МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Высшая математика»

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА. МАТЕМАТИКА

Методические рекомендации к практическим занятиям для студентов всех специальностей и направлений подготовки дневной и заочной форм обучения

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЯ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ И МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Могилев 2023

УДК 517.5
ББК 22.161.5
В93

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Высшая математика» «27» апреля 2023 г., протокол № 8

Составители: ст. преподаватель А. Г. Козлов;
канд. физ.-мат. наук, доц. А. А. Романенко

Рецензент канд. физ.-мат. наук, доц. И. И. Маковецкий

Методические рекомендации содержат необходимые теоретические сведения по изучению темы «Дифференциальное и интегральное исчисления функций одной и многих переменных», примеры с решениями и примеры для самостоятельной работы.

Учебное издание

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА. МАТЕМАТИКА

Ответственный за выпуск В. Г. Замураев

Корректор А. А. Подошевко

Компьютерная верстка Н. П. Полевничая

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 56 экз. Заказ № .

Издатель и полиграфическое исполнение:
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 07.03.2019.
Пр-т Мира, 43, 212022, г. Могилев.

Содержание

1 Дифференциальное исчисление функции одной переменной

Производная функции. Пусть функция $y = f(x)$ определена на интервале (a, b). Выполним следующие действия:

– произвольной точке с координатой $x \in (a, b)$ придадим приращения Δx, получим точку $x + \Delta x \in (a, b)$;

– вычислим значения функции в этих точках и найдем разность $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$, которую называют приращением функции (рисунок 1);

– составим отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ и найдем его предел при $\Delta x \to 0$.

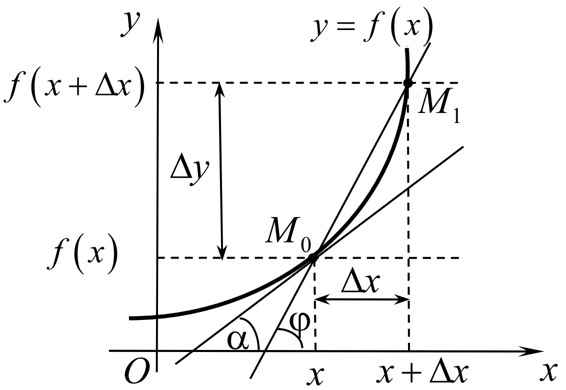

Рисунок 1

Если существует предел отношения $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ (приращения функции Δy к приращению аргумента Δx), когда $\Delta x \to 0$, то его называют производной функции $f(x)$ в точке x и обозначают $f'(x)$ или $\dfrac{df}{dx}$, $y'(x)$ или $\dfrac{dy}{dx}$, т. е.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Эта формула справедлива для любой точки x из области определения функции. Значение производной в точке, например, x_0 обозначают $f'(x_0)$ или $f'(x)\big|_{x_0}$; $y'(x_0)$ или $y'(x)\big|_{x_0}$. Операцию нахождения производной называют дифференцированием, а функцию, имеющую производную, дифференцируемой. Нахождение производной по определению называют непосредственным дифференцированием. На примере некоторых функции найдем производную по определению, т. е. непосредственно.

Пример 1 – Найти производную функций по определению.

Решение:

1) $y = x^3$. Функция определена на всей оси. Возьмем произвольные точки x и $x_1 = x + \Delta x$, где Δx – приращение аргумента. Найдем приращение функции Δy:

$$\Delta y = x_1^3 - x^3 = (x + \Delta x)^3 - x^3 = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x^3 =$$
$$= 3x_0^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3.$$

Теперь найдем предел $\left(x^3\right)' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x} = 3x^2$.

Доказано, что в общем случае для любой действительной степени x (натуральной, дробной и отрицательной) производная от степенной функции находится по формуле $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$. Так, например, при $n=-1$ имеем $\left(\frac{1}{x}\right)' = \left(x^{-1}\right)' = -1x_0^{-1-1} = -x_0^{-2} = -\frac{1}{x^2}$, при $n=1$ имеем $x' = \left(x^1\right)' = 1x^{1-1} = x^0 = 1$,

при $n=\frac{1}{2}$ имеем $\left(\sqrt{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$;

2) $y=\sin x$. Функция определена на всей оси. Возьмем произвольные точки x и $x_1 = x+\Delta x$. Найдем приращение функции Δy и соответствующий предел.

$$\Delta y = \sin x_1 - \sin x = \sin\left(x+\Delta x\right) - \sin x = 2\cos\left(x+\Delta x/2\right)\sin\left(\Delta x/2\right).$$

$$\left(\sin x\right)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\cos\left(x+\Delta x/2\right)\sin\left(\Delta x/2\right)}{\Delta x} = 2\cos\left(x\right)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\left(\Delta x/2\right)}{\Delta x} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= 2\cos x\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\left(\Delta x/2\right)}{2\cdot\left(\Delta x/2\right)} = \cos x.$$

Для справки: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\left(\Delta x/2\right)}{\left(\Delta x/2\right)} = 1$ – первый замечательный предел.

Получили $\left(\sin x\right)' = \cos x$.

На основании определения производной найдены производные **от основных элементарных функций** и составлена таблица таких производных (она приведена ниже), а нахождение производных от функций, полученных с помощью конечного числа алгебраических операций над **основными элементарными функциями**, основано на свойствах производной, которые называют **правилами дифференцирования** (они также приведены ниже). Уделим внимание сложной функции.

Производная сложной функции. Сложная функция – это функция от функции (вложение функций), например $y = f\left(\varphi\left(x\right)\right)$. Ее можно записать в виде $y = f\left(u\right)$, а $u = \varphi\left(x\right)$, где $f\left(u\right)$ и $\varphi\left(x\right)$– основные элементарные функции, производные от которых есть в таблице производных. В результате если функция $u=\varphi\left(x\right)$ имеет производную u'_x в точке x_0, а функция $y = f\left(u\right)$ имеет производную f'_u в точке $u_0 = \varphi\left(x_0\right)$, то сложная функция $y = f\left(\varphi\left(x\right)\right)$ имеет производную по x, которая находится по формуле $y'_x = f'_u\cdot u'_x$.

Заметим, что таких вложений может быть больше двух.

Таблица производных основных элементарных функций

1 $C' = 0$, $C = \text{const}$.

2 $\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha\, x^{\alpha-1}$ $(\alpha \in R)$.

В частности, при $\alpha = 1$ имеем $x' = 1$;

при $\alpha = -1$ имеем $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$;

при $\alpha = \dfrac{1}{2}$ имеем $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

3 $\left(a^x\right)' = a^x \cdot \ln a$ $(a > 0,\ a \neq 1)$, в частности, при $a = e$ имеем $\left(e^x\right)' = e^x$.

4 $\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x \ln a}$ $(a > 0,\ a \neq 1)$, в частности, при $a = e$ имеем $\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}$.

5 $\left(\sin x\right)' = \cos x$, для гиперсинуса $\left(\operatorname{sh} x\right)' = \operatorname{ch} x$.

6 $\left(\cos x\right)' = -\sin x$, для гиперкосинуса $\left(\operatorname{ch} x\right)' = \operatorname{sh} x$.

7 $\left(\operatorname{tg} x\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, для гипертангенса $\left(\operatorname{th} x\right)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$.

8 $\left(\operatorname{ctg} x\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$, для гиперкотангенса $\left(\operatorname{cth} x\right)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$.

9 $\left(\arcsin x\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$. 11 $\left(\operatorname{arctg} x\right)' = \dfrac{1}{1 + x^2}$.

10 $\left(\arccos x\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$. 12 $\left(\operatorname{arcctg} x\right)' = -\dfrac{1}{1 + x^2}$.

Правила дифференцирования (суммы, разности, произведения и частного).

Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – дифференцируемые функции, $C = \text{const}$, $v(x) \neq 0$. Тогда:

1) $\left(u \pm v\right)' = u' \pm v'$ – справедливо для любого конечного числа слагаемых;

2) $\left(uv\right)' = u'v + uv'$, в частности, $\left(Cu\right)' = Cu'$ – постоянный множитель можно выносить за знак производной;

3) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$, в частности, $\left(\dfrac{C}{v}\right)' = -\dfrac{Cv'}{v^2}$.

Производная сложной функции. Пусть $y = f\left(\varphi(x)\right)$, т. е. $y = f(u)$, а $u = \varphi(x)$, тогда $y'_x = f'_u \cdot u'_x$.

Примечание – Таблицу производных и правила дифференцирования следует **знать наизусть**.

Рассмотрим примеры по нахождению производных от функций, пользуясь таблицей производных и правилами дифференцирования.

Пример 2 – Найти производные функции.

Решение:

1) $y = 3x^2 - 4x + 7$. Дифференцируем, используя правило суммы (разности):

$$y' = \left(3x^2 - 4x + 7\right)' = \left(3x^2\right)' - \left(4x\right)' + \left(7\right)' = 3\left(x^2\right)' - 4\left(x\right)' + \left(7\right)' = 6x - 4;$$

2) $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} + x\sqrt{x}$. Имеем степенные функции, которые следует преобразовать к виду x^α, чтобы найти производные. Для этого воспользуется свойствами степенной функции, которые приведем в качестве справки:

а) $\dfrac{1}{x^n} = x^{-n}$, б) $x^n \cdot x^m = x^{n+m}$, в) $\left(x^n\right)^m = x^{n\cdot m}$, г) $\sqrt[m]{x^n} = x^{\frac{n}{m}}$, где $n, m \in Z$.

Преобразуем заданную функцию:

$$y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + x\sqrt{x} = \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} + x \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{-\frac{1}{3}} + x^{1+\frac{1}{2}} = x^{-\frac{1}{3}} + x^{\frac{3}{2}}.$$

Теперь дифференцируем, используя правило суммы (разности):

$$y' = \left(x^{-\frac{1}{3}} + x^{\frac{3}{2}}\right)' = \left(x^{-\frac{1}{3}}\right)' + \left(x^{\frac{3}{2}}\right)' = -\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}} + \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{3\sqrt[3]{x^4}} + \frac{3}{2}\sqrt{x};$$

3) $y = x^3 \cdot \operatorname{ctg} x$. Дифференцируем по правилу произведения:

$$y' = \left(x^3 \cdot \operatorname{ctg} x\right)' = \left(x^3\right)' \operatorname{ctg} x + x^3(\operatorname{ctg} x)' = 3x^2\operatorname{ctg} x - \frac{x^3}{\sin^2 x};$$

4) $y = \dfrac{\ln x}{x^3}$. Дифференцируем по правилу частного:

$$y' = \left(\frac{\ln x}{x^3}\right)' = \frac{(\ln x)'\, x^3 - \ln x\left(x^3\right)'}{\left(x^3\right)^2} = \frac{\frac{1}{x}x^3 - \ln x \cdot 3x^2}{x^6} = \frac{x^2 - 3x^2\ln x}{x^6} = \frac{1 - 3\ln x}{x^3};$$

5) $y = \sin x^3$. В данном случае имеем сложную функцию, которую представим в виде цепочки основных элементарных функций, производные от которых есть в таблице производных, т. е. $y = \sin u$, а $u = x^3$. Дифференцируем по правилу сложной функции:

$$y'_x = f'_u(u) \cdot u'_x(x) = \left(\sin u\right)'_u \cdot \left(x^3\right)'_x = \cos u \cdot 3x^2 = 3x^2\cos x^3;$$

6) $y=\sin^3 x$. Опять имеем сложную функцию $y=\sin^3 x=(\sin x)^3$. Представим ее в виде цепочки основных элементарных функций $y=u^3$, а $u=\sin x$. Дифференцируем:

$$y'_x=f'_u(u)\cdot u'_x(x)=(u^3)'_u\cdot(\sin x)'_x=3u^2\cdot\cos x=3\sin^2 x\cdot\cos x.$$

Примеры для самостоятельной работы

Найти производные функций:

1) $y=x\sqrt[4]{x}+\sqrt[3]{x^2}-\frac{1}{x}+5$;
2) $y=x^2\cdot 2^x$;
3) $y=\frac{x+1}{x-1}$;
4) $y=\operatorname{arctg}\sqrt{x}$;
5) $y=\cos^2 x$;
6) $y=\cos x^2$;
7) $y=\sqrt{4x^3-x^2+5}$;
8) $y=x\sqrt{x-1}$;
9) $y=e^{\cos x}$;
10) $y=\ln\sin x$;
11) $y=\arcsin\frac{1}{x}$;
12) $y=\ln\cos\operatorname{arctg} x$.

Геометрический смысл производной. Из рисунка 1 видно, что отношение $\Delta y/\Delta x=\operatorname{tg}\varphi$ представляет собой тангенс угла наклона секущей M_0M_1, его называют угловым коэффициентом секущей.

Касательная к кривой в точке M_0 есть предельное положение секущей M_0M_1, проходящей через точку M_0, когда точка M_1 неограниченно приближается к M_0, т. е. когда $\Delta x\to 0$.

Поскольку $\Delta y/\Delta x=\operatorname{tg}\varphi$, то $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\varphi\to\alpha}\operatorname{tg}\varphi=\operatorname{tg}\alpha$, т. е. $f'(x_0)=\operatorname{tg}\alpha=k$ есть угловой коэффициент касательной к кривой в точке M_0, где угол α есть угол, образованный касательной с положительным направлением оси Ox (см. рисунок 1).

Таким образом, производная функции $f(x)$ в точке x_0 равна угловому коэффициенту касательной, проведенной к графику функции в точке с координатами $M_0(x_0,y_0)$. В этом и состоит геометрический смысл производной.

Выводы. Поскольку $f'(x_0)=\operatorname{tg}\alpha=k$, то можно заключить, что:

– для возрастающих функций касательная образует острый угол с осью Ox, т. е. $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ и производная $f'(x)=\operatorname{tg}\alpha=k>0$ положительна;

– для убывающих функций касательная образует тупой угол с осью Ox, т. е. $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ и производная $f'(x)=\operatorname{tg}\alpha=k<0$ отрицательна;

– для неизменяющихся функций $f(x)=\text{const}$ касательная параллельна оси Ox, т. е. $\alpha=0$ или $\alpha=\pi$, а производная $f'(x)=\operatorname{tg}\alpha=k=0$ равна нулю. Верны также и обратные утверждения. Наглядно графически изображено на рисунке 2.

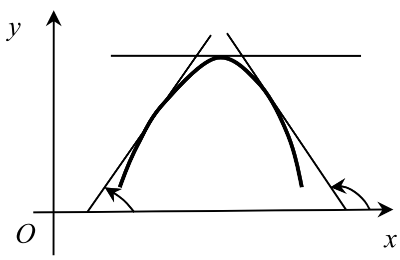

Рисунок 2

Общефизический смысл производной. Если функция $y = f(t)$ описывает какой-либо физический процесс, то отношение $\Delta y / \Delta t$ характеризует среднюю скорость протекания этого процесса за промежуток Δt, а $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta t} = y'(t)$ есть мгновенная скорость протекания этого процесса в момент времени t.

Уравнение касательной и нормали к плоской кривой. Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с координатами $M_0(x_0, y_0)$ имеет вид: $y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0)$.

Прямая, перпендикулярная касательной, проведенная через точку касания, называется нормалью. Ее уравнение: $y = y_0 - \dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$.

Пример 3 – Записать уравнения касательной и нормали к графику функции $y = x^2$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$.

Решение

Неизвестными в искомых уравнениях являются значения $y_0 = f(x_0)$ и $f'(x_0)$. Найдем их.

$$y_0 = f(x_0) = x_0^2 = 1^2 = 1; \qquad f'(x) = \left(x^2\right)' = 2x; \qquad f'(x_0) = 2x_0 = 2 \cdot 1 = 2.$$

Подставляем найденные значения в уравнения и получаем

$y = 1 + 2(x - 1)$ или $y = 2x - 1$ – уравнение касательной;

$y = 1 - \dfrac{1}{2}(x - 1)$ или $y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2}$ – уравнение нормали.

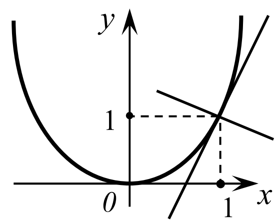

Рисунок 3

График функции, касательная и нормаль изображены на рисунке 3.

Примеры для самостоятельной работы

Записать уравнения касательной и нормали к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0:

1) $y = x^2 - 5x + 4$, $x_0 = -1$; 3) $y = \sqrt{x}$, $x_0 = 4$; 5) $y = e^{1-x^2}$, $x_0 = -1$;

2) $y = x^3 + 2x^2 - 4x - 3$, $x_0 = -2$; 4) $y = \ln x$, $x_0 = 1$; 6) $y = \mathrm{tg}\, 2x$, $x_0 = 0$.

Дифференциал функции, его геометрический смысл и свойства. Величина dy, изображенная на рисунке 4, является линейной (главной) частью приращения Δy функции $y = f(x)$, ее называют дифференциалом функции. Из рисунка 4 видно, что $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{dy}{\Delta x}$, а поскольку $\operatorname{tg}\alpha = f'(x)$, то можем записать $dy = f'(x)\Delta x$. Принято величину Δx называть дифференциалом независимой переменной и обозначать $dx = \Delta x$. В результате формула для дифференциала принимает вид:

$$dy = f'(x)dx.$$

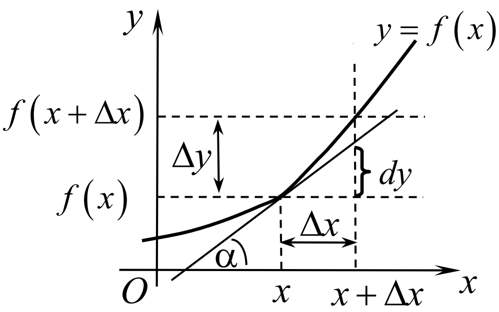

Рисунок 4

Таким образом, дифференциал функции $f(x)$ в некоторой точке x равен приращению ординаты касательной к графику функции, когда x получает приращение $\Delta x = dx$. Из определения дифференциала следует, что его свойства аналогичны свойствам производной. Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – дифференцируемые функции, $C = \text{const}$, $v(x) \neq 0$, Тогда:

1) $d(C) = C'dx = 0$;

2) $d(u \pm v) = du \pm dv$, в частности, $d(u \pm C) = du \pm dC = du$ – константу можно добавлять (вычитать) в выражении под знаком дифференциала;

3) $d(uv) = vdu + u\,dv$, в частности, $d(Cu) = C\,du$ – постоянный множитель можно выносить за знак дифференциала или подносить;

4) $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{vdu - u\,dv}{v^2}$, в частности, $d\left(\dfrac{C}{v}\right) = -\dfrac{C\,dv}{v^2}$.

Пример 4 – Записать дифференциал функции $y = \sin x - x\cos x + 4$.

Решение

Находим производную:

$$y' = f'(x) = (\sin x - x\cos x + 4)' = \cos x - \cos x + x\sin x = x\sin x.$$

Следовательно, $dy = f'(x)dx = x\sin x\,dx$.

Примеры для самостоятельной работы

Записать дифференциал функций:

1) $y = \ln x - x + 1$;	4) $y = e^{\cos x}$;	7) $y = xe^{x^2}$;
2) $y = x^2 \cdot \arcsin x$;	5) $y = \sqrt{1+x^2}$;	8) $y = \arcsin(1/x)$;
3) $y = \lg x / x^3$;	6) $y = \ln\sqrt{1-x^3}$;	9) $y = \operatorname{tg}^2 x$.

Производные высших порядков. Пусть функция $y=f(x)$ имеет производную $y'=f'(x)$, ее также называют производной первого порядка, или первой производной. А поскольку она также является функцией, то от нее снова можно брать производную. Эту производную называют производной второго порядка, или второй производной, и обозначают $y''=(y')'$ или $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$. Аналогично $(y'')'=y'''$ или $\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$ – производная третьего порядка, или третья производная. И т. д.

Пример 5 – Найти производную третьего порядка.

Решение:

1) $y=e^{3x}$. Находим первую производную $y'=\left(e^{3x}\right)'=e^{3x}(3x)'=3e^{3x}$. Находим вторую производную $y''=\left(3e^{3x}\right)'=3\left(e^{3x}\right)'=9e^{3x}$. Находим третью производную $y'''=27e^{3x}$;

2) $y=x\ln x$. Находим первую производную по правилу произведения $y'=(x\ln x)'=x'\ln x+x(\ln x)'=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=\ln x+1$. Находим вторую производную $y''=(\ln x+1)'=\frac{1}{x}$. Находим третью производную $y'''=\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$.

Примеры для самостоятельной работы

Найти производную второго порядка от функций:

1) $y=\cos^2 x$;	4) $y=\ln(x-1)$;	7) $y=x\,e^x$;
2) $y=\operatorname{arctg} x^2$;	5) $y=x^2\ln x$;	8) $y=\sqrt{x}$;
3) $y=e^{-x^2}$;	6) $y=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$;	9) $y=x\sqrt{x}$.

Применение производной к раскрытию неопределенностей при нахождении пределов. Правило Лопиталя. Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ дифференцируемы в окрестности некоторой точки x_0. Тогда

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}\overset{\textit{если}}{=}\left(\frac{0}{0}\right),\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\overset{\textit{то}}{=}\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}\overset{\textit{если}}{=}\left(\frac{0}{0}\right),\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\overset{\textit{то}}{=}\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{\varphi''(x)} \text{ и т. д.}$$

Для раскрытия неопределенностей $(0\cdot\infty), (\infty-\infty)$ их следует преобразовать к основным $(0/0)$ или (∞/∞), а затем применить правило Лопиталя.

Рассмотрим примеры по раскрытию указанных неопределенностей, используя правило Лопиталя.

Пример 6 – Найти пределы.

Решение:

1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x\ln x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)'}{(x\ln x)'}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{\ln x+1}=\dfrac{1}{\ln 1+1}=1$, поскольку $\ln 1=0$;

2) $$\lim_{x\to+0}\frac{\ln\sin x}{\ln x}=\left(\frac{-\infty}{-\infty}\right)=\lim_{x\to+0}\frac{(\ln\sin x)'}{(\ln x)'}=\lim_{x\to+0}\frac{\cos x/\sin x}{1/x}=\lim_{x\to+0}\frac{x\cos x}{\sin x}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+0}\frac{(x\cos x)'}{(\sin x)'}=\lim_{x\to+0}\frac{\cos x-x\sin x}{\cos x}=\frac{1}{1}=1;$$

3) $$\lim_{x\to+0}x\ln x=(0\cdot\infty)=\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{1/x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+0}\frac{(\ln x)'}{(1/x)'}=\lim_{x\to+0}\frac{1/x}{\left(-1/x^2\right)}=-\lim_{x\to+0}\frac{x^2}{x}=-\lim_{x\to+0}x=0;$$

4) $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\cdot\sin x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)'}{(x\cdot\sin x)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x+x\cos x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(\sin x+x\cos x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2\cos x-x\sin x}=\frac{0}{2\cdot 1-0}=0.$$

Примеры для самостоятельной работы

Найти пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{2x^2}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+x^2+3x+1}{x^3+2x^2+4x+5}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\pi/x}{\mathrm{ctg}(\pi x/2)}$;

5) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$;

6) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{5}{x^2-x-6}\right)$;

7) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\mathrm{tg}(\pi x/2)$;

8) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}$;

9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}\,x-\sin x}{x^3}$.

Применение производной к исследованию функций

Возрастание и убывание функций. На основании геометрического смысла производной было показано, что если функция на (a,b) возрастает, то $f'(x)>0$, а если убывает, то $f'(x)<0$. Верно и обратное. При этом если функция $f(x)$ возрастает или убывает на (a,b), то ее называют монотонной.

Локальный максимум и минимум функций. Точка x_0 называется точкой локального максимума (минимума) функции, если существует δ окрестность точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ в этой окрестности выполняются условия $f(x)<f(x_0)$ $\left(f(x)>f(x_0)\right)$ (рисунок 5). Значения функции в точках максимума (минимума) функции называют **максимумом (минимумом)** функции. Максимум и минимум функции называют одним словом «**экстремум**» функции.

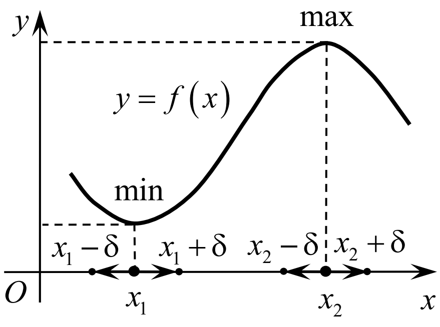

Рисунок 5

Необходимые условия существования экстремума. Из рисунка 5 видно, что смена характера поведения функции с возрастания на убывание или наоборот приводит к изменению знака производной. Это означает, что если дифференцируемая функция $y=f(x)$ имеет экстремум в точке x_i, то производная в этой точке равна нулю, т. е. $f'(x_i)=0$, а касательная паралельна оси Ox. **Однако обратное не всегда верно,** т. е. если $f'(x_i)=0$, то это не означает, что в точке x_i экстремум. В этой точке экстремум может быть, а может и не быть. Кроме того, в точке экстремум может быть, а производная не существует $(\nexists)$ (функция не дифференцируемая) или равна $\pm\infty$. Так, например, для функций $f(x)=x^3$. Имеем $f'(x)=3x^2=0$ при $x=0$. Однако, как видно из графика (рисунок 6, *а*), точка $x=0$ не является точкой экстремума. Для функции $f(x)=|x|$ в точке $x=0$ экстремум есть минимум (рисунок 6, *б*), а функция $f(x)=|x|$ в точке $x=0$ не имеет производной, поскольку через точку с координатой $x=0$ можно провести бесконечно много касательных. Пример с $f'(x)=\pm\infty$ приведем ниже.

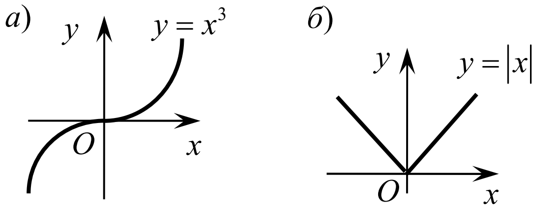

Рисунок 6

Вывод: непрерывная функция может иметь экстремум лишь в точках, в которых производная $f'(x)$ равна нулю или бесконечности или она не существует. Эти точки называют критическими точками (точками возможного экстремума).

Для однозначного определения наличия экстремума в критических точках формулируются так называемые достаточные условия, которые позволяют ответить на вопрос о его существовании и характере.

Достаточное условие существования экстремума. Если непрерывная функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности критической точки x_i и при переходе через нее (слева направо) производная $f'(x)$ меняет знак с «–» на «+», то x_i – точка минимума, если с «+» на «–», то x_i – точка максимума. Наглядное геометрическое доказательство видно из рисунка 7.

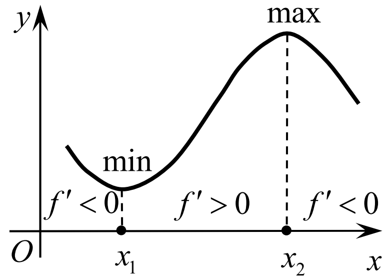

Рисунок 7

Из изложенного следуют ***правила исследования функции на экстремум, промежутки возрастания и убывания***.

1 Из необходимых условий $f'(x) = 0, \pm\infty, \nexists$ найти критические точки.

2 Исследовать знак производной $f'(x)$ слева и справа от каждой из найденных критических точек.

3 В соответствии с достаточными условиями установить наличие экстремума и его характер.

4 Вычислить значения функции в критических точках и схематически построить график функции.

Рассмотрим примеры по нахождению экстремумов и промежутков монотонности функций.

Пример 7 – Найти экстремумы, промежутки возрастания и убывания функций.

Решение:

1) $y = \dfrac{x}{3} - \sqrt[3]{x^2}$. Функция определена на всей числовой оси. Найдем производную и преобразуем ее:

$$y' = \left(\frac{x}{3} - \sqrt[3]{x^2}\right)' = \left(\frac{x}{3} - x^{\frac{2}{3}}\right)' = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} - \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} = \frac{1}{3}\frac{\sqrt[3]{x} - 2}{\sqrt[3]{x}}.$$

Ищем точки, в которых $y' = 0$, т. е. $\dfrac{1}{3}\dfrac{\sqrt[3]{x} - 2}{\sqrt[3]{x}} = 0 \Rightarrow \sqrt[3]{x} - 2 = 0 \Rightarrow x = 8$.

Ищем точки, в которых $y' = \infty$, т. е. $\dfrac{1}{3}\dfrac{\sqrt[3]{x} - 2}{\sqrt[3]{x}} = \infty \Rightarrow \sqrt[3]{x} = 0 \Rightarrow x = 0$.

Точки, в которых производная не существует, отсутствуют.

Имеем две критические точки: $x_1 = 0$ и $x_2 = 8$. Отмечаем их на числовой оси (рисунок 8). Точки разбивают область определения на три интервала $(-\infty, 0) \cup (0, 8) \cup (8, \infty)$. Исследуем знак первой производной $f'(x)$ слева и справа от каждой из критических точек. Для этого возьмем по одному значению x из каждого интервала, подставим в выражение для производной и определим ее знак.

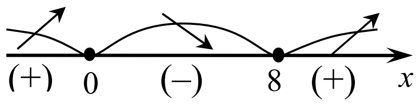

Рисунок 8

Для интервала $(-\infty,0)$. Пусть $x=-1$, тогда $y'(-1)>0$. Следовательно, функция в интервале $(-\infty,0)$ возрастает. Для интервала $(0,8)$. Пусть $x=2$, тогда $y'(2)<0$. Следовательно, функция в интервале $(0,8)$ убывает.

Производная при переходе точки $x_1=0$ слева направо меняет знак с плюса на минус. Следовательно, в точке $x_1=0$ функция имеет максимум. Вычислим значение функции в ней: $f_{\max}=f(0)=0$.

Для интервала $(8,\infty)$. Пусть $x=27$ тогда $y'(27)>0$. Следовательно, функция в интервале $(8,\infty)$ возрастает.

Производная при переходе точки $x_2=8$ слева направо меняет знак с минуса на плюс. Следовательно, в точке $x_2=8$ функция имеет минимум. Вычислим значение функции в ней: $f_{\min}=\ f(8)=8/3-\sqrt[3]{8^2}=-4/3$. Схематически построим график (рисунок 9);

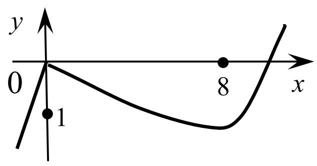

Рисунок 9

2) $y=\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{x^2}{2}$. Функция определена на всей числовой оси. Находим производную: $y'=\left(x^4/4-x^2/2\right)'=x^3-x$. Ищем точки, в которых $y'=0$, т. е. $x^3-x=0 \;\Rightarrow\; x\left(x^2-1\right)=0 \;\Rightarrow\; x=0,\;\; x=\pm1$. Точек, в которых $y'=\infty$ или которых не существует, нет.

Имеем три критические точки: $x_1=-1$, $x_2=0$, $x_3=1$. Отмечаем их на числовой оси (рисунок 10). Точки разбивают область определения на четыре интервала: $(-\infty,-1)\cup(-1,0)\cup(0,1)\cup(1,\infty)$. Исследуем знак первой производной $y'(x)$ слева и справа от каждой из критических точек.

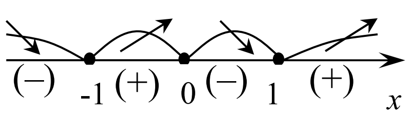

Рисунок 10

Для интервала $(-\infty,-1)$. Пусть $x=-2$, тогда $y'(-2)<0$. Функция в интервале $(-\infty,-1)$ убывает. Для интервала $(-1,0)$. Пусть $x=-0{,}5$, тогда $y'(-0{,}5)>0$. Функция в интервале $(-1,0)$ возрастает.

Производная при переходе точки $x_1=-1$ слева направо меняет знак с «–» на «+». Следовательно, в точке $x_1=-1$ функция имеет минимум. Вычислим значение функции в ней: $f_{\min}=f(-1)=-0{,}25$.

Для интервала $(0,1)$. Пусть $x=0,5$, имеем $y'(0,5)<0$. Следовательно, функция в интервале $(0,1)$ убывает.

Производная при переходе точки $x_2=0$ слева направо меняет знак с «+» на «–». Следовательно, в точке $x_2=0$ функция имеет максимум. Вычислим значение функции в ней: $f_{\max}=f(0)=0$.

Для интервала $(1,\infty)$. Пусть $x=2$, тогда $y'(2)>0$. Функция в интервале $(1,\infty)$ возрастает.

Производная при переходе точки $x_3=1$ слева направо меняет знак с «–» на «+». Следовательно, в точке $x_3=1$ функция имеет минимум. Вычислим значение функции в ней: $f_{\min}=f(1)=-0,25$. Схематически построим график (рисунок 11);

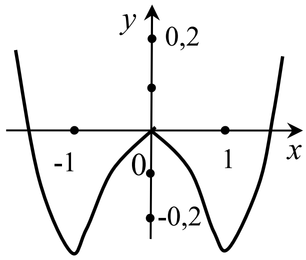

Рисунок 11

3) $y=x-\operatorname{arctg}x$. Функция определена на всей числовой оси. Находим производную $y'=(x-\operatorname{arctg}x)'=1-\dfrac{1}{1+x^2}$. Ищем точки, в которых $y'=0$, т. е. $1-\dfrac{1}{1+x^2}=0 \Rightarrow 1+x^2=1 \Rightarrow x=0$. Точек, в которых $y'=\infty$ или которых не существует нет. Имеем одну критическую точку $x_0=0$. Отметим ее на числовой оси (рисунок 12). Точка разбивает область определения функции на два интервала $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$. Исследуем знак производной $y'(x)$ слева и справа от нее.

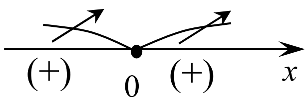

Рисунок 12

Для интервала $(-\infty,0)$. Пусть $x=-1$, тогда $y'(-1)>0$. Функция в интервале $(-\infty,0)$ возрастает.

Для интервала $(0,\infty)$. Пусть $x=1$, тогда $y'(1)>0$. Функция в интервале $(0,\infty)$ возрастает.

Производная при переходе точки $x_0=0$ слева направо **не меняет знак**. Следовательно, в точке $x_0=0$ **экстерума нет**, т. е. функция монотонно возрастает во всей области определения от $-\infty$ до $+\infty$.

Примеры для самостоятельной работы

Найти промежутки возрастания, убывания и точки экстремума функций:

1) $y=xe^{x^2}$;	4) $y=\dfrac{x}{\ln x}$;	7) $y=x-2\ln x$;	10) $y=x\sqrt{1-x^2}$;
2) $y=x-2\sin x$;	5) $y=e^x/x$;	8) $y=\ln x-\operatorname{arctg}x$;	11) $y=(x-2)\sqrt[3]{x^2}$;
3) $y=x\ln^2 x$;	6) $y=\dfrac{2x^2-1}{x^4}$;	9) $y=-3x^4+6x^2$;	12) $y=x+\operatorname{arcctg}x$.

2 Интегральное исчисление функции одной переменной

Неопределенный интеграл (НИ). В дифференциальном исчислении решается задача: по данной функции $f(x)$ найти ее производную $f'(x)$ или дифференциал $df = f'(x)dx$. В интегральном исчислении решается обратная задача: найти функцию $F(x)$, зная ее производную $F'(x) = f(x)$. Искомую функцию $F(x)$ называют **первообразной** для $f(x)$. Очевидно, что первообразной для $f(x)$ будет также функция $F(x)+C$, где $C = \text{const}$, поскольку $\left(F(x)+C\right)' = F'(x)+C' = f(x)+0 = f(x)$. Точнее, $F(x)+C$ – это множество первообразных, поскольку постоянная C не определена. Например, для функции $f(x) = x$ множество первообразных есть $F(x) = x^2/2 + C$, для функции $f(x) = x^2$ имеем $F(x) = x^3/3 + C$, для $f(x) = \cos x$ имеем $F(x) = \sin x + C$ и т. д.

Множество всех первообразных $F(x)+C$ для $f(x)$ называют неопределенным интегралом и обозначают $\int f(x)dx$.

Таким образом, $\int f(x)dx = F(x)+C$, где $\left(F(x)+C\right)' = f(x)$. При этом функцию $f(x)$ называют подынтегральной функцией, $f(x)dx$ – подынтегральным выражением, x – переменной интегрирования, dx – дифференциалом независимой переменной, символ $\int$ – знак НИ. Операцию нахождения НИ называют интегрированием.

Условие существования НИ. Всякая непрерывная на (a,b) функция $f(x)$ имеет на этом промежутке первообразную, т. е. неопределенный интеграл от нее существует.

Свойства НИ:

1) $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$;

2) $\int dF(x) = F(x)+C$ (НИ от дифференциала некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной);

3) $\int a f(x)dx = a\int f(x)dx$, где $a = \text{const}$ (постоянный множитель можно выносить за знак НИ);

4) $\int\left(f(x) \pm g(x)\right)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$ (НИ от суммы, разности двух функций равен сумме, разности НИ от этих функций);

5) если $\int f(x)dx = F(x)+C$, то $\int f(u)du = F(u)+C$, где $u = \varphi(x)$ (формула НИ остается справедливой независимо от того, является ли переменная интегрирования независимой переменной или любой функцией от нее, имеющей непрерывную производную). Это свойство называют свойством **неизменности (инвариантности)** формулы интегрирования.

Поскольку интегрирование есть действие, обратное дифференцированию, то можем записать таблицу НИ от основных элементарных функций путем обращения соответствующих формул таблицы производных.

Таблица неопределенных интегралов от основных элементарных функций:

1) $\int 0dx = C$, $C = \text{const}$;

2) $\int x^{\alpha} dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1, \alpha \in R)$.

В частности, при $\alpha = 0$ имеем $\int 1dx = x + C$,

при $\alpha = -\dfrac{1}{2}$ имеем $\int \dfrac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + C$,

при $\alpha = -2$ имеем $\int \dfrac{1}{x^2} dx = -\dfrac{1}{x} + C$;

3) $\int \dfrac{1}{x} dx = \ln|x| + C$;

4) $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$. При $a = e$, $\int e^x dx = e^x + C$, поскольку $\ln e = 1$;

5) $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$;

6) $\int \cos x\, dx = \sin x + C$;

7) $\int \dfrac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$;

8) $\int \dfrac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C$;

9) $\int \dfrac{1}{x^2 + a^2} dx = \dfrac{1}{a} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{a} + C = -\dfrac{1}{a} \operatorname{arcctg} \dfrac{x}{a} + C$.

В частности, при $a = 1$ имеем $\int \dfrac{1}{x^2 + 1} dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C$;

10) $\int \dfrac{1}{x^2 - a^2} dx = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C$;

11) $\int \dfrac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \dfrac{x}{a} + C = -\arccos \dfrac{x}{a} + C$.

В частности, при $a = 1$ имеем $\int \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C$;

12) $\int \dfrac{1}{\sqrt{x^2 \pm a}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a}\right| + C$;

13) $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \dfrac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \dfrac{a^2}{2} \arcsin \dfrac{x}{a} + C$.

Примечание – Таблицу интегралов и свойства НИ следует **знать наизусть**.

Основные методы и приемы интегрирования. Суть всех методов и приемов интегрирования заключается в том, чтобы свести интеграл к табличному. В связи с этим актуальным является **знание наизусть свойств НИ и таблицы НИ** от основных элементарных функций, чтобы знать или предполагать, как и к какому(им) интегралу(ам) сводить. В интегральном исчислении нет универсальных правил отыскания первообразных. Рассмотрим основные методы и приемы интегрирования и дадим некоторые рекомендации. Заметим, что интегрирование может быть осуществлено не единственным образом. Результат интегрирования проверяется дифференцированием.

Непосредственное интегрирование. Под ним понимается приведение НИ к табличному или табличным путем преобразования подынтегральной функции и использования свойств НИ. Подробности на примерах.

Пример 1 – Найти НИ.

Решение:

1) $$\int\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2 dx=\int\left(\left(\sin\frac{x}{2}\right)^2+\left(\cos\frac{x}{2}\right)^2+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right)dx=\int(1+\sin x)dx=$$
$$=\int 1dx+\int\sin x\,dx=x-\cos x+C.$$

Проверка: $\left(F(x)+C\right)'=\left(x-\cos x+C\right)'=1+\sin x=f(x)$;

2) $$\int 2^x\cdot 3^{2x}dx=\int 2^x\cdot\left(3^2\right)^x dx=\int\left(2\cdot 3^2\right)^x dx=\int 18^x dx=\frac{18^x}{\ln 18}+C;$$

3) $$\int\frac{\sqrt{x}+1-\sqrt[3]{x}}{x}dx=\int\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x}-x^{-\frac{2}{3}}\right)dx=\int\frac{1}{\sqrt{x}}dx+\int\frac{1}{x}dx-\int x^{-\frac{2}{3}}dx=$$
$$=2\sqrt{x}+\ln x-\frac{x^{(-2/3)+1}}{(-2/3)+1}=2\sqrt{x}+\ln x-3\sqrt[3]{x}+C;$$

4) $$\int\sin^2\frac{x}{2}dx=\left|\sin^2\alpha=\frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)\right|=\frac{1}{2}\int(1-\cos x)\,dx=\frac{1}{2}(x-\sin x)+C.$$

Интегрирование подстановкой (заменой переменной). Суть метода заключается во введении новой переменной, после чего интеграл с новой переменной может быть табличным или сводится к табличным. Пусть требуется найти НИ $\int f(x)dx$, который не является табличным. Переменную x заменяем на некоторую функцию $x=\varphi(t)$, которая должна быть строго монотонной и иметь непрерывную производную. Соответственно, $dx=d\left(\varphi(t)\right)=\varphi'(t)dt$. В результате получаем формулу замены переменной в НИ:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int \psi(t)dt.$$

После нахождения интеграла по переменной t следует вернуться к переменной x по формуле $t=\varphi^{-1}(x)$, т. е. найдя обратную функцию.

Замечание – Общих методов выбора подстановки нет. Умение выбирать подстановку приобретается многократными упражнениями, т. е. практикой.

Пример 2 – Найти НИ.

Решение:

1) $\int \cos(2x+1)\,dx = \left| 2x+1=t,\ x=\frac{1}{2}(t-1),\ dx=\left(\frac{1}{2}(t-1)\right)'_t dt=\frac{1}{2}dt \right| =$

$$=\frac{1}{2}\int \cos t\,dt = \frac{1}{2}\sin t + C = |t=2x+1| = \frac{1}{2}\sin(2x+1)+C.$$

Проверка: $\left(F(x)+C\right)' = \left(\frac{1}{2}\sin(2x+1)+C\right)' = \cos(2x+1) = f(x)$;

2) $\int \sqrt{x-3}dx = \left| x-3=t,\ x=t+3,\ dx=(t+3)'_t dt = dt \right| = \int \sqrt{t}dt = \int t^{\frac{1}{2}}dt =$

$$=\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+C = |t=x-3| = \frac{2}{3}\sqrt{(x-3)^3}+C;$$

3) $\int e^{\frac{x}{4}}dx = \left| \frac{x}{4}=t,\quad x=4t,\quad dx=(4t)'_t dt=4dt \right| = 4\int e^t dt = 4e^t+C = 4e^{\frac{x}{4}}+C$;

4) $\int \frac{1}{9x^2+1}dx = \int \frac{1}{(3x)^2+1}dx = \left| 3x=t,\quad x=\frac{t}{4},\quad dx=\left(\frac{t}{4}\right)'_t dt = \frac{1}{4}dt \right| =$

$$=\frac{1}{3}\int \frac{1}{t^2+1}dx = \frac{1}{3}\operatorname{arctg} t = |\ t=3x| = \frac{1}{3}\operatorname{arctg} 3x + C.$$

Примеры для самостоятельной работы

Найти НИ:

1) $\int \frac{1}{2x-5}dx$;

2) $\int (3x+5)^{99}dx$;

3) $\int \frac{1}{(7x+1)^2}dx$;

4) $\int \frac{1}{\sqrt{3x+1}}dx$;

5) $\int \frac{1}{(2x-1)^5}dx$;

6) $\int \sqrt[3]{5x+2}\,dx$;

7) $\int \sin(3x+5)\,dx$;

8) $\int e^{2x+3}dx$;

9) $\int 2^{3x}dx$;

10) $\int \frac{1}{\cos^2(x-3)}dx$;

11) $\int \frac{1}{4x^2+1}dx$;

12) $\int \frac{1}{\sqrt{1-9x^2}}dx$.

Прием интегрирования путем подведения подынтегральной функции или ее части под знак дифференциала. Напомним одно из свойств НИ, а именно свойство неизменности формулы интегрирования.

Если $\int f(x)dx = F(x) + C$ табличный, то $\int f(u)du = F(u) + C$, где $u = \varphi(x)$ – некоторая дифференцируемая функция x.

Пусть требуется найти интеграл $\int \psi(x)dx$, который не является табличным. Суть приема заключается в том, чтобы в подынтегральном выражении $\psi(x)dx$ в качестве множителя выделить дифференциал некоторой функции $u = \varphi(x)$, т. е. $du = \varphi'(x)dx$, и подынтегральное выражение $\psi(x)dx$ представить в виде $\psi(x)dx = f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = f(u)du$, где $u = \varphi(x)$. После чего интеграл $\int f(u)du$ должен стать табличным или сводится к нему. Найдя первообразную $F(u)$, следует вернуться к переменной x по формуле $u = \varphi(x)$, т. е. получить $F(\varphi(x))$.

Замечание – При интегрировании путем подведения под знак дифференциала используют свойство дифференциала. Например:

$$dx = \frac{1}{a}d(ax+b),\ \ xdx = \frac{1}{2}d(x^2),\ \ x^2dx = \frac{1}{3}d(x^3),\ \ \frac{1}{x^2}dx = -d\left(\frac{1}{x}\right),\ \ \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2d\left(\sqrt{x}\right),$$

$$\frac{1}{x}dx = d(\ln x),\ \ \cos x\,dx = d(\sin x),\ \ \sin x\,dx = -d(\cos x),\ \ \frac{1}{\cos^2 x}dx = d(\operatorname{tg} x) \text{ и т. д.}$$

Пример 3 – Найти НИ.

