МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Высшая математика»

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА. МАТЕМАТИКА

Методические рекомендации к практическим занятиям для студентов всех специальностей и направлений подготовки дневной формы обучения

РЯДЫ

Могилев 2023

УДК 571.52
ББК 22.1
В93

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Высшая математика» «26» января 2023 г., протокол № 5

Составитель ст. преподаватель А. Н. Бондарев

Рецензент канд. физ.-мат. наук, доц. И. И. Маковецкий

Методические рекомендации к практическим занятиям по теме «Ряды» предназначены для студентов всех специальностей и направлений подготