1,7	2,8	3,3	1,7	2,5	1,5	1,6	2,5	2,3	5,4
2,8	2,6	2,2	2,0	1,8	2,8	5,1	2,6	2,3	2,7	1,7	2,6
2,3	1,1	3,2	2,5	1,8	3,9	3,5	3,5	3,5	1,5	3,9	2,5
4,8	1,5	2,9	2,8	1,9	2,0	2,2	2,8	1,5	2,2	2,8	2,8
5,3	1,0	2,1	1,8	1,3	2,8	1,5	1,5	1,7	1,9	1,8	1,8

5 Подсчитаны затраты времени 120 рабочих на обработку одной детали (в минутах).

5,3	6,0	5,7	3,0	1,3	1,4	2,2	2,2	2,5	1,8	6,7	2,6
5,2	7,1	1,9	1,3	1,5	1,8	2,9	2,7	3,2	2,0	3,0	3,5
4,6	6,2	2,1	2,4	7,0	2,2	3,0	1,8	1,8	3,0	2,1	2,1
5,2	5,7	2,8	1,8	2,8	3,2	3,3	2,3	1,6	3,0	1,3	6,0
8,2	6,3	7,8	3,6	1,8	2,8	1,8	1,8	2,2	1,5	2,3	2,9
5,8	1,7	1,7	2,8	3,3	1,7	2,5	1,5	1,6	2,5	2,3	5,4
7,0	2,6	2,2	2,0	1,8	2,8	5,1	2,6	2,3	2,7	1,7	2,6
5,8	1,1	3,2	2,5	1,8	3,9	3,5	3,5	3,5	1,5	3,9	2,5
7,4	1,5	2,9	2,8	1,9	2,0	2,2	2,8	1,5	2,2	2,8	2,8
5,4	1,0	2,1	1,8	1,3	2,8	1,5	1,5	1,7	1,9	1,8	1,8

Таблица 9 – Дополнительные сведения к вариантам заданий

Номер варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Объём выборки	50	45	40	35	55	50	45	35	40	55
Уровень значимости	0,2	0,1	0,05	0,01	0,02	0,1	0,05	0,02	0,01	0,2
Критерий согласия	χ^2	χ^2	λ	λ	χ^2	χ^2	λ	λ	χ^2	χ^2
a_0	a_2	a_1	a_2	a_1	a_2	a_2	a_1	a_1	a_2	a_2
σ_0^2	σ_2^2	σ_1^2	σ_1^2	σ_2^2	σ_1^2	σ_2^2	σ_1^2	σ_2^2	σ_1^2	σ_1^2
Гипотезы H_a	$a \neq a_0$ $\sigma^2 > \sigma_0^2$	$a > a_0$ $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$a < a_0$ $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$a \neq a_0$ $\sigma^2 < \sigma_0^2$	$a > a_0$ $\sigma^2 < \sigma_0^2$	$a < a_0$ $\sigma^2 > \sigma_0^2$	$a \neq a_0$ $\sigma^2 < \sigma_0^2$	$a > a_0$ $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$a < a_0$ $\sigma^2 < \sigma_0^2$	$a \neq a_0$ $\sigma^2 > \sigma_0^2$

Замечание – a_1 *и* σ_1 *соответственно значения* a *и* σ *в правом конце доверительных интервалов,* a_2 *и* σ_2 *– в левом*

11 Лабораторные работы № 14–15. Статистическая проверка гипотез. Критерии согласия

Цель работы: изучить методы проверки статистических гипотез.

Постановка задачи. На основе данных из занятий 12–13 требуется:

1) проверить согласие эмпирической функции распределения $F^*(x)$ с теоретической $F(x)$ при помощи критерия согласия χ^2 Пирсона или λ Колмогорова;

2) в случае нормального распределения СВ X по заданному уровню значимости α:

а) найти интервальные оценки параметров распределения;

б) проверить нулевую гипотезу $H_0 : M(X) = a = a_0$ о математическом ожидании при альтернативной гипотезе $H_a : a \neq a_0$ $(a > a_0;\ a < a_0)$;

в) проверить нулевую гипотезу $H_0 : D(X) = \sigma^2 = \sigma_0^2$ о дисперсии против альтернативной гипотезы $H_a : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$ $(\sigma^2 < \sigma_0^2,\ \sigma^2 > \sigma_0^2)$.

Примечание – Использовать гипотезы из таблицы 9 занятий 10–11.

Пример выполнения

Решение п. 1

Проведем проверку гипотезы о нормальном распределении СВ X – диаметра головки заклепки.

Вероятность попадания СВ X, распределенной по закону $N(a, \sigma)$, в интервал $(\alpha;\beta)$ найдем по формуле

$$p = P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right), \tag{4}$$

где $\Phi(x)$ – функция Лапласа.

Вероятность попадания СВ X в первый частичный интервал $(-\infty; 13{,}37)$ (учтем, что $\Phi(-x) = -\Phi(x)$)

$$p_1 = P(-\infty < X < 13{,}37) = \Phi\left(\frac{13{,}37 - 13{,}44}{0{,}0734}\right) - \Phi\left(\frac{-\infty - 13{,}44}{0{,}0734}\right) =$$
$$= \Phi(\infty) - \Phi(0{,}9537) = 0{,}5 - 0{,}3289 = 0{,}1711.$$

$$p_2 = P(13{,}37 \le X < 13{,}42) = \Phi\left(\frac{13{,}42 - 13{,}44}{0{,}0734}\right) - \Phi\left(\frac{13{,}37 - 13{,}44}{0{,}0734}\right) =$$

$= \Phi(0{,}9537) - \Phi(0{,}2725) \approx 0{,}3289 - 0{,}1064 = 0{,}2225$ – вероятность попадания СВ X в $[13{,}37; 13{,}42)$.

$$p_3 = P\left(13,42 \le X < 13,47\right) = \Phi\left(\frac{13,47-13,44}{0,0734}\right) - \Phi\left(\frac{13,42-13,44}{0,0734}\right) =$$

$= \Phi\left(0,4086\right) + \Phi\left(0,2725\right) \approx 0,1591 + 0,1064 = 0,2655$ – вероятность попадания СВ X в $\left[13,42;13,47\right)$.

$$p_4 = P\left(13,47 \le X < 13,52\right) = \Phi\left(\frac{13,52-13,44}{0,0734}\right) - \Phi\left(\frac{13,47-13,44}{0,0734}\right) =$$

$= \Phi\left(1,0899\right) - \Phi\left(0,4087\right) \approx 0,3621 - 0,1591 = 0,2030$ – вероятность попадания СВ X в $\left[13,47;13,52\right)$.

$$p_5 = P\left(13,52 \le X < 13,57\right) = \Phi\left(\frac{13,57-13,44}{0,0734}\right) - \Phi\left(\frac{13,52-13,44}{0,0734}\right) =$$

$= \Phi\left(1,7711\right) - \Phi\left(1,0899\right) \approx 0,4616 - 0,3621 = 0,0995$ – вероятность попадания СВ X в $\left[13,52;13,57\right)$.

$$p_6 = P\left(13,57 \le X < +\infty\right) = \Phi\left(\frac{\infty-13,44}{0,0734}\right) - \Phi\left(\frac{13,57-13,44}{0,0734}\right) =$$

$= \Phi\left(\infty\right) - \Phi\left(1,7711\right) = 0,5 - 0,4616 = 0,0384$ – вероятность попадания СВ X в $\left[13,57;\infty\right)$.

Проверим гипотезу о нормальном распределении с помощью критерия согласия χ^2 Пирсона. Вычисления, необходимые для определения наблюдаемого значения выборочной статистики χ^2, проведём в таблице 10.

Таблица 10 – Определение выборочной статистики χ^2

Интервал наблюдаемых значений СВ X	Частота n_i	p_i	np_i	$\left(n_i - np_i\right)^2$	$\frac{\left(n_i - np_i\right)^2}{np_i}$
$\left(-\infty;13,37\right)$	10	0,17105	15,3945	29,1006	1,8903
$\left[13,37;13,42\right)$	33	0,22255	20,0295	168,2339	8,3993
$\left[13,42;13,47\right)$	20	0,2655	23,895	15,1710	0,6349
$\left[13,47;13,52\right)$	15	0,20305	18,2745	10,7223	0,5867
$\left[13,52;13,57\right)$	6	0,0995	8,955	8,7320	0,9751
$\left[13,57;\infty\right)$	6	0,03835	3,4515	6,4948	1,8817
$\sum$	90	1	90		$\chi^2_{набл} = 14,368$

Из таблицы распределения χ^2 по уровню значимости $\alpha = 0,05$ (см. таблицу 9) и числу степеней свободы $\nu = k - r - 1 = 6 - 2 - 1 = 3$ (здесь k – число интервалов, r – число параметров распределения) находим $\chi^2_{0,05;\,3} = 7,815$. Так как

$\chi^2_{набл} > \chi^2_{0,05;\,3}$, то отклоняем гипотезу о нормальном распределении диаметров головок заклепок.

Проверим гипотезу о нормальном распределении с помощью критерия согласия λ Колмогорова.

Все вспомогательные расчеты, необходимые для нахождения выборочной характеристики λ, сведём в таблицу 11.