Решение:

1) $$\int \cos(2x+1)\,dx = \left|dx = \frac{1}{2}d(2x+1)\right| = \int \cos(2x+1)\ \frac{1}{2}d(2x+1) = |2x+1 = u| =$$

$$= \frac{1}{2}\int \cos u\,du = \frac{1}{2}\sin u + C = |u = 2x+1| = \frac{1}{2}\sin(2x+1) + C.$$

Видно, что в качестве функции u здесь выступает $u = 2x+1$. Этот интеграл мы нашли ранее методом замены переменной;

2) $$\int xe^{x^2}\,dx = \left|x\,dx = \frac{1}{2}d(x^2)\right| = \frac{1}{2}\int e^{x^2}\,dx^2 = |x^2 = u| = \frac{1}{2}\int e^u\,du =$$

$$= \frac{1}{2}e^u + C = |u = x^2| = \frac{1}{2}e^{x^2} + C;$$

3) $$\int e^{\cos x}\sin x\,dx = |\sin x\,dx = -d(\cos x)| = -\int e^{\cos x}\,d(\cos x) = |\cos x = u| =$$

$$= -\int e^u\,du = -e^u + C = |u = \cos x| = -e^{\cos x} + C;$$

4) $\int \frac{x^2}{\cos^2 x^3}\,dx = \left| x^2 dx = \frac{1}{3} d\left(x^3\right) \right| = \frac{1}{3}\int \frac{dx^3}{\cos^2 x^3}\,dx = \frac{1}{3} tg\ x^3 + C$;

5) $\int \frac{\operatorname{arctg}^5 x}{1+x^2}\,dx = \left| \frac{1}{1+x^2}dx = d\left(\operatorname{arctg} x\right) \right| = \int \operatorname{arctg}^5 x\, d\left(\operatorname{arctg} x\right) = \frac{\operatorname{arctg}^6 x}{6} + C$;

6) $\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \int \ln x \,\frac{1}{x}\,dx = \left| \frac{1}{x}dx = d\left(\ln x\right) \right| = \int \ln x\, d\left(\ln x\right) = \frac{\ln^2 x}{2} + C$;

7) $\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = \left| \sin x\,dx = -d\left(\cos x\right) \right| = -\int \frac{1}{\cos x}\,d\left(\cos x\right) = -\ln\left|\cos x\right| + C$.

Замечание – Из приведенных примеров видно, что замена переменной и прием подведения под знак дифференциала – эквивалентные операции. Но не всегда можно легко угадать подстановку, а подведение под знак дифференциала часто очевидно.

Примеры для самостоятельной работы

Найти НИ:

1) $\int x^2 e^{x^3}\,dx$; 4) $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$; 7) $\int \frac{xdx}{1+x^2}$; 10) $\int \frac{\arcsin^2 x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$;

2) $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\,dx$; 5) $\int \frac{dx}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x}$; 8) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2-1}}$; 11) $\int e^{\sin x}\cos x\,dx$;

3) $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx$; 6) $\int \operatorname{ctg} x\,dx$; 9) $\int \frac{\sin\left(\ln x\right)}{x}\,dx$; 12) $\int \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x}\,dx$.

Интегрирование по частям. Пусть $u = u\left(x\right)$ и $v = v\left(x\right)$ – непрерывные функции, имеющие непрерывные производные. Тогда

$$\int udv = u \cdot v - \int vdu.$$

Эту формулу называют формулой интегрирования по частям. Она дает возможность нахождения интеграла $\int udv$ свести к нахождению интеграла $\int vdu$. Суть ее в том, что при удачном разбиении подынтегрального выражения на части u и dv второй интеграл должен быть проще.

Укажем некоторые часто встречающие типы интегралов, которые следует находить по частям, и дадим рекомендации к выбору u и dv.

1 В интегралах вида $\int P_n\left(x\right) e^{kx} dx$, $\int P_n\left(x\right) \cos kx\,dx$, $\int P_n\left(x\right) \sin kx\,dx$, где $P_n\left(x\right)$ – многочлен, k – число, в качестве u следует брать $P_n\left(x\right)$, а в качестве dv – все остальное, т. е. $u = P_n\left(x\right)$, $dv = e^{kx}dx$, $dv = \cos kx\,dx$, $dv = \sin kx\,dx$. При этом формулу интегрирования по частям следует применять n раз.

2 В интегралах вида $\int P_n(x)\arcsin kx\,dx$, $\int P_n(x)\arccos kx\,dx$, $\int P_n(x)\ln kx\,dx$, $\int P_n(x)\operatorname{arctg} kx\,dx$, $\int P_n(x)\operatorname{arcctg} kx\,dx$ в качестве dv следует брать $P_n(x)dx$, а в качестве u – все остальное, т. е. $dv = P_n(x)dx$, $u = \arcsin kx$, $u = \arccos kx$, $u = \ln kx$, $u = \operatorname{arctg} kx$, $u = \operatorname{arcctg} kx$.

Пример 4 – Найти НИ.

Решение:

$$1)\ \int (2x+5)e^{3x}\,dx = \left| \begin{matrix} u = 2x+5 & du = 2dx \\ dv = e^{3x}dx & v = \int e^{3x}dx = \dfrac{1}{3}e^{3x} \end{matrix} \right| = \frac{1}{3}(2x+5)e^{3x} - \frac{2}{3}\int e^{3x}dx =$$

$$= \frac{1}{3}(2x+5)e^{3x} - \frac{2}{9}e^{3x} + C = \frac{4}{9}(x+2)e^{3x} + C;$$

$$2)\ \int x\ln x\,dx = \left| \begin{matrix} u = \ln x & du = \dfrac{1}{x}dx \\ dv = xdx & v = \int xdx = \dfrac{x^2}{2} \end{matrix} \right| = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x}x^2dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C.$$

Примеры для самостоятельной работы

Найти НИ:

1) $\int x^2e^x\,dx$; 3) $\int (x+1)\cos 2x\,dx$; 5) $\int \operatorname{arctg} x\,dx$;

2) $\int (x^2+1)\sin x\,dx$; 4) $\int x^2\ln x\,dx$; 6) $\int \arcsin x\,dx$.

Примечание – Мы рассмотрели основные приемы и методы нахождения НИ, которые показывают, что операция интегрирования функций значительно сложнее операции дифференцирования. В связи с этим отметим, что успехи в интегрировании зависят от знания рекомендованных приемов, сообразительности и тренированности, навыки приобретаются путем многократных упражнений. Далее рассмотрим два вида интегралов, которые часто встречаются в различных приложениях.

Интегрирование функций, содержащих квадратный трехчлен. Рассмотрим интегралы вида $\int \dfrac{mx+n}{x^2+px+q}dx$, $\int \dfrac{(mx+n)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$.

Такие интегралы находятся с помощью выделения полного квадрата в квадратном трехчлене $ax^2+bx+c = a\left(\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 + \dfrac{4ac-b^2}{4a^2}\right)$ и подстановки $x+\dfrac{b}{2a} = t$. Подробности – на примерах.

Пример 5 – Найти НИ.

Решение:

1) $\int \frac{3x+1}{x^2+2x+10}dx = \left| x^2+2x+1+9=(x+1)^2+3^2 \right| = \int \frac{3x+1}{(x+1)^2+3^2}dx =$

$$= \left| x+1=t,\ x=t-1,\ dx=dt \right| = \int \frac{3t-2}{t^2+3^2}dt = 3\int \frac{tdt}{t^2+3^2} - 2\int \frac{1}{t^2+3^2}dt = \otimes .$$

Видно, что второй интеграл является табличным, а для первого воспользуемся приемом подведения под знак дифференциала, а именно $tdt = \frac{1}{2}d\left(t^2+3^2\right)$. Теперь продолжаем:

$$\otimes = \frac{3}{2}\int \frac{d\left(t^2+3^2\right)}{t^2+3^2} - \frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{t}{3} = \frac{3}{2}\ln\left(t^2+3^2\right) - \frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{t}{3} + C,$$

где $t = x+1$;

2) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+5}} = \left| x^2+4x+4+1=(x+2)^2+1 \right| = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2+1}} = \left| \begin{matrix} x+2=t \\ dx=dt \end{matrix} \right| =$

$$= \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} = \frac{1}{2}\ln\left| t+\sqrt{t^2+1} \right| + C,$$

где $t = x+2$.

Примеры для самостоятельной работы

Найти НИ:

1) $\int \frac{1}{x^2+2x-3}dx$;

2) $\int \frac{dx}{x^2+4x+8}$;

3) $\int \frac{1}{-x^2-6x+7}dx$;

4) $\int \frac{x-1}{x^2+4x+13}dx$;

5) $\int \frac{x+1}{-x^2-6x+7}dx$;

6) $\int \frac{x+3}{x^2+6x-7}dx$;

7) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+6}}$;

8) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+9x+1}}$;

9) $\int \frac{dx}{\sqrt{6-2x-x^2}}$.

Примечание – Более подробную информацию о типах интегралов и рекомендаций по их нахождению можно найти в [1–4]. Для наиболее часто встречающихся интегралов составлены справочники, которые можно найти в библиотеках и сети Интернет. В частности, «Таблицы интегралов» Г. Б. Двайт, «Таблицы интегралов» А. П. Прудников и т. д.

Известно, что условием существования НИ является непрерывность подынтегральной функции. Если первообразная найдена в виде элементарной функции, то говорят, что интеграл «берется». Однако существуют интегралы первообразные, которых не выражаются через элементарные функции. В таких случаях говорят, что интеграл «не берется», и его называют «неберущимся». Приведем примеры некоторых «неберущихся» интегралов, которые часто встречаются в различных приложениях: $\int e^{\pm x^2}dx$; $\int \cos x^2 dx$; $\int \sin x^2 dx$; $\int \frac{\sin x}{x}dx$; $\int \frac{\cos x}{x}dx$; $\int \frac{e^x}{x}dx$; $\int \frac{1}{\ln x}dx$ и др.

Определенный интеграл (ОИ). Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a,b]$. Выполним следующие действия.

1 С помощью точек $x_0 = a, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n = b$ отрезок $[a,b]$ произвольным образом разобьем на n частей (рисунок 13).

2 На каждом частичном отрезке $\left[x_{i-1}, x_i\right]$ произвольным образом выберем точку c_i, вычислим значение функции в ней, т. е. $f(c_i)$, умножим это значение на длину частичного отрезка $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, т. е. $f(c_i)\cdot\Delta x_i$, и составим сумму всех всех таких произведений $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\cdot\Delta x_i$, которую называют интегральной.

3 Обозначим через λ длину наибольшего частичного отрезка, т. е. $\lambda = \max\left\{\Delta x_i\right\}$, и вычислим предел интегральной суммы при $n \to \infty$ $(\lambda \to 0)$.

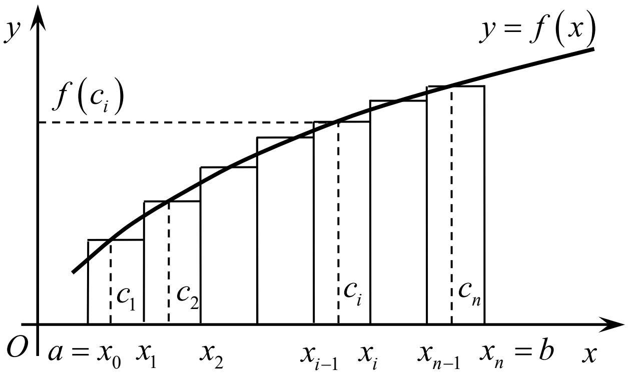

Рисунок 13

Если существует конечный предел интегральной суммы S_n, который не зависит ни от способа разбиения отрезка $[a,b]$ на частичные, ни от выбора точек c_i в них, то этот предел называют определенным интегралом от функции $y = f(x)$ на отрезке $[a,b]$ и обозначают

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \lambda\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\cdot\Delta x_i .$$

Числа a и b называются нижним и верхним пределами интегрирования соответственно, а отрезок $[a,b]$ – областью интегрирования. Если функция $f(x)$ ограничена и непрерывна на $[a,b]$, за исключением конечного числа точек разрыва I рода, то ОИ существует.

Геометрический смысл ОИ. Фигуру, ограниченную графиком функции $y = f(x)$, осью Ox и прямыми $x = a$, $x = b$ называют криволинейной трапецией (см. рисунок 13). Из определения ОИ следует, что если $f(x) > 0$, то произведение $f(c_i)\cdot\Delta x_i$ есть площадь i-го частичного прямоугольника, а сумма всех таких произведений равна площади ступенчатой фигуры (см. рисунок 13) и приблизительно равна площади криволинейной трапеции. В пределе при $n \to \infty$ $(\lambda \to 0)$ площадь ступенчатой фигуры становится равной площади криволинейной трапеции, т. е. $\int_a^b f(x)dx = S$, в этом состоит геометрический смысл ОИ.

Основные свойства ОИ:

1) если $a=b$, то $\int\limits_a^a f(x)dx=0$;

2) $\int\limits_a^b f(x)dx=-\int\limits_b^a f(x)dx$;

3) $\int\limits_a^b (c_1 f_1(x)\pm c_2 f_2(x))dx=c_1\int\limits_a^b f_1(x)dx\pm c_2\int\limits_a^b f_2(x)dx$, где $c_1, c_2=\mathrm{const}$.

4) $\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_a^c f(x)dx+\int\limits_c^b f(x)dx$ (свойство аддитивности ОИ). При этом расположение точек a, b и c может быть любым.

Вычисление ОИ. Формула Ньютона–Лейбница. Вычисление ОИ по определению (через предел интегральной суммы) представляет собой достаточно сложную задачу. В связи с этим для вычисления ОИ доказана теорема, которая позволяет существенно упростить вычисление ОИ.

Теорема. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и $F(x)$ одна из первообразных для $f(x)$, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a).$$

Эту формулу называют формулой **Ньютона–Лейбница,** и она считается основной формулой интегрального исчисления. Она дает возможность избавиться от вычисления ОИ как предела интегральной суммы и задачу вычисления ОИ свести к задаче нахождения одной из первообразных и вычислению разности значений этой первообразной на концах области интегрирования.

Основные методы вычисления ОИ. Если первообразная находится непосредственно, то вычисление ОИ осуществляется непосредственно по формуле Ньютона–Лейбница.

Пример 6 – Вычислить ОИ.

Решение:

1) $\int\limits_0^1 \left(x^2+5x-7\right)dx=\int\limits_0^1 x^2dx+5\int\limits_0^1 xdx-7\int\limits_0^1 dx=\frac{1}{3}x^3\Big|_0^1+5\frac{1}{2}x^2\Big|_0^1-7x\Big|_0^1=$

$$=\left(\frac{1}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2-7x\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{3}\cdot 1^3+5\frac{1}{2}\cdot 1^2-7\cdot 1-0=-\frac{25}{6};$$

2) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx=-\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=-\left(\cos\frac{\pi}{2}-\cos 0\right)=-(0-1)=1;$

3) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x}dx=\operatorname{tg} x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}-\operatorname{tg} 0\right)=(1-0)=1.$

Замена переменной в ОИ (интегрирование подстановкой). Пусть при нахождении первообразной $F(x)$ сделана подстановка $x=\varphi(t)$, $dx=\varphi'(t)dt$, где $\varphi(t)-$ монотонная и дифференцируемая функция на $[\alpha,\beta]$. Тогда справедлива формула

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt,$$

где значения α и β находятся из решения системы $\begin{cases} a=\varphi(\alpha), \\ b=\varphi(\beta). \end{cases}$

Замечание – Можно не переходить к пределам интегрирования по t, т. е. к α и β. Найдя первообразную $F(t)$ для $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ и возвращаясь к переменной x по формуле $t=\varphi^{-1}(x)$, используем пределы по x, т. е. a и b.