Таблица 11 – Нахождение выборочного значения λ

Интервалы наблюдаемых значений СВ X	Частота n_i	n_x	p_i	$F^*(x)=\frac{n_x}{n}$	$F(x)=P(X<x)$	$\lvert F^*(x)-F(x)\rvert$
$(-\infty;13,37)$	10	10	0,17105	1/9	0,17105	0,0599
$[13,37;13,42)$	33	43	0,22255	43/90	0,3936	0,0842
$[13,42;13,47)$	20	63	0,2655	7/10	0,6591	0,0409
$[13,47;13,52)$	15	78	0,20305	39/45	0,86215	0,0045
$[13,52;13,57)$	6	84	0,0995	42/45	0,96165	0,0283
$[13,57;\infty)$	6	90	0,03835	1	1	0
$\sum$	90	–	–	–	–	–

$$D=\max\lvert F^*(x)-F(x)\rvert=0,0842;\qquad \lambda_{набл}=D\cdot\sqrt{n}=0,0842\cdot\sqrt{90}\approx 0,7988.$$

По таблице квантилей распределения Колмогорова и уровню значимости $\alpha=0,05$ (надежность $P=1-\alpha=0,95$) находим критическое значение $\lambda_{0,05}=1,358$.

Так как $\lambda_{набл}<\lambda_{0,05}$, то нет оснований для отклонения гипотезы о нормальном распределении диаметров головок заклёпок.

Решение п. 2, а

Доверительный интервал, накрывающий математическое ожидание СВ X с надежностью $P=1-\alpha$, имеет вид:

$$\tilde{a}-t\frac{\sigma_в}{\sqrt{n}}<a<\tilde{a}+t\frac{\sigma_в}{\sqrt{n}}. \tag{5}$$

По таблице квантилей распределения Стьюдента по заданному уровню значимости $\alpha=0,05$ и числу степеней свободы $\nu=n-1=89$ найдем квантиль:

$$t=t_{\frac{\alpha}{2},\nu}=t_{0,025;89}=1,987.$$

Вычислим точность оценки:

$$\delta = t\cdot\frac{\sigma_в}{\sqrt{n}} = 1,987\cdot\frac{0,073}{\sqrt{90}} \approx 0,015 .$$

Искомый доверительный интервал для $M(X)=a$

$$13,44-0,015 < a \le 13,44+0,015;\; 13,425 < a \le 13,455 .$$

Полуинтервал $(13,425;\,13,455]$ накрывает неизвестное $M(X)$ с вероятностью $p=0,95$.

Доверительный интервал, накрывающий среднее квадратическое отклонение СВ X с надёжностью $P=1-\alpha$,

$$\sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},\nu}}}\cdot\sigma_в < \sigma < \sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},\nu}}}\cdot\sigma_в \qquad (6)$$

или короче

$$j_1\cdot\sigma_в < \sigma < j_2\cdot\sigma_в \;,$$

где значения j_1 и j_2 вычисляются по формулам $j_1=\sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},\nu}}}$ и $j_2=\sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},\nu}}}$.

По таблице распределения χ^2 по заданной доверительной вероятности $p=0,95$ и числу степеней свободы $\nu=89$ найдём числа $j_1=0,873$, $j_2=1,171$.

Замечание – Если число степеней свободы $\nu>30$, *то* $\chi^2_{\alpha,\nu}$ *можно найти из равенства Уилсона – Гильферти*:

$$\chi^2_{\alpha,\nu} = \nu\left(1-\frac{2}{9\nu}+z_\alpha\sqrt{\frac{2}{9\nu}}\right)^3 ,$$

где z_α *находят, используя функцию Лапласа* $\Phi(z)$, *из равенства* $\Phi(z_\alpha)=\frac{1-2\alpha}{2}$.

Искомый доверительный интервал для параметра σ

$$0,873\cdot 0,073 < \sigma < 1,171\cdot 0,073;\;\; 0,0637 < \sigma < 0,0855 .$$

Интервал $(0,0637;\,0,0855)$ накрывает неизвестное $\sigma(X)$ с вероятностью $p=0,95$.

Решение п. 2, б

Имеем $a_0 = a_1 = 13,455$. Надо проверить нулевую гипотезу H_0 : $a = a_0 = 13,455$ против альтернативной $H_a : a \neq a_0$ $(a > a_0$ или $a < a_0)$.

Правило 1. *Чтобы при заданном уровне значимости* α *проверить нулевую гипотезу* $H_0 : a = a_0$ *(о равенстве* $a = M(X)$ *СВ X, распределенной по закону* $N(a, \sigma)$, *предполагаемому значению* a_0 *) при альтернативной гипотезе* $H_a : a \neq a_0$, *надо вычислить наблюдаемое значение U-критерия как*

$$U_{набл} = \frac{\left(\overline{X} - a_0\right)\sqrt{n}}{\sigma_в} \tag{7}$$

и по таблице значений функции Лапласа найти критическое значение $U_{кр}$ *двусторонней критической области из равенства*

$$\Phi\left(U_{кр}\right) = \frac{1-\alpha}{2}.$$

Если $\left|U_{набл}\right| < U_{кр}$, *то* H_0 *принимают; если* $\left|U_{набл}\right| > U_{кр}$, *то нулевую гипотезу отклоняют и принимают альтернативную гипотезу* $H_a : a \neq a_0$.

Правило 2. *Пусть* $H_0 : a = a_0$ *и альтернативная гипотеза* $H_a : a > a_0$. *Критическое значение* $U_{кр}$ *правосторонней критической области находят из равенства*

$$\Phi\left(U_{кр}\right) = \frac{1-2\alpha}{2}.$$

Если $U_{набл} < U_{кр}$, *то нулевую гипотезу принимают; если* $U_{набл} > U_{кр}$, *то нулевую гипотезу отвергают, принимают альтернативную.*

Правило 3. *Пусть* $H_0 : a = a_0$ *и альтернативная гипотеза* $H_a : a < a_0$. *По правилу 2 находят вспомогательное критическое значение* $U_{кр}$, *полагают* $U^*_{кр} = -U_{кр}$ *(граница левосторонней критической области). Если* $U_{набл} > -U_{кр}$, H_0 *принимают; если* $U_{набл} < -U_{кр}$, H_0 *отвергают (наблюдаемое значение* U*-критерия попадает в критическую область) и принимают альтернативную гипотезу* H_a.

Воспользуемся правилом 1. По таблице значений функции Лапласа $\Phi(u)$ и по уровню значимости $\alpha = 0,05$ находим

$$\Phi\left(U_{кр}\right)=\frac{1-0,05}{2}=0,475\,;\ U_{кр}=1,96\,.$$

Вычисляем по формуле (7)

$$U_{набл}=\frac{\left(13,44-13,455\right)\sqrt{90}}{0,073}\approx -1,939.$$

Так как $\left|U_{набл}\right|<U_{кр}$, то нулевую гипотезу принимаем и отвергаем альтернативную гипотезу $H_a: a\neq 13,455$.

Решение п. 2, в

Имеем $\sigma_0=\sigma_2=0,0641$. Проверим гипотезу $H_0:\sigma^2=\sigma_0^2=0,0041$ против альтернативной $H_a:\sigma^2>\sigma_0^2$ $\left(\sigma^2=\sigma_0^2 \text{ или } \sigma^2<\sigma_0^2\right)$.

Правило 4. *Для того чтобы при заданном уровне значимости* α *проверить нулевую гипотезу* $H_0:\sigma^2=\sigma_0^2$ (*о равенстве неизвестной дисперсии* σ^2 *предполагаемому значению* σ_0^2) *при альтернативной гипотезе* $H_a:\sigma^2>\sigma_0^2$, *вычисляют наблюдаемое значение статистического критерия как*

$$\chi^2_{набл}=\frac{\left(n-1\right)\sigma_в^2}{\sigma_0^2} \tag{8}$$

и по таблице распределения χ^2 *Пирсона находят критическое значение* (*по уровню значимости* α *и числу степеней свободы* $\nu=n-1$) $\chi^2_{кр}=\chi^2_{\alpha,\nu}$. *Если* $\chi^2_{набл}<\chi^2_{кр}$, *то нулевую гипотезу принимают*; *если* $\chi^2_{набл}>\chi^2_{кр}$, *то отвергают нулевую гипотезу в пользу альтернативной.*

Правило 5. *Пусть* $H_0:\sigma^2=\sigma_0^2$ *и альтернативная гипотеза* $H_a:\sigma^2\neq\sigma_0^2$. *Находят критические левую и правую точки* $\chi^2_{лев.кр}=\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},\nu}$ *и* $\chi^2_{прав.\,кр}=\chi^2_{\frac{\alpha}{2},\nu}$ *по таблице распределения* χ^2 *Пирсона.*

Если $\chi^2_{лев.кр}<\chi^2_{набл}<\chi^2_{прав.кр}$ (*наблюдаемое значение критерия попало в область допустимых значений*), *то нулевую гипотезу* H_0 *принимают. Если* $\chi^2_{набл}<\chi^2_{лев.кр}$ *или* $\chi^2_{набл}>\chi^2_{прав.кр}$, *то отклоняют* H_0 *в пользу альтернативной гипотезы* H_a.

Правило 6. *Пусть* $H_0:\sigma^2=\sigma_0^2$ *и альтернативная гипотеза* $H_a:\sigma^2<\sigma_0^2$. *Находят критическое значение* $\chi^2_{кр}=\chi^2_{1-\alpha,\nu}$. *Если* $\chi^2_{набл}>\chi^2_{кр}$, *то* H_0 *принимают*;

если $\chi^2_{набл} < \chi^2_{кр}$, *то* H_0 *отклоняют, принимают альтернативную гипотезу* H_a.

Воспользуемся правилом 4 и равенством Уилсона – Гильферти:

$$\chi^2_{набл} = \frac{89 \cdot 0{,}0734^2}{0{,}0641^2} \approx 116{,}6987.$$

По уровню значимости $\alpha = 0{,}05$ и числу степеней свободы $\nu = 89$ находим $\chi^2_{кр} = \chi^2_{\alpha,\nu}$.