***Пример** 7* – Вычислить ОИ.

Решение:

1) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{2x-1}dx=\left|2x-1=t, \quad x=\frac{1}{2}(t+1), \quad dx=d\left(\frac{1}{2}(t+1)\right)=\frac{1}{2}dt\right|=\otimes.$

Найдем новые пределы $\begin{cases} 2\cdot 1-1=\alpha \\ 2\cdot 2-1=\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha=1 \\ \beta=3 \end{cases}$. Следовательно,

$$\otimes=\int_1^3 \frac{1}{t}\cdot\frac{1}{2}\cdot dt=\frac{1}{2}\int_1^3 \frac{1}{t}dt=\frac{1}{2}\ln t\Big|_1^3=\frac{1}{2}(\ln 3-\ln 1)=\frac{1}{2}\ln 3, \text{ поскольку } \ln 1=0.$$

Иначе, не изменяя пределы интегрирования,

$$\int_1^2 \frac{1}{2x-1}dx=...=\frac{1}{2}\ln t\Big|=\left|t=2x-1\right|=\frac{1}{2}\ln(2x-1)\Big|_1^2=\frac{1}{2}(\ln 3-\ln 1)=\frac{1}{2}\ln 3.$$

Как видно, результат не изменился.

Замечание – При вычислении ОИ для нахождения первообразной остаются в силе все рекомендации и приемы, изложенные выше, в частности, прием подведения под знак дифференциала;

2) $\displaystyle\int_0^1 xe^{x^2}dx=\left|xdx=\frac{1}{2}dx^2\right|=\frac{1}{2}\int_0^1 e^{x^2}dx^2=\frac{1}{2}e^{x^2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}(e-1);$

3) $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln^2 x}=\left|\frac{1}{x}dx=d(\ln x)\right|=\int_e^{e^2} \frac{d(\ln x)}{\ln^2 x}=-\frac{1}{\ln x}\Big|_e^{e^2}=-\left(\frac{1}{\ln e^2}-\frac{1}{\ln e}\right)=\frac{1}{2};$

4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx=\left|\frac{1}{\sqrt{x}}dx=2d(\sqrt{x})\right|=2\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \cos\sqrt{x}\,d(\sqrt{x})=2\sin\sqrt{x}\Big|_0^{\frac{\pi^2}{4}}=2(1-0)=2.$

Интегрирование по частям в ОИ. Пусть $u=u(x)$ и $v=v(x)$ – функции, имеющие на отрезке $[a,b]$ непрерывные производные. Тогда

$$\int_a^b udv = u\cdot v\Big|_a^b - \int_a^b vdu .$$

Пример 8 – Вычислить ОИ.

Решение:

1) $$\int_0^{\pi} x\sin x dx = \begin{vmatrix} u=x & du=dx \\ dv=\sin x dx & v=-\cos x \end{vmatrix} = -x\cos x\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\cos x dx = \pi + \sin x\Big|_0^{\pi} = \pi ;$$

2) $$\int_1^e x\ln x dx = \begin{vmatrix} u=\ln x & du=dx/x \\ dv=xdx & v=x^2/2 \end{vmatrix} = \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e - \frac{1}{2}\int_1^e xdx = \left(\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}\right)\Bigg|_1^e = \frac{1}{4}\left(e^2+1\right).$$

Примеры для самостоятельной работы

Вычислить ОИ:

1) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, e^{\sin x} dx$;

2) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx$;

3) $\int\limits_0^1 xe^x dx$;

4) $\int\limits_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx$;

5) $\int\limits_2^3 \frac{1}{x^2-4x+5} dx$;

6) $\int\limits_0^{\pi} x\cos x\, dx$;

7) $\int\limits_0^4 e^{\frac{x}{4}} dx$;

8) $\int\limits_4^{12} \sqrt{x-3} dx$;

9) $\int\limits_{1/2}^{e/2} \ln 2x dx$.

Геометрические приложения ОИ. Вычисление площадей плоских фигур в декартовых координатах. Из геометрического смысла ОИ следует, что если $f(x)\ge 0$ (рисунок 14, *а*), то $\int\limits_a^b f(x)dx = S$ – площади криволинейной трапеции, а если $f(x)\le 0$ (рисунок 14, *б*), то $\int\limits_a^b f(x)dx < 0$, а площадь соответствующей криволинейной трапеции будет равна $S = -\int\limits_a^b f(x)dx = \left|\int\limits_a^b f(x)dx\right|$. Если требуется вычислить площадь фигуры ограниченной линиями $y=f(x)$, $y=g(x)$, $x=a$, $x=b$ и $f(x)\ge g(x)$ (рисунок 14, *в*), то, рассматривая эту площадь как разность площадей соответствующих криволинейных трапеций, можем записать $S = \int\limits_a^b f(x)dx - \int\limits_a^b g(x)dx = \int\limits_a^b \big(f(x)-g(x)\big)dx$, где $f(x)-g(x)\ge 0$. Последняя формула остается справедливой и для случая $g(x) \le 0$.

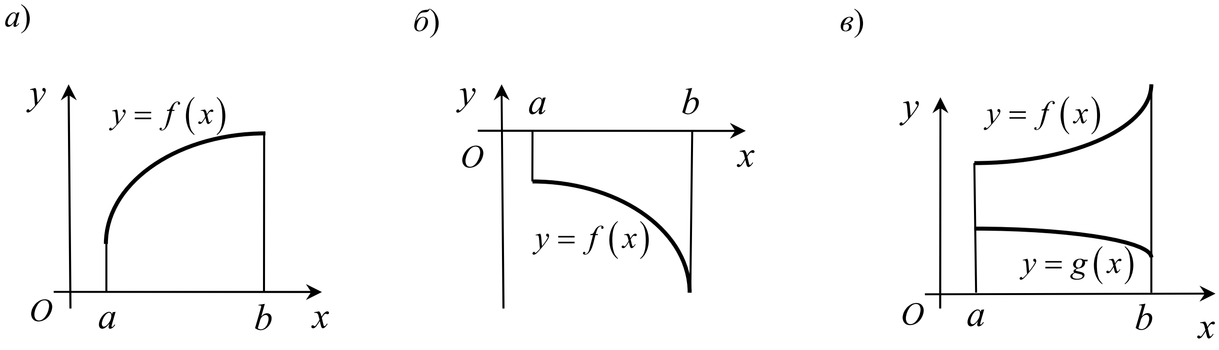

Рисунок 14

Пример 9 – Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями.

Решение:

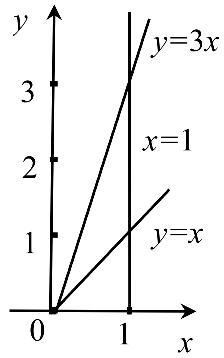

Рисунок 15

1) $y = x$, $y = 3x$, $x = 1$. Сделаем рисунок фигуры (рисунок 15). Найдем площадь:

$$S = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)dx = \int_0^1 \big(3x - x\big)dx = 2\int_0^1 x dx = x^2\Big|_0^1 = 1.$$

Замечание – В правильности ответа легко убедиться, используя формулу для вычисления площади треугольника (сообрази и проверь);

2) $y = x^2$, $y = -x^2 + 2$. Сделаем рисунок фигуры (рисунок 16). Для установления пределов интегрирования, найдем координаты концевых точек проекции фигуры на ось Ox, которые являются координатами точек пересечения кривых, описывающих эту фигуру. Для этого решим систему уравнений

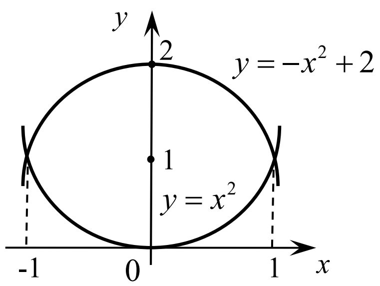

Рисунок 16

$$\begin{cases} y = x^2, \\ y = 2 - x^2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm 1, \\ y = 1. \end{cases}$$ Следовательно,

$$S = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)dx = \int_{-1}^1 \left(2 - x^2 - x^2\right)dx = \int_{-1}^1 \left(2 - 2x^2\right)dx =$$

$$= 2\int_{-1}^1 \left(1 - x^2\right)dx = 2\int_{-1}^1 \left(1 - x^2\right)dx = 2\left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^1 = \frac{8}{3};$$

3) получить формулу для вычисления площади круга радиусом R (рисунок 17). Пусть центр круга находится в начале координат, тогда уравнение окружности, которая его ограничивает, имеет вид $x^2 + y^2 = R^2$. Возьмем только четверть окружности, а результат умножим на четыре. Для первой четверти $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, $0 \le x \le R$. Следовательно,

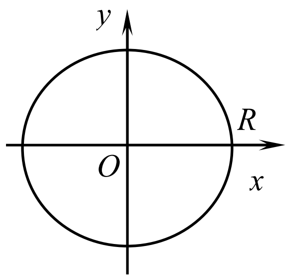

Рисунок 17

$$S=4\int_0^R\sqrt{R^2-x^2}\,dx=4\left(\frac{x}{2}\sqrt{R^2-x^2}+\frac{R^2}{2}\arcsin\frac{x}{R}\right)\Bigg|_0^R=$$

$$=4\left(\left(\frac{R}{2}\sqrt{R^2-R^2}+\frac{R^2}{2}\arcsin\frac{R}{R}\right)-\left(\frac{0}{2}\sqrt{R^2-0^2}+\frac{R^2}{2}\arcsin\frac{0}{R}\right)\right)=\pi R^2.$$

При нахождении первообразной воспользовались таблицей неопределенных интегралов (см. интеграл № 13).

Примеры для самостоятельной работы

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) $y=x^2,\ \ x=2,\ y=0$;	4) $y=x^2,\ y=-x$;	7) $y=x^2,\ y=\sqrt{x}$;
2) $y=-x^3, y=-x$;	5) $y=x^3,\ y=x,\ x\le 0$;	8) $y=x^2,\ y=1,\ x\ge 0$;
3) $y=-x^2+4,\ y=0$;	6) $y=x^3,\ y=x^2$;	9) $y=x^2,\ y=2x+3$.

Пример аудиторной контрольной работы по дифференциальному и интегральному исчислениям функции одной переменной

1 Найти производные функций $y=7x^3+\frac{3}{x^2}-\sqrt[7]{x^3}-\frac{5}{x}$, $y=x^4\ln x$, $y=\frac{\cos x}{x^3}$, $y=\operatorname{arcctg}\sqrt{x^3+2x+6}$.

2 Найти уравнения касательной и нормали к кривой $y=x^3$ в точке с $x_0=1$.

3 Найти пределы $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2-2x-8}{x^2+5x+6}$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{7x}$.

4 Найти промежутки возрастания, убывания и точки экстремума функции $y=\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{2}x+10$.

5 Найти неопределенные интегралы и вычислить определенный интеграл: $\int\left(5x^2+\sqrt{x}-\frac{3}{\sqrt[5]{x}}-2\right)dx$, $\int\sin(3x+4)\,dx$, $\int\frac{x}{\sqrt{x^2-8}}dx$, $\int_3^5\frac{13}{x-2}dx$.

6 Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=-x^2$, $y=-1$.

3 Дифференциальное исчисление функции многих переменных

Не все зависимости, существующие в природе, науке, технике и т. д., могут быть описаны функцией одной переменной $y = f(x)$. Так, например, в физике для описания состояния идеальных газов в замкнутых сосудах используется уравнение Менделеева–Клайперона $PV = \gamma T$, в которое входит три характеристики газов: $P-$ давление, $V-$ объем, $T-$ температура. Выразив одну из них через две другие, например, $P = \gamma \frac{T}{V}$, получаем, что давление зависит от температуры и объема, независимое изменение которых приводит к изменению давления, т. е. одна переменная зависит от двух. Это яркий пример функции двух переменных. Опуская строгое определение функции двух переменных (см., например, [5]), формально запишем $z = f(x, y)$, где $x, y-$ независимые переменные, $z-$ функция. Множество значений независимых переменных $\{x, y\}$, для которых можно вычислить z, называют естественной областью определения функции и обозначают $D = D(f)$, а множество значений $\{z\}$ – областью значений функции и обозначают $E = E(f)$. Аналогично – для функций в случае трех и более, т. е. многих переменных (ФМП) $u = f(x, y, z, \ldots)$. Для простоты и наглядности все особенности ФМП будем рассматривать на примере функции двух переменных.

Областью определения функции двух переменных $z = f(x, y)$ в простейших случаях является плоскость Oxy либо ее часть, ограниченная или неограниченная некоторой кривой. Линию, ограничивающую область D, называют границей области. Точки области, не лежащие на границе, называют внутренними точками области определения. Область, состоящая только из внутренних точек, называется открытой. Область с присоединенной границей называют закрытой (замкнутой). Области могут быть полуоткрытые (полузамкнутые). Если граница области или ее часть расположена на $\pm\infty$, то такую область называют неограниченной. В противном случае – ограниченной.

Самым **распространенным способом задания ФМП** является аналитический, т. е. соответствие f задается формулой. Например, $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Областью определения этой функции является множество точек плоскости Oxy, удовлетворяющих условию $D(z): \{1 - x^2 - y^2 \geq 0\}$, иначе $x^2 + y^2 \leq 1$ – это круг радиусом $r = 1$ с центром в точке $O(0, 0)$.

Графиком функции двух переменных $z = f(x, y)$ в общем случае является некоторая поверхность, т. е. множество точек пространства R^3 с координатами (x, y, z). Так, например, графиком функции $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ является верхняя часть сферы (полусфера) с центром в начале координат (рисунок 18). График функции трех и более переменных наглядно (геометрически) не представим (это математическая абстракция), его называют гиперповерхностью, а в частно-

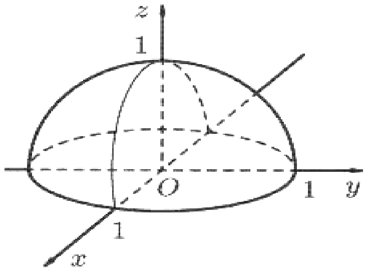

Рисунок 18

сти, областью определения функции трех переменных $u = f(x, y, z)$ является некоторая пространственная область, состоящая из точек с координатами (x, y, z).

Примеры для самостоятельной работы

Найти область определения функций:

1) $z = \sqrt{xy}$;	3) $z = \ln(x + y)$;	5) $z = x + \arcsin y$;
2) $z = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - y^2}$;	4) $z = \sqrt{\ln(1 - x^2 - y^2)}$;	6) $z = \arcsin \dfrac{y}{x}$.

Частные производные первого порядка. Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой точке $M_0(x_0, y_0)$ и ее окрестности. Частным приращением функции $z = f(x, y)$ в точке M_0 по переменной x называется величина $\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$, при этом переменная y не изменяется. Аналогично – $\Delta_y z = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ – частное приращение по переменной y, переменная x не изменяется. Здесь $\Delta x, \Delta y$ – частные приращения независимых переменных. Если существует предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$, то его называют **частной производной** первого порядка функции $z = f(x, y)$ по переменной x и обозначают $z'_x, \dfrac{\partial z}{\partial x}, f'_x, \dfrac{\partial f}{\partial x}$. Значения частной производной в точке $M_0(x_0, y_0)$ принято обозначать $z'_x(x_0, y_0)$, $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0}$ или $f'_x(x_0, y_0)$, $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{M_0}$. Аналогично определяется и обозначается частная производная по переменной y: $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$.