Так как $\nu > 30$, находим $\Phi(z_\alpha) = \dfrac{1 - 2 \cdot 0{,}05}{2} = 0{,}45,\ z_\alpha = 1{,}645$ и получаем

$$\chi^2_{\alpha,\nu} = \chi^2_{0{,}05;\,89} = 89\left(1 - \frac{2}{9 \cdot 89} + 1{,}645\sqrt{\frac{2}{9 \cdot 89}}\right)^3 \approx 112{,}022.$$

$\chi^2_{набл} > \chi^2_{кр}$ и потому гипотезу H_0 отвергаем, принимаем гипотезу $H_a : \sigma^2 > 0{,}0041$.

Контрольные вопросы

1 В чем заключается проверка статистических гипотез?
2 Какие гипотезы называются параметрическими и непараметрическими?

12 Лабораторная работа № 16. Линейная регрессия и корреляция

Цель работы: изучить основные понятия регрессии и корреляции.

Выборочное уравнение прямой линии регрессии *Y* на *X* имеет следующий вид:

$$\overline{y}_x - \overline{y} = r_в \frac{\sigma_y}{\sigma_x}\left(x - \overline{x}\right), \tag{9}$$

где $\overline{y}_x$ – условная средняя;

$\overline{x}$, $\overline{y}$ – выборочные средние признаков *X* и *Y*;

σ_x, σ_y – выборочные средние квадратические отклонения;

$r_в$ – выборочный коэффициент корреляции, причём

$$r_в = \frac{\sum n_{xy} xy - n\overline{x}\,\overline{y}}{n\sigma_x\sigma_y}.$$

Выборочное уравнение прямой линии регрессии X на Y

$$\overline{x}_y - \overline{x} = r_{\text{в}} \frac{\sigma_x}{\sigma_y} \left(y - \overline{y} \right). \tag{10}$$

Если данные наблюдений над признаками X и Y заданы в виде корреляционной таблицы с равноотстоящими вариантами, то целесообразно перейти к условным вариантам:

$$u_i = \frac{x_i - C_1}{h_1};\ v_i = \frac{y_i - C_2}{h_2},$$

где C_1 – «ложный нуль» вариант X (новое начало отсчёта); в качестве «ложного нуля» выгодно принять варианту, которая расположена примерно в середине вариационного ряда (условимся принимать в качестве «ложного нуля» варианту, имеющую наибольшую частоту);

h_1 – шаг, т. е. разность между двумя соседними вариантами X;

C_2 – «ложный нуль» вариант Y;

h_2 – шаг вариант Y.

В этом случае выборочный коэффициент корреляции $r_в = \dfrac{\sum n_{uv} uv - n\overline{u}\,\overline{v}}{n\sigma_u \sigma_v}$, причем слагаемое $\sum n_{uv} uv$ удобно вычислять, используя расчётную таблицу 14 (см. пример решения).

Величины $\overline{u}, \overline{v}, \sigma_u, \sigma_v$ могут быть найдены либо методом произведений (при большом числе данных), либо непосредственно по формулам

$$\overline{u} = \left(\sum n_u u \right) \big/ n;\ \overline{v} = \left(\sum n_v v \right) \big/ n;\ \sigma_u = \sqrt{\overline{u^2} - \left(\overline{u} \right)^2};\ \sigma_v = \sqrt{\overline{v^2} - \left(\overline{v} \right)^2}.$$

Зная эти величины, можно определить входящие в уравнения регрессии (9) и (10) величины по формулам

$$\overline{x} = \overline{u} h_1 + C_1;\ \overline{y} = \overline{v} h_2 + C_2;\ \sigma_x = \sigma_u h_1;\ \sigma_y = \sigma_v h_2.$$

Пример выполнения

По результатам наблюдений случайной величины (X, Y) из корреляционной таблицы 12 необходимо:

– найти выборочные уравнения регрессии Y на X и X на Y;

– построить графики прямых линий регрессии Y на X и X на Y.

Таблица 12

Y	X					n_y
	20	25	30	35	40	
16	4	6	—	—	—	10
26	—	8	10	—	—	18
36	—	—	32	3	9	44
46	—	—	4	12	6	22
56	—	—	—	1	5	6
n_x	4	14	46	16	20	n = 100

Решение

Составим корреляционную таблицу 13 в условных вариантах, выбрав в качестве «ложных нулей» $C_1 = 30$ и $C_2 = 36$ (каждая из этих вариант расположена в середине соответствующего вариационного ряда).

Таблица 13

v	u					
	–2	–1	0	1	2	n_v
–2	4	6	–	–	–	10
–1	–	8	10	–	–	18
0	–	–	32	3	9	44
1	–	–	4	12	6	22
2	–	–	–	1	5	6
n_u	4	14	46	16	20	n = 100

Найдем u и v:

$$\overline{u} = \left(\sum n_u u\right)\Big/n = \left(4\cdot(-2)+14\cdot(-1)+46\cdot 0+16\cdot 1+20\cdot 2\right)\Big/100 = 0{,}34\,;$$
$$\overline{v} = \left(\sum n_v v\right)\Big/n = \left(10\cdot(-2)+18\cdot(-1)+44\cdot 0+22\cdot 1+6\cdot 2\right)\Big/100 = -0{,}04\,.$$

Найдем вспомогательные величины u^2 и v^2:

$$\overline{u^2} = \left(\sum n_u u^2\right)\Big/n = \left(4\cdot 4+14\cdot 1+16\cdot 1+20\cdot 4\right)\Big/100 = 1{,}26\,;$$
$$\overline{v^2} = \left(\sum n_v v^2\right)\Big/n = \left(10\cdot 4+18\cdot 1+22\cdot 1+6\cdot 4\right)\Big/100 = 1{,}04\,.$$

Найдем σ_u и σ_v:

$$\sigma_u = \sqrt{\overline{u^2}-\left(\overline{u}\right)^2} = \sqrt{1{,}26-0{,}34^2} = 1{,}07\,;\ \sigma_v = \sqrt{\overline{v^2}-\left(\overline{v}\right)^2} = \sqrt{1{,}04-0{,}04^2} = 1{,}02\,.$$

Найдем $\sum n_{uv}uv$, для чего составим расчетную таблицу 14. Суммируя числа последнего столбца таблицы 14, находим $\sum_v v \cdot U = \sum n_{uv}uv = 82$.

Для контроля вычислений находим сумму чисел последней строки:

$$\sum_u u \cdot V = \sum n_{uv}uv = 82 .$$

Совпадение сумм свидетельствует о правильности вычислений.

Таблица 14

v	u					$U = \sum n_{uv} \cdot u$	$v \cdot U$
	–2	– 1	0	1	2		
–2	–8 4 –8	–6 6 –12				–14	28
–1	–	–8 8 –8	0 10 –10			–8	8
0	–	–	0 32 0	3 3 0	18 9 0	21	0
1	–	–	0 4 4	12 12 12	12 6 6	24	24
2	–	–	–	1 1 2	10 5 10	11	22
$V = \sum n_{uv} \cdot v$	–8	–20	–6	14	16		$\sum_v v \cdot U = 82$
$u \cdot V$	16	20	0	14	32	$\sum_u u \cdot V = 82$	Контроль

Пояснения к составлению таблицы 14.

1 Произведение частоты n_{uv} на варианту u, т. е. $n_{uv}\, u$, записывают в правом верхнем углу клетки, содержащей значение частоты. Например, в правых верхних углах клеток первой строки записаны произведения: 4(–2) = –8; 6(–1) = –6.

2 Складывают все числа, помещённые в правых верхних углах клеток одной строки, и их сумму помещают в клетку этой же строки «столбца U». Например, для первой строки u = –8 + (–6) = –14.

3 Наконец, умножают варианту v на U и полученное произведение записывают в соответствующую клетку «столбца vU». Например, в первой строке таблицы v = –2, U = –14, следовательно, vU = (–2)(–14) = 28.

4 Сложив все числа «столбца vU», получают сумму $\sum vU$, которая равна

искомой сумме $\sum n_{uv}uv$. Например, для таблицы 14 $\sum_v vU = 82$, следовательно, искомая сумма $\sum n_{uv}uv = 82$.

5 Для контроля аналогичные вычисления производят по столбцам: произведения $n_{uv}v$ записывают в левый нижний угол клетки, содержащей значение частоты; все числа, помещённые в левых нижних углах клеток одного столбца, складывают и их сумму помещают в «строку V»; наконец, умножают каждую варианту u на V и результат записывают в клетках последней строки.

6 Сложив все числа последней строки, получают сумму $\sum_u vU$, которая также равна искомой сумме $\sum n_{uv}uv$. Например, для таблицы 14 $\sum_v vU = 82$, следовательно, $\sum n_{uv}uv = 82$.

Найдем искомый выборочный коэффициент корреляции:

$$r_в = \frac{\sum n_{uv}uv - n\overline{u}\,\overline{v}}{n\sigma_u\sigma_v} = \frac{82 - 100\cdot 0,34\cdot(-0,04)}{100\cdot 1,07\cdot 1,02} = 0,76.$$

Найдем шаги h_1 и h_2 (разности между любыми двумя соседними вариантами):

$$h_1 = 25 - 20 = 5;\ h_2 = 26 - 16 = 10.$$

Найдем $\overline{x}$ и $\overline{y}$, учитывая, что $C_1 = 30$, $C_2 = 36$:

$$\overline{x} = \overline{u}\cdot h_1 + C_1 = 0,34\cdot 5 + 30 = 31,70;\ \overline{y} = \overline{v}\cdot h_2 + C_2 = (-0,04)\cdot 10 + 36 = 35,60.$$

Найдем σ_x и σ_y: $\sigma_x = h_1\cdot\sigma_u = 5\cdot 1,07 = 5,35$; $\sigma_y = h_2\cdot\sigma_v = 10\cdot 1,02 = 10,2$.