Из определения частных производных следует, что, например, z'_x представляет собой обыкновенную производную функции одной переменной x при фиксированном значении другой переменной, т. е. $y = \text{const}$. Аналогично – z'_y при $x = \text{const}$. Из изложенного следует правило нахождения частных производных: частные производные ФМП находятся по формулам и правилам нахождения производных функции одной переменной при условии, что при нахождении производной по одной из переменных все остальные переменные считаются постоянными. Для краткости слова «*первого порядка*» опускают.

Пример 1 – Найти частные производные функций.

Решение:

1) $z = x^2 y^3 + x + \dfrac{1}{y}$.

$$z'_x = \left(x^2 y^3 + x + \frac{1}{y}\right)'_x = \left(x^2 y^3\right)'_x + \left(x\right)'_x + \left(\frac{1}{y}\right)'_x = y^3 \left(x^2\right)'_x + 1 + 0 = 2xy^3 + 1,$$

$$z'_y = \left(x^2 y^3 + \frac{1}{y} + x\right)'_y = \left(x^2 y^3\right)'_y + \left(\frac{1}{y}\right)'_y + \left(x\right)'_y = x^2 \left(y^3\right)'_y - \frac{1}{y^2} + 0 = 3y^2 x^2 - \frac{1}{y^2};$$

2) $z = x^y$.

$$z'_x = \left(x^y\right)'_x = \begin{vmatrix} y = \alpha = \text{const} \\ \left(x^\alpha\right)' = \alpha x^{\alpha-1} \end{vmatrix} = yx^{y-1}, \quad z'_y = \left(x^y\right)'_y = \begin{vmatrix} x = a = \text{const} \\ \left(a^y\right)' = a^y \ln a \end{vmatrix} = x^y \ln x;$$

3) $z = e^{xy}$.

$$z'_x = \left(e^{xy}\right)'_x = e^{xy}\left(xy\right)'_x = ye^{xy}, \quad z'_y = \left(e^{xy}\right)'_y = e^{xy}\left(xy\right)'_y = xe^{xy}.$$

Примеры для самостоятельной работы

Найти частные производные функций:

1) $z = x^2 y^4 - x^3 y^3 + x^4 y^2$; 4) $z = \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$; 7) $z = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$;

2) $z = e^x\left(\cos y + x \sin y\right)$; 5) $z = \ln\sqrt{x^2 + y + 1}$; 8) $z = \ln\cos\left(xy\right)$;

3) $z = \dfrac{xy}{x - y}$; 6) $z = e^{x^3 y^2}$; 9) $z = e^{\sin\left(x^3 y^2 + 1\right)}$.

Производные высших порядков. Частные производные первого порядка z'_x, z'_y для функции $z = f\left(x, y\right)$ сами являются функциями $\left(x, y\right)$. От них также можно брать производные. Производная от производной первого порядка есть производная второго порядка. В частности, для функции двух переменных производных второго порядка четыре и их обозначают следующим образом:

$$\left(z'_x\right)'_x = z''_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \; \left(z'_x\right)'_y = z''_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \; \left(z'_y\right)'_x = z''_{yx} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \; \left(z'_y\right)'_y = z''_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

При этом $z''_{xy} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ и $z''_{yx} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ называют смешанными производными. Аналогично определяются частные производные более высоких порядков.

Пример 2 – Найти частные производные второго порядка функции $z = x^4 - 2x^2y^3 + y^5 + 1$.

Решение

Находим первые производные:

$$z'_x = \left(x^4 - 2x^2y^3 + y^5 + 1\right)'_x = 4x^3 - 4xy^3, \quad z'_x = \left(x^4 - 2x^2y^3 + y^5 + 1\right)'_y = -6x^2y^2 + 5y^4.$$

Находим вторые производные:

$$z''_{xx} = \left(z'_x\right)'_x = \left(4x^3 - 4xy^3\right)'_x = 12x^2 - 4y^3, \qquad z''_{xy} = \left(z'_x\right)'_y = \left(4x^3 - 4xy^3\right)'_y = -12xy^2,$$

$$z''_{yy} = \left(z'_y\right)'_y = \left(-6x^2y^2 + 5y^4\right)'_y = -12x^2y + 20y^3, \quad z''_{yx} = \left(z'_y\right)'_x = \left(-6x^2y^2 + 5y^4\right)'_x = -12xy^2.$$

Оказалось, $z''_{xy} = z''_{yx}$. Этот результат не случаен.

Теорема Шварца. Если частные производные высших порядков непрерывны, то смешанные производные одного порядка, отличающиеся лишь порядком дифференцирования, равны между собой. В частности, для $z = f(x, y)$ имеем $z''_{xy} = z''_{yx}$.

Примеры для самостоятельной работы

Найти частные производные второго порядка:

1) $z = x^2y^4 - x^3y^3 + x^4y^2$;
2) $z = e^{xy}$;
3) $z = e^x(\cos y + x \sin y)$;
4) $z = x^y$;
5) $z = \ln\left(y^2/x\right)$;
6) $z = e^{x^3y^2}$;
7) $z = \mathrm{arctg}(y/x)$;
8) $z = \ln\cos(xy)$;
9) $z = \ln\left(x^2 + y^2\right)$.

Скалярное поле. Линии уровня. В физике скалярную функцию многих переменных принято называть скалярным полем. При этом если задана функция двух переменных $z = f(x, y)$, то поле называют плоским, если трех переменных $u = f(x, y, z)$ – объемным.

Линией уровня функции двух переменных $z = f(x, y)$ **называется геометрическое место точек плоскости** Oxy**, для которых** $z = C = \mathrm{const}$**.** Линия уровня представляет собой проекцию линии пересечения поверхности $z = f(x, y)$ с плоскостью $z = C = \mathrm{const}$. Так, для функции $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ при $z = |C| < 1$ имеем $C = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, или $x^2 + y^2 = 1 - C^2$, или $x^2 + y^2 = r^2$, т. е. линии уровня есть семейство концентрических окружностей радиусом $r = \sqrt{1 - C^2}$ с центром в точке $O(0,0)$.

Примечание – Линии уровня используются в физике (изотермы, изобары и т. д.), в картографии при составлении геодезических и синоптических карт.

Производная по направлению. Для функции $z=f(x,y)$ частные производные z'_x, z'_y характеризуют скорость ее изменения вдоль направлений, параллельных координатным осям Ox, Oy соответственно. Для характеристики скорости изменения этой функции в точке $M_0(x_0,y_0)$ по направлению к произвольной точке $M(x,y)$, т. е. вдоль некоторого вектора $\overrightarrow{M_0M}(x-x_0,y-y_0)=\vec{l}\,(l_x,l_y)$, вводится понятие производной по направлению.

Пусть функция $z=f(x,y)$ определена в некоторой области D и имеет частные производные z'_x, z'_y.

Если существует предел отношения приращения функции к полному приращению аргументов, т. е.

$$\lim_{\Delta l\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta l}=\lim_{\Delta l\to 0}\frac{f(x,y)-f(x_0,y_0)}{\Delta l},$$

где $\Delta l=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$ – расстояние между точками $M_0(x_0,y_0)$ и $M(x,y)$ (рисунок 19), то его называют производной функции $z=f(x,y)$ в точке $M_0(x_0,y_0)$ по направлению к точке $M(x,y)$, т. е. вдоль направления вектора $\vec{l}\,(l_x,l_y)=\overrightarrow{M_0M}(x-x_0,y-y_0)$, ее обозначение и расчетная формула имеют вид:

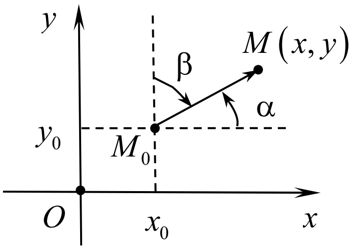

Рисунок 19

$$z'_l(M_0)=\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{M_0}=z'_x(M_0)\cos\alpha+z'_y(M_0)\cos\beta,$$

где $z'_x(M_0)$, $z'_y(M_0)$ – значения частных производных в точке M_0, а $\cos\alpha=l_x/|\vec{l}|$, $\cos\beta=l_y/|\vec{l}|$ – направляющие косинусы вектора $\vec{l}\,(l_x,l_y)$, $|\vec{l}|=\sqrt{l_x^2+l_y^2}$. Напомним, что $\cos^2\alpha+\cos^2\beta=1$ – основное свойство направляющих косинусов.

Замечание – Понятие производной по направлению является обобщением понятия частных производных. Действительно, при $\alpha=0$, $\beta=\pi/2$ имеем $z'_l(M_0)=z'_x(M_0)$, при $\alpha=\pi/2$, $\beta=0$ имеем $z'_l(M_0)=z'_y(M_0)$.

Поскольку производная по направлению $\vec{l}$ характеризует скорость изменения функции в точке $M_0(x_0,y_0)$ по направлению $\vec{l}$, то:

– если $z'_l(M_0)>0$, то функция в этом направлении возрастает;

– если $z'_l(M_0)<0$, то функция в этом направлении убывает;

– если $z'_l(M_0)=0$, то функция в этом направлении не изменяется.

Градиент скалярного поля. Поскольку производная по направлению характеризует скорость изменения функции в этом направлении, то можно задать вопрос: а в каком направлении эта скорость имеет наибольшее значение? **Направление, или вектор, вдоль которого $z'_l(M_0)-\max$, называют *градиентом,* его обозначают $\operatorname{grad} z\big|_{M_0}=\operatorname{grad} z(M_0)$.** Над ним не принято ставить стрелку. Для функции двух переменных $z=f(x,y)$ в точке $M_0(x_0,y_0)$ он определяется по формуле

$$\operatorname{grad} z\big|_{M_0}=\operatorname{grad} z(M_0)=z'_x(M_0)i+z'_y(M_0)j,$$

где $i, j-$ единичные векторы декартового базиса, $\{z'_x(M_0), z'_y(M_0)\}$ – координаты градиента.

Таким образом, **градиент указывает направление наибыстрейшего возрастания функции, в этом состоит его физический смысл,** а наибольшая скорость этого роста равна модулю градиента, т. е.

$$\max\left(z'_l(M_0)\right)=\left|\operatorname{grad} z(M_0)\right|=\sqrt{\left(z'_x(M_0)\right)^2+\left(z'_y(M_0)\right)^2}\ .$$

Замечание – Поскольку функция не изменяется вдоль линий уровня, то можно заключить, что производная по направлению, касательному к линии уровня, равна нулю. Доказано, что градиент направлен по нормали к линиям уровня, а в направлении, противоположном градиенту, т. е. $-\operatorname{grad} z(M_0)$, функция $z=f(x,y)$ убывает наиболее быстро.

Изложенное продемонстрируем на примере.

Пример 3 – Для функции $z=x^2+y^2$ найти:

1) уравнение линии уровня при $z=2$;

2) производную в точке $M_0(1,1)$ по направлению к точкам $M_1(1,0)$, $M_2(2,0)$, $M_3(2,1)$, $M_4(2,2)$, $M_5(1,2)$, $M_6(0,2)$, $M_7(0,1)$, $M_8(0,0)$;

3) вектор, в направлении которого функция в точке M_0 возрастает наиболее быстро (т. е. градиент), и значение скорости роста функции по этому направлению.

Решение

Функция $z=x^2+y^2$ определена на всей плоскости Oxy, а графиком ее является поверхность, которая представляет собой параболоид вращения с осью симметрии Oz (рисунок 20, *а*).

1 Подставляем $z=2$ в функцию $z=x^2+y^2$, получаем уравнение $2=x^2+y^2$, которое является уравнением окружности $x^2+y^2=\left(\sqrt{2}\right)^2$ на плоскости Oxy с центром в начале координат радиусом $R=\sqrt{2}$. Линия уровня и указанные направления изображены на рисунке 20, *б*.

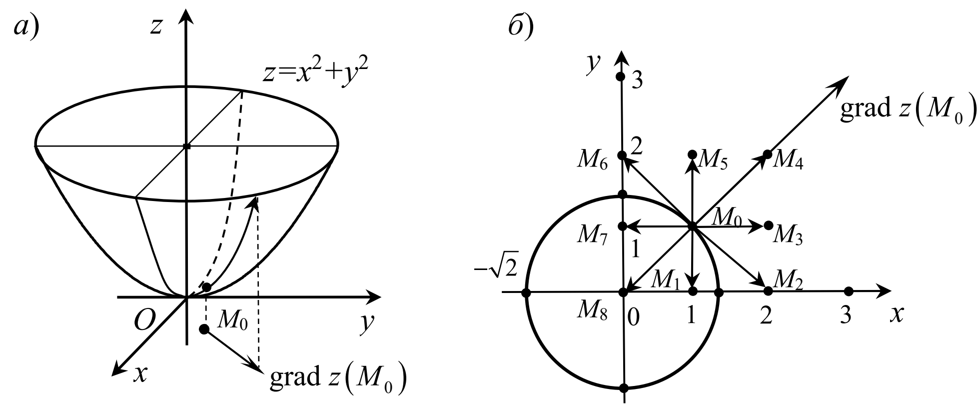

Рисунок 20

2 Запишем расчетную формулу для производной по направлению:

$$z'_{l_i}(M_0)=z'_x(M_0)\cos\alpha+z'_y(M_0)\cos\beta.$$

Найдем частные производные и их значения в точке $M_0(1,1)$:

$$z'_x=\left(x^2+y^2\right)'_x=2x; \qquad z'_x(M_0)=2x_0=2\cdot1=2;$$

$$z'_y=\left(x^2+y^2\right)'_y=2y; \qquad z'_y(M_0)=2y_0=2\cdot1=2.$$

Найдем координаты вектора $\overrightarrow{M_0M_1}$ и его направляющие косинусы.

$\vec{l}_1=\overrightarrow{M_0M_1}(1-1,0-1)=\overrightarrow{M_0M_1}(0,-1)$, $\left|\vec{l}_1\right|=\sqrt{0^2+(-1)^2}=1$, $\cos\alpha=0/1=0$, $\cos\beta=-1/1=-1$. Найденные величины подставляем в расчетную формулу и получаем $z'_{l_1}(M_0)=2\cdot0+2\cdot(-1)=-2<0$. Поскольку производная отрицательна, то функция в направлении $\overrightarrow{M_0M_1}$ убывает.

Найдем координаты вектора $\overrightarrow{M_0M_2}$ и его направляющие косинусы.

$\vec{l}_2=\overrightarrow{M_0M_2}(2-1,0-1)=\overrightarrow{M_0M_2}(1,-1)$, $\left|\vec{l}_2\right|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$, $\cos\alpha=1/\sqrt{2}$, $\cos\beta=-1/\sqrt{2}$. Найденные величины подставляем в расчетную формулу и получаем $z'_{l_2}(M_0)=2\cdot1/\sqrt{2}+2\cdot\left(-1/\sqrt{2}\right)=0$. Поскольку производная равна нулю, то функция в направлении $\overrightarrow{M_0M_2}$ не изменяется.

Поступаем аналогично для остальных направлений.

Для $\vec{l}_3=\overrightarrow{M_0M_3}(2-1,1-1)=\overrightarrow{M_0M_3}(1,0)$, $\left|\vec{l}_3\right|=\sqrt{1^2+(0)^2}=1$, $\cos\alpha=1/1=1$, $\cos\beta=0/1=0$. $z'_{l_3}(M_0)=2\cdot1+2\cdot0=2>0$. Производная положительна, следовательно, функция в направлении $\overrightarrow{M_0M_3}$ возрастает.

Для $\vec{l}_4=\overrightarrow{M_0M_4}(2-1,2-1)=\overrightarrow{M_0M_4}(1,1)$, $\left|\vec{l}_4\right|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$, $\cos\alpha=1/\sqrt{2}$,

$\cos\beta = 1/\sqrt{2}$. $z'_{l_4}\left(M_0\right) = 2\cdot 1/\sqrt{2} + 2\cdot 1/\sqrt{2} = 4/\sqrt{2} = 2\sqrt{2} > 0$. Функция в направлении $\overrightarrow{M_0M_4}$ возрастает.