Подставив найденные величины в соотношение (9), получим искомое уравнение прямой линии регрессии Y на X

$$\overline{y}_x - 35,60 = 0,76\cdot\frac{10,2}{5,35}(x - 31,70) \text{ или } \overline{y}_x = 1,45x - 10,36.$$

Подставив найденные величины в соотношение (10), получим искомое уравнение прямой линии регрессии X на Y

$$\overline{x}_y - 31,70 = 0,76\cdot\frac{5,35}{10,2}(y - 35,60) \text{ или } \overline{x}_y = 0,40y + 17,51.$$

Для построения из последнего уравнения можно выразить y: $y = 2,51\overline{x}_y - 43,92$.

Строим графики прямых линий регрессии (рисунок 7).

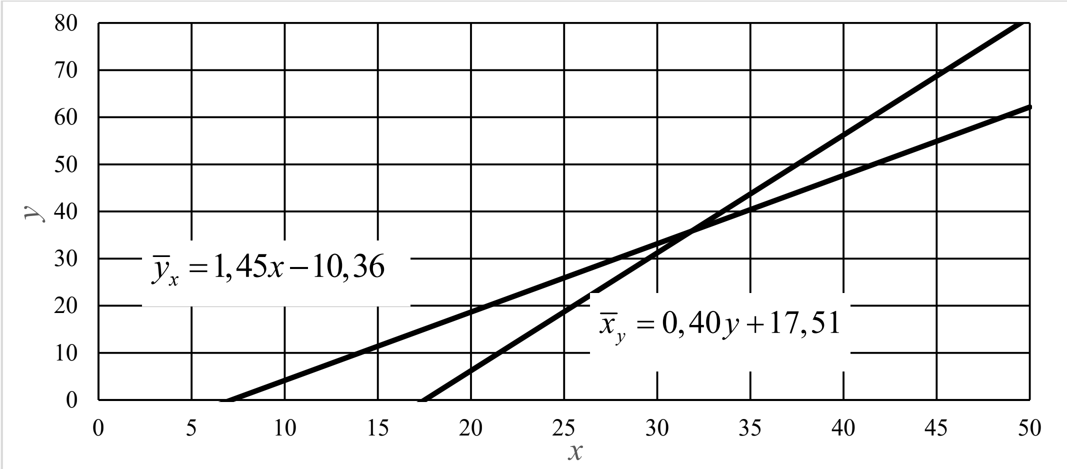

Рисунок 7

Контрольные вопросы

1 В какой точке пересекаются прямые линии регрессии Y на X и X на Y?
2 Какие значения может принимать коэффициент корреляции?

Задачи для самостоятельного решения

По результатам наблюдений случайной величины (X, Y) из корреляционных таблиц 15 (вариант 1), 16 (вариант 2) и 17 (вариант 3) необходимо:

1) найти выборочные уравнения регрессии Y на X и X на Y;

2) построить графики прямых линий регрессии Y на X и X на Y.

Таблица 15

Y	X					
	5	8	11	14	17	20
10	2	2	–	–	–	–
20	–	3	7	–	–	–
30	–	–	5	30	10	–
40	–	–	7	10	8	–
50	–	–	–	5	6	5

Таблица 16

Y	X					
	10	15	20	25	30	35
7	3	3	–	–	–	–
10	–	4	6	–	–	–
13	–	–	8	28	9	–
16	–	–	7	10	8	–
19	–	–	–	5	6	3

Таблица 17

Y	X					
	5	10	15	20	25	30
20	1	5	–	–	–	–
23	–	2	8	–	–	–
26	–	–	10	25	10	–
29	–	–	5	12	8	–
32	–	–	–	5	6	3

13 Лабораторная работа № 17. Основные понятия теории случайных процессов

Цель работы: изучить понятия теории случайных процессов.

Пусть Ω – пространство элементарных событий с исходами ω и пусть для каждого элементарного события ω определяется случайная функция времени $\xi(t)=\xi(t,\omega)$, $t\in T$. Такая совокупность функций называется ***случайным процессом***. Если T – счётное множество, то $\xi(t)$ называется случайным процессом ***с дискретным временем*** или ***случайной последовательностью*** (цепью). Если T – отрезок времени, то $\xi(t)$ называется случайным процессом ***с непрерывным временем***.

Функция распределения случайного процесса $\xi(t)$ при фиксированных t_1, t_2, …, t_n определяется равенством

$$F(x_1,...,x_n;t_1,...,t_n)=P\{\xi(t_1)<x_1,...,\xi(t_n)<x_n\} \tag{11}$$

для всех x_1, …, x_n из $\mathbb{R}$. Если функция (11) достаточное число раз дифференцируема, то n-мерная совместная плотность вероятностей случайного процесса $\xi(t)$ имеет вид:

$$f(x_1,...,x_n;t_1,...,t_n)=\frac{\partial^n F(x_1,...,x_n;t_1,...,t_n)}{\partial x_1...\partial x_n}. \tag{12}$$

Функция распределения (11) или плотность вероятности (12) тем полнее описывают сам случайный процесс, чем больше n. Случайный процесс считается заданным, если задано множество всех его n-мерных законов распределения для любых n.