Для $\vec{l}_5 = \overrightarrow{M_0M_5}(1-1, 2-1) = \overrightarrow{M_0M_5}(0,1)$, $\left|\vec{l}_5\right| = \sqrt{0^2+1^2} = 1$, $\cos\alpha = 0/1 = 0$, $\cos\beta = 1/1 = 1$. $z'_{l_5}\left(M_0\right) = 2\cdot 0 + 2\cdot 1 = 2 > 0$. Функция в направлении $\overrightarrow{M_0M_5}$ возрастает.

Для $\vec{l}_6 = \overrightarrow{M_0M_6}\left(0-1, 2-1\right) = \overrightarrow{M_0M_6}\left(-1,1\right)$, $\left|\vec{l}_6\right| = \sqrt{\left(-1\right)^2+1^2} = \sqrt{2}$, $\cos\alpha = -1/\sqrt{2}$, $\cos\beta = 1/\sqrt{2}$. $z'_{l_6}\left(M_0\right) = 2\cdot\left(-1/\sqrt{2}\right) + 2\cdot 1/\sqrt{2} = 0$. Функция в направлении $\overrightarrow{M_0M_6}$ не изменяется.

Для $\vec{l}_7 = \overrightarrow{M_0M_7}\left(0-1, 1-1\right) = \overrightarrow{M_0M_7}\left(-1,0\right)$, $\left|\vec{l}_7\right| = \sqrt{\left(-1\right)^2+0^2} = 1$, $\cos\alpha = -1/1 = -1$, $\cos\beta = 0/1 = 0$. $z'_{l_7}\left(M_0\right) = 2\cdot\left(-1\right) + 2\cdot 0 = -2 < 0$. Функция в направлении $\overrightarrow{M_0M_7}$ убывает.

Для $\vec{l}_8 = \overrightarrow{M_0M_8}\left(0-1, 0-1\right) = \overrightarrow{M_0M_8}\left(-1,-1\right)$, $\left|\vec{l}_7\right| = \sqrt{\left(-1\right)^2+\left(-1\right)^2} = \sqrt{2}$, $\cos\alpha = \cos\beta = -1/\sqrt{2}$. $z'_{l_8}\left(M_0\right) = 2\cdot\left(-1/\sqrt{2}\right) + 2\cdot\left(-1/\sqrt{2}\right) = -4/\sqrt{2} = -2\sqrt{2} < 0$. Функция в направлении $\overrightarrow{M_0M_8}$ убывает.

3 Запишем расчетную формулу для градиента

$$\operatorname{grad} z\left(M_0\right) = z'_x\left(M_0\right)i + z'_y\left(M_0\right)j.$$

Поскольку значения частных производных найдены, то подставляем их в расчетную формулу для градиента, получаем

$$\operatorname{grad} z\left(M_0\right) = 2i + 2j.$$

Максимальное значение скорости роста функции в этом направлении из точки M_0

$$\max\left(z'_{\operatorname{grad}}\left(M_0\right)\right) = \left|\operatorname{grad} z\left(M_0\right)\right| = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

Выводы. Из приведенных расчетов и рисунка 20, *б* видно, что направления $\vec{l}_2 = \overrightarrow{M_0M_2}\left(1,-1\right)$ и $\vec{l}_6 = \overrightarrow{M_0M_6}\left(-1,1\right)$ являются направлениями, касательными к линии уровня, и производная вдоль них равна нулю. Направление $\vec{l}_4 = \overrightarrow{M_0M_4}\left(1,1\right)$ совпадает с направлением градиента, производная вдоль него максимальна и равна модулю градиента, функция в этом направлении возрастает наиболее быстро, в чем можно убедиться на основании рисунка 20, *а*. Видно также, что градиент направлен по нормали к линии уровня. Направление $\vec{l}_8 = \overrightarrow{M_0M_8}\left(-1,-1\right)$ противоположно направлению градиента, производная отрицательна и по модулю равна модулю градиента (функция в этом направлении убывает наиболее быстро).

Примеры для самостоятельной работы

Для функции $z = f(x, y)$ найти:

1) производную в точке $M_0(x_0, y_0)$ по направлению вектора $\overrightarrow{M_0M_1}$;

2) вектор, в направлении которого функция в точке M_0 возрастает наиболее быстро (т. е. градиент) и значение скорости роста функции по этому направлению:

а) $z = x^3y + 5x^2 - y^4 + 3xy - 4, \quad M_0(1,1), M_1(3,2)$;

б) $z = 2x^3y^3 + 5x^2y - 2y^4 + 5y - 3x, \quad M_0(1,2), M_1(3,-2)$;

в) $z = 2y + 5x^2 - y^4 + 3x^3y - 4xy, \quad M_0(0,1), M_1(1,2)$;

г) $z = x^2y + x^2 - y^4 - 2xy - 5y + 1, \quad M_0(1,-2), M_1(3,2)$.

Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Плоскость P, которая касается графика дифференцируемой функции $z = f(x, y)$, т. е. поверхности, в единственной точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ называется **касательной** плоскостью, а ее уравнение имеет вид:

$$f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0.$$

Прямая L, проходящая через точку касания $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и перпендикулярная касательной плоскости, называется **нормалью,** ее уравнение имеет вид:

$$\frac{(x - x_0)}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{(y - y_0)}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{(z - z_0)}{-1}.$$

Пример 4 – Написать уравнения касательной плоскости нормали к поверхности $z = x^2 + y^2$ в точке $M_0(1,-1,2)$.

Решение

Неизвестными в искомых уравнениях являются значения частных производных в точке M_0. Найдем их и их значения в M_0.

$$z'_x = \left(x^2 + y^2\right)'_x = 2x, \quad z'_x(M_0) = z'_x(x_0, y_0) = 2x_0 = 2 \cdot 1 = 2.$$

$$z'_y = \left(x^2 + y^2\right)'_y = 2y, \quad z'_y(M_0) = z'_y(x_0, y_0) = 2y_0 = 2 \cdot (-1) = -2.$$

Найденные значения $z'_x(x_0, y_0)$, $z'_y(x_0, y_0)$ и координаты точки $M_0(1,-1,2)$ подставляем в соответствующие уравнения. После преобразований получаем искомые уравнения:

$2x-2y-z-2=0$ – уравнение касательной плоскости;

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-2}{-1}$$ – уравнение нормали.

Примеры для самостоятельной работы

Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхностям $z=f(x,y)$ в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$:

1) $z=x^2-4y^2+2xy$, $M_0(-2,1,-4)$;
2) $z=2x^2+y^2$, $M_0(1,-1,3)$;
3) $z=xy^2-x^2+4y$, $M_0(2,1,2)$;
4) $z=x^2+y^2-xy-1$, $M_0(1,2,2)$.

Локальные экстремумы функции двух переменных. Пусть функция $z=f(x,y)$ определена в области D. Точка $M_0(x_0,y_0)$ называется точкой **локального максимума (минимума)** функции $z=f(x,y)$, если для всех точек $M(x,y)$ из этой окрестности, отличных от $M_0(x_0,y_0)$, выполняются неравенства $f(x,y)<f(x_0,y_0)$ $\quad (f(x,y)>f(x_0,y_0))$ (рисунок 21).

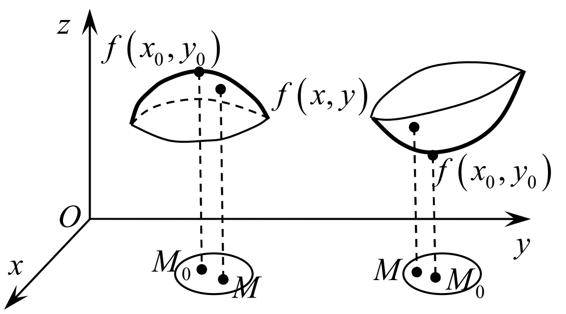

Рисунок 21

Значения функции в точках максимума (минимума) называют максимумом (минимумом) функции. Максимум и минимум называют одним словом – экстремум.

Необходимые условия существования экстремума. Как и в случае функции одной переменной, если дифференцируемая функция двух переменных $z=f(x,y)$ имеет экстремум в точке $M_0(x_0,y_0)$, то ее частные производные в этой точке равны нулю, а касательная плоскость паралельна плоскости Oxy. **Обратное не всегда верно**, т. е. если $f'_x(x_0,y_0)=0,\ f'_y(x_0,y_0)=0$, то это не означает, что (x_0y_0) – точка экстремума, в этой точке экстремум может быть, а может и не быть. Кроме того, в точке экстремум может быть, а производные (или хотя бы одна из них) не существуют или равны бесконечности.

Точки, в которых частные производные $f'_x=0, f'_y=0$ или хотя бы одна из них не существует или равна $\pm\infty$, называются критическими точками (точками возможного экстемума). Для однозначного установления экстремума и его характера в критических точках используют так называемые достаточные условия его существования.

Достаточные условия существования экстремума. Пусть в критической точке (x_0, y_0) и некоторой ее окрестности функция $z = f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Пусть $A = f''_{xx}(x_0, y_0)$, $B = f''_{yy}(x_0, y_0)$, $C = f''_{xy}(x_0, y_0)$ – значения частных производных второго порядка в точке (x_0, y_0) и $\Delta = AB - C^2$. Тогда:

1) если $\Delta > 0$, то в точке (x_0, y_0) экстремум есть, причем, если $A < 0$ $(B < 0)$, то максимум, а если $A > 0$ $(B > 0)$ – минимум;

2) если $\Delta < 0$, то в точке (x_0, y_0) экстремума нет;

3) если $\Delta = 0$, то экстремум в точке (x_0, y_0) может быть, а может и не быть. В этих случаях требуются дополнительные исследования поведения функции в окрестности критической точки.

Из приведенного очевиден ***алгоритм нахождения экстремумов***.

1 Из необходимых условий $\begin{cases} f'_x(x, y) = 0, \pm\infty, \nexists, \\ f'_y(x, y) = 0, \pm\infty, \nexists, \end{cases}$ решая систему, находим критические точки. Выбираем из них те, которые принадлежат области определения.

2 На основании достаточных условий определяем знак и значение Δ в каждой из найденных критических точек и устанавливаем наличие экстремума и его характер.

3 Если в какой-то из найденных точек экстремум существует, то вычисляем значение функции в них.

Пример 5 – Найти экстремумы функции:

1) $z = 3x^2y - x^3 - y^4$.

Решение

$D(z) \in R^2$, т. е. вся плоскость Oxy. Найдем частные производные $z'_x = 6xy - 3x^2$, $z'_y = 3x^2 - 4y^3$. Из условий $\begin{cases} z'_x = 6xy - 3x^2 = 0, \\ z'_y = 3x^2 - 4y^3 = 0, \end{cases}$ решая систему, находим критические точки. Заметим, что первые производные в области определения существуют и конечны, поэтому производные приравниваем только нулю. Система нелинейная, однако легко решается. Ее решение: $(x_1 = 6,\ y_1 = 3)$, $(x_2 = 0,\ y_2 = 0)$. Получили две критические точки: $M_1(6,3)$, $M_2(0,0)$. Находим вторые производные: $z''_{xx} = 6y - 6x$, $z''_{yy} = -12y^2$, $z''_{xy} = z''_{yx} = 6x$, вычисляем их значения в критических точках и величину Δ.

Для $M_1(6,3)$: $A = z''_{xx}(6,3) = -18$, $B = z''_{yy}(6,3) = -108$, $C = z''_{xy}(6,3) = 36$

и $\Delta = AB - C^2 = 648 > 0$. Следовательно, в точке $M_1(6,3)$ экстремум есть, а поскольку $A = -18 < 0$ $(B = -108 < 0)$, то в точке M_1 локальный максимум и $z_{\max} = z(6,3) = 27$.

Для $M_2(0,0)$: $A = z''_{xx}(0,0) = 0$, $B = z''_{yy}(0,0) = 0$, $C = z''_{xy}(0,0) = 0$ и $\Delta = AB - C^2 = 0$. Следовательно, в точке $M_2(0,0)$ экстремум может быть, а может и не быть. Проводим дополнительные исследования поведения функции в окрестности этой точки. Значение функции в этой точке равно $z(0,0) = 0$. Далее, например, при $x = 0$, $y \neq 0$ имеем $z = -y^4 < 0$ для любых y, а при $x \neq 0$, $y = 0$ имеем $z = -x^3 = \begin{cases} < 0 \text{ при } x > 0 \\ > 0 \text{ при } x < 0 \end{cases}$, т. е. в окрестности точки $M_2(0,0)$ вдоль оси Ox функция знакопеременна. Значит, в точке M_2 экстремума нет;

2) $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20$.

Решение

$D(z) \in R^2$, т. е. вся плоскость Oxy. Найдем частные производные $z'_x = 2x - y + 9$, $z'_y = -x + 2y - 6$. Из условий $\begin{cases} z'_x = 2x - y + 9 = 0, \\ z'_y = -x + 2y - 6 = 0, \end{cases}$ решая систему, находим критические точки. Первые производные в области определения существуют и конечны, поэтому производные приравниваем только нулю. Система имеет единственное решение $x = -4, y = 1$. Получили одну критическую точку $M_0(-4,1)$. Находим вторые производные: $z''_{xx} = 2$, $z''_{yy} = 2$, $z''_{xy} = z''_{yx} = -1$. Вторые производные являются постоянными во всей области определения, а следовательно, и в критической точке $M_0(-4,1)$, т. е. $A = z''_{xx}(-4,1) = 2$, $B = z''_{yy}(-4,1) = 2$, $C = z''_{xy}(-4,1) = -1$. Вычисляем $\Delta = AB - C^2 = 3 > 0$. Следовательно, в точке $M_0(-4,1)$ экстремум есть, а поскольку $A = 2 > 0$ $(B = 2 > 0)$, то в точке $M_0(-4,1)$ локальный минимум и $z_{\min} = z(-4,1) = 1$.

Примеры для самостоятельной работы

Найти локальные экстремумы функции двух переменных:

1) $z = 2x^3 + xy^2 - 5x^2 + y^2$;

2) $z = 3x + 6y - x^2 - xy - y^2$;

3) $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 1$;

4) $z = x^2 + 8y^3 - 4xy + 1$;

5) $z = x^3 + 12xy + 3y^2 + 6$;

6) $z = 3 - 2x^3 - 6xy - y^2$;

7) $z = x^2 + 3xy + y^3 - x$;

8) $z = 3x + 64 - x^2 - xy - y^2$.

4 Интегральное исчисление функции многих переменных

Двойной интеграл (ДИ). Обобщением определенного интеграла на случай функции двух переменных является так называемый двойной интеграл. Пусть в замкнутой ограниченной области D плоскости Oxy задана непрерывная ограниченная функция $z = f\left(x, y\right)$ (рисунок 22). Сеткой параллельных кривых разобьём область D на n элементарных областей D_i $\left(i = \overline{1, n}\right)$, площади которых обозначим через ΔS_i. Наибольшее расстояние между точками на границе в каждой частичной области D_i обозначим через d_i. Пусть $\Delta = \max\limits_{1 \le i \le n} \left\{d_i\right\}$ – наибольший из диаметров всех областей. В каждой области D_i выберем произвольным образом точку $M_i\left(x_i, y_i\right)$, найдем значение функции в ней, т. е. $f\left(M_i\right)$, и умножим его на площадь этой ячейки ΔS_i. Составим сумму таких произведений, т. е. $\sum\limits_{i=1}^{n} f\left(M_i\right)\Delta S_i$, которую называют интегральной, и рассмотрим ее предел при $n \to \infty$ $\left(\Delta \to 0\right)$.