Математическим ожиданием случайного процесса $\xi(t)$ называется функция

$$M\xi(t)=\int_{-\infty}^{\infty} xp(x,t)\,dx,$$

где $p(x,t)$ – одномерная плотность вероятностей случайного процесса $\xi(t)$.

Дисперсией случайного процесса $\xi(t)$ называется функция

$$D\xi(t) = M\left(\xi(t) - M\xi(t)\right)^2.$$

Корреляционная функция $K_\xi(t_1,t_2)$ случайного процесса $\xi(t)$ определяется равенством $K_\xi(t_1,t_2) = \operatorname{cov}(\xi(t_1),\xi(t_2))$.

Случайный процесс с постоянным математическим ожиданием и корреляционной функцией, зависящей только от разности аргументов, называется случайным процессом, ***стационарным в широком смысле***. Для стационарного случайного процесса $\xi(t)$, непрерывного по времени, спектральная плотность определяется равенством

$$S_\xi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_\xi(t)e^{-i\omega t}dt.$$

Если известна спектральная плотность $S_\xi(\omega)$, то в результате обратного преобразования Фурье можно найти корреляционную функцию $K_\xi(t)$. Для процессов с дискретным временем $t = n$, $n \in \mathbb{Z}$, спектральная плотность определяется дискретным преобразованием Фурье.

К основным случайным процессам относится ***марковский случайный процесс***, являющийся обобщением цепи Маркова, и, в частности, ***пуассоновский процесс***, широко используемый в теории массового обслуживания.

Контрольные вопросы

1 Что называется случайным процессом?
2 Какой случайный процесс называется стационарным?

Задачи для самостоятельного решения

1 Рассмотрим случайный процесс $\xi(t) = \omega\sin t$, $t \ge 0$, где ω – непрерывная случайная величина, равномерно распределённая на отрезке $[-1,1]$ с плотностью вероятности $p(x) = \frac{1}{2}$, $-1 \le x \le 1$. Найти математическое ожидание и корреляционную функцию случайного процесса $\xi(t)$.

2 Указать, какая из функций может быть корреляционной функцией $K_\xi(t)$ стационарного случайного процесса: а) постоянная функция; б) $\cos t$; в) $\begin{cases} 1, & |t| < 1, \\ 0, & |t| \ge 1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2, & t \le 0, \\ 0, & t > 0. \end{cases}$

3 Стационарный случайный процесс имеет корреляционную функцию: а) $e^{-a|t|}$, $a > 0$; б) $e^{-a^2t^2}$; в) $A + B\cos\omega t$; г) $e^{-a|t|}\cos\omega t$, $a > 0$. Определить соответствующие спектральные плотности распределения.

4 Найти спектральные плотности и корреляционные функции случайных процессов: а) $x(t) = e(t) + ae(t-1)$; б) $x(t) + ax(t-1) = e(t-1)$; в) $x(t) + ax(t-1) = e(t) + Ce(t-1)$, C – постоянная, где $e(t)$ ($t \in \mathbb{N}$) – независимые случайные величины, имеющие стандартное нормальное распределение, $|a| < 1$.

5 Пусть $\xi(t)$, $t \in T$ – марковский случайный процесс и $T_1 \subset T$. Доказать, что процесс $\xi(t)$, $t \in T_1$, тоже марковский.

6 Показать, что процесс $\xi(t)$, описываемый разностным уравнением $\xi(t+1) = a(t)\xi(t) + \omega(t)$, $t = 0,1,2,...$, – марковский. Здесь $a(t)$ – неслучайная последовательность чисел, а $\omega(t)$ – последовательность чисел, распределённая по стандартному нормальному закону.

Список литературы

1 **Белько, И. В.** Теория вероятностей и математическая статистика. Примеры и задачи / И. В. Белько, Г. П. Свирид. – Минск : Новое знание, 2002. – 250 с.

2 **Булдык**, **Г. М.** Теория вероятностей и математическая статистика / Г. М. Булдык. – Минск : Вышэйшая школа, 2009. – 284 с.

3 **Вентцель, Е. С.** Задачи и упражнения по теории вероятностей : учебное пособие / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. – 5-е изд., испр. – Москва : Академия, 2003. – 448 с.

4 **Герасимович, А. И**. Математическая статистика / А. И. Герасимович. – Минск : Вышэйшая школа, 1983. – 278 с.

5 **Гмурман, В. Е.** Теория вероятностей и математическая статистика : учебник для вузов / В. Е. Гмурман. – 12-е изд. – Москва : Юрайт, 2023. – 479 с.

6 **Гмурман, В. Е.** Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике : учебное пособие для вузов / В. Е. Гмурман. – 11-е изд., перераб. и доп. – Москва : Юрайт, 2023. – 406 с.

7 **Гурский, Е. И.** Сборник задач по теории вероятностей и математической статистике / Е. И. Гурский. – Минск : Вышэйшая школа, 1984. – 223 с.

8 Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций / Под ред. А. А. Свешникова. – Москва : Наука, 1965. – 632 с.