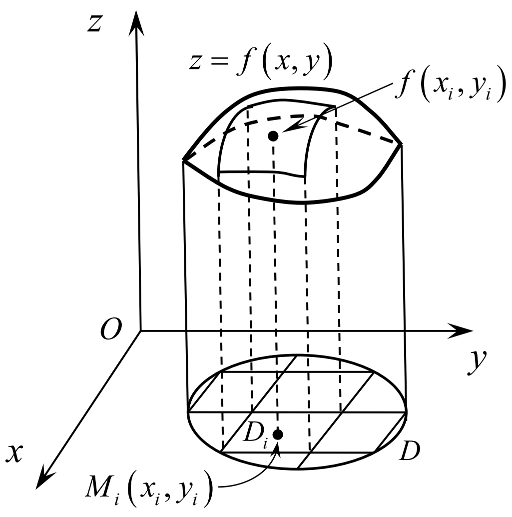

Рисунок 22

Если существует конечный предел интегральной суммы, который не зависит от способа разбиения области D на частичные D_i и от выбора точек $M_i\left(x_i, y_i\right)$ в них, то он называется двойным интегралом от функции $z = f\left(x, y\right)$ по области D и обозначается

$$\iint\limits_D f\left(x, y\right)dS = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \Delta \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i, y_i\right)\Delta S_i,$$

где $dS -$ элемент площади области D.

В определении ДИ речь идет о произвольном разбиении области D на элементарные D_i. Поэтому разбив область D на элементарные D_i сеткой прямых, параллельных координатным осям, для элемента площади dS можем записать $dS = dxdy$, а двойной интеграл – в виде

$$\iint\limits_D f\left(x, y\right)dS = \iint\limits_D f\left(x, y\right)dxdy.$$

При этом $f\left(x, y\right)$ называют подынтегральной функцией, $D -$ областью интегрирования, x и y – переменными интегрирования. Если функция $z = f\left(x, y\right)$ ограничена в замкнутой области D и непрерывна в ней всюду, кроме конечного числа кусочно-гладких линий, то **двойной интеграл существует**.

Геометрический смысл двойного интеграла. Из определения ДИ можно заключить, что если $z = f(x,y) \geq 0$, то двойной интеграл от неотрицательной функции численно равен объему цилиндрического тела, ограниченного сверху поверхностью $z = f(x,y)$, снизу – замкнутой областью D плоскости Oxy, с боков – цилиндрической поверхностью, образующая которой параллельна оси Oz, а направляющей служит граница области D, т. е. $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = V$; в этом и состоит **геометрический смысл ДИ** (см. рисунок 22).

Основные свойства ДИ (аналогично свойствам ОИ)

Наиболее важные из них.

1 Если $f(x,y) = 1$ в D, то $\iint\limits_D dxdy = S_D$, т. е. ДИ равен площади области D.

2 $\iint\limits_D \left(c_1 f_1(x,y) + c_2 f_2(x,y)\right) dxdy = c_1 \iint\limits_D f_1(x,y)\,dxdy + c_2 \iint\limits_D f_2(x,y)\,dxdy$.

3 $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\,dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\,dxdy$ (свойство аддитивности), где $D = D_1 + D_2$.

Вычисление двойного интеграла в декартовых координатах. Пусть область D на плоскости Oxy представляет собой криволинейную трапецию, ограниченную сверху линией $y = \varphi_2(x)$, снизу линией $y = \varphi_1(x)$ (функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ непрерывны) и с боков прямыми $x = a$ и $x = b$. Область D называется простой (правильной) в направлении оси Oy, если любая прямая, параллельная оси Oy, пересекает границу области не более чем в двух точках (вход в область и выход) (рисунок 23).

Двойной интеграл по такой области вычисляется по формуле

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y=\varphi_1(x)}^{y=\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy. \qquad (1)$$

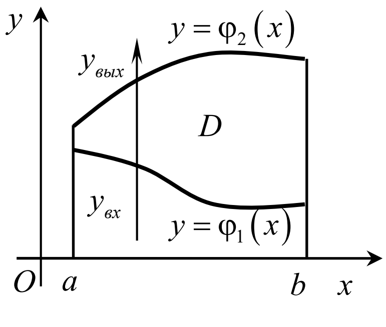

Рисунок 23

Правую часть этой формулы называют двукратным (или повторным) интегралом по области D от функции $f(x,y)$. Интеграл $\int\limits_{y=\varphi_1(x)}^{y=\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy$ называют внутренним, а $\int\limits_a^b dx$ – внешним.

При вычислении ДИ по формуле (1) сначала берем внутренний интеграл по переменной y, считая x постоянной, а затем – внешний по переменной x.

Если же область D ограничена справа линией $x=\psi_2(y)$, слева линией $x=\psi_1(y)$ (функции $\psi_1(y)$ и $\psi_2(y)$ непрерывны), снизу прямой $y=c$ и сверху прямой $y=d$ и D является простой (правильной) в направлении оси Ox (рисунок 24), то двойной интеграл по такой области вычисляется по формуле

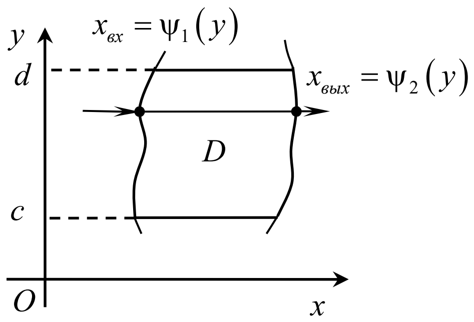

Рисунок 24

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy=\int_c^d dy\int_{x=\psi_1(y)}^{x=\psi_2(y)} f(x,y)\,dx. \tag{2}$$

При вычислениях ДИ по формуле (2) сначала берем внутренний интеграл по переменной x, считая y постоянной, а затем – внешний по переменой y.

Наиболее простой вид формулы (1) и (2) принимают в случае прямоугольной области D. Двойной интеграл по такой области вычисляется по формуле

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy=\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)\,dy=\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)\,dx. \tag{3}$$

Замечания

1 Если область D правильная в обоих направлениях, то ДИ можно вычислять как по формуле (1), так и по формуле (2), а если D неправильная по Ox или по Oy, то для сведения ДИ к повторному ее следует разбить на сумму областей, правильных в направлении оси Ox или Oy, а затем воспользоваться свойством аддитивности ДИ.

2 В случаях, когда область D является правильной в каком-либо направлении, однако или линия входа в область, или линия выхода из области описывается не одним аналитическим выражением, то область D разбивают на сумму областей прямыми, параллельными соответствующим координатным осям, проходящими через точки стыка аналитических выражений, и используют свойство аддитивности ДИ.

Пример 1 – Вычислить $\iint_D (x+y^3)dxdy$, где область D ограничена линиями $x=1, x=2, y=0, y=2$.

Решение

Область прямоугольная (рисунок 25). Применяем формулу (3).

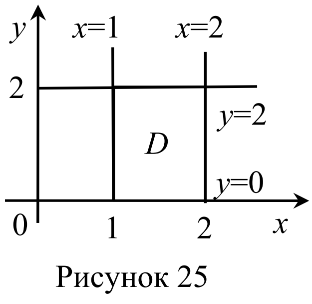

Рисунок 25

$$\iint_D \left(x+y^3\right)dxdy=\int_1^2 dx\int_0^2\left(x+y^3\right)dy=\int_1^2\left(xy+\frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=2}dx=$$

$$=\int_1^2(2x+4)\,dx=\left(x^2+4x\right)\Big|_1^2=7.$$

Иначе, изменив порядок интегрирования, получим

$$\iint_D \left(x+y^3\right)dxdy=\int_0^2 dy\int_1^2\left(x+y^3\right)dx=\int_0^2\left(\frac{x^2}{2}+y^3x\right)\Bigg|_{x=1}^{x=2}dy=$$

$$=\int_0^2\left(2+2y^3-\left(\frac{1}{2}+y^3\right)\right)dy=\int_0^2\left(y^3+\frac{3}{2}\right)dy=\left(\frac{1}{4}y^4+\frac{3}{2}y\right)\Bigg|_0^2=7\,.$$

Как видно, независимо от порядка интегрирования результат не меняется.

Пример 2 – Вычислить $\iint_D (x+2y)\,dxdy$, где область D ограничена линиями $y=-x+2$, $y=0$, $x=0$.

Решение

Построим область D (рисунок 26). Она является простой относительно осей Ox и Oy. Следовательно, можем вычислять интеграл как по формуле (1), так и по формуле (2). Вычислим по формуле (1).

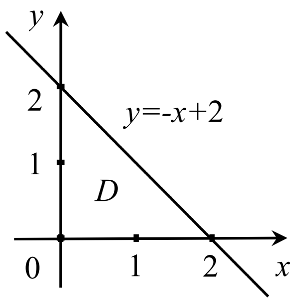

Рисунок 26

$$\iint_D (x+2y)\,dxdy=\int_0^2 dx\int_{y=0}^{y=-x+2}(x+2y)\,dy=\int_0^2\left(xy+y^2\right)\Big|_{y=0}^{y=-x+2}=$$

$$=\int_0^2\left(x(-x+2)+(-x+2)^2-0\right)dx=\int_0^2\left(-x^2+2x+x^2-4x+4\right)dx=$$

$$=\int_0^2(-2x+4)\,dx=\left(-x^2+4x\right)\Big|_0^2=-4+8-0=4\,.$$

Вычислим по формуле (2).

$$\iint_D (x+2y)\,dxdy=\int_0^2 dy\int_{x=0}^{x=-y+2}(x+2y)\,dx=\int_0^2\left(x^2/2+2yx\right)\Big|_{x=0}^{x=-y+2}=$$

$$=\int_0^2\left(\left((-y+2)^2/2+2y(-y+2)\right)-0\right)dy=\int_0^2\left(\left(y^2-4y+4\right)/2-2y^2+4y\right)dy=$$

$$=\int_0^2\left(-3y^2/2+2y+2-0\right)dy=\left(-y^3/2+y^2+2y\right)\Big|_0^2=-4+4+4-0=4\,.$$

Как видно, результат не зависит от порядка интегрирования.

Пример 3 – Вычислить $\iint\limits_D (2x+y)\,dxdy$, где область D ограничена линиями $y=2x$, $y=x$, $x=2$.

Решение

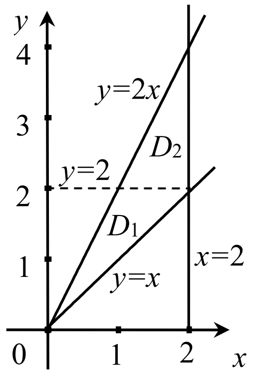

Рисунок 27

Построим область D (рисунок 27). Область D является простой относительно осей Ox и Oy. Рассчитаем интеграл по формуле (1).

$$\iint\limits_D (2x+y)\,dxdy = \int\limits_0^2 dx \int\limits_{y=x}^{y=2x} (2x+y)\,dy = \int\limits_0^2 dx\left(2xy + y^2/2\right)\Big|_{y=x}^{y=2x} =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(4x^2 + 2x^2 - \left(2x^2 + x^2/2\right)\right)dx = 7/2\int\limits_0^1 x^2 dx = 7/6 \cdot x^3\Big|_0^2 = 28/3.$$

Изменим порядок интегрирования, т. е. вычислим интеграл по формуле (2). Видно, что выход из области интегрирования по x происходит на линиях, заданных различными аналитическими выражениями, а именно $x=y$ и $x=2$. Следовательно, область D следует разбить на две прямой $y=2$ и воспользоваться свойством аддитивности.

$$\iint\limits_D (2x+y)\,dxdy = \iint\limits_{D_1} (2x+y)\,dxdy + \iint\limits_{D_2} (2x+y)\,dxdy =$$

$$= \int\limits_0^2 dy \int\limits_{x=\frac{y}{2}}^{x=y} (2x+y)\,dx + \int\limits_2^4 dy \int\limits_{x=\frac{y}{2}}^{x=2} (2x+y)\,dx = \int\limits_0^2 dy\left(x^2+xy\right)\Big|_{x=\frac{y}{2}}^{x=y} + \int\limits_2^4 dy\left(x^2+xy\right)\Big|_{x=\frac{y}{2}}^{x=2} =$$

$$= \int\limits_0^2 dy\left(y^2 + 2y^2 - \left(\frac{y^2}{4} + \frac{y^2}{2}\right)\right) + \int\limits_2^4 dy\left(4 + 2y - \left(\frac{y^2}{4} + \frac{y^2}{2}\right)\right) =$$

$$= \int\limits_0^2 \frac{5}{4} y^2 dy + \int\limits_2^4 \left(-\frac{3}{4}y^2 + 2y + 4\right)dy = \frac{5}{4}\frac{y^3}{3}\Bigg|_0^2 + \left(-\frac{1}{4}y^3 + y^2 + 4y\right)\Bigg|_2^4 = 28/3.$$

Примеры для самостоятельной работы

Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ по области D, ограниченной линиями:

1) $f(x,y) = x+y$, где D: $x+y=2$, $x=0$, $y=0$;
2) $f(x,y) = x-y$, где D: $y=2x+1$, $x=0$, $y=0$;
3) $f(x,y) = x^2+y$, где D: $y=x^2$, $y=2$;
4) $f(x,y) = x$, где D: $y=x^3$, $x+y=2$, $x=0$;
5) $f(x,y) = 3x+y$, где D: $y=x^2, y=2x$.

Пример аудиторной контрольной работы по дифференциальному и интегральному исчислениям ФМП

1 Найти частные производные второго порядка функции $z = \ln(xy)$.

2 Найти:

а) производную функции $z = x^3 y + 5x^2 - y^4 + 3xy - 4$ в точке $M_0(1,1)$ по направлению к точке $M_1(3,2)$;

б) градиент и скорость наибыстейшего возрастания функции из точки M_0.

3 Записать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = x^2 + 2y^2$ в точке $M_0(1,1,3)$.

4 Найти локальные экстремумы функции двух переменных $z = 3x^2 + 3xy + y^2 - 6x - 2y + 1$.

5 Вычислить $\iint\limits_D (x - 3y)\,dxdy$, где область D ограничена линиями $y = x$, $x = 2$, $y = 0$.

Список литературы

1 **Герасимович, А. И.** Математический анализ : справочное пособие : в 2 ч. / А. И. Герасимович, Н. А. Рысюк. – Минск: Вышэйшая школа, 1989. – Ч. 1. – 287 с.

2 **Герасимович, А. И.** Математический анализ : справочное пособие : в 2 ч. / А. И. Герасимович, Н. П. Кеда, М. Б. Сугак. – Минск : Вышэйшая школа, 1990. – Ч. 2. – 272 с.

3 **Сухая, Т. А.** Задачи по высшей математике : учебное пособие : в 2 ч. / Т. А. Сухая, В. Ф. Бубнов. – Минск : Вышэйшая школа, 1993. – Ч. 1. – 416 с.

4 **Сухая, Т. А.** Задачи по высшей математике : учебное пособие : в 2 ч. / Т. А. Сухая, В. Ф. Бубнов. – Минск : Вышэйшая школа, 1993. – Ч. 2. – 301 с.

5 **Письменный, Д. Т.** Конспект лекций по высшей математике : полный курс / Д. Т. Письменный. – Москва : Айрис-пресс, 2009. – 608 с.

6 **Жевняк, Р. М.** Высшая математика. Функции многих переменных. Интегральное исчисление функций одной и многих переменных. Векторный анализ: учебник / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. – Минск: Вышэйшая школа, 1993. – 411 с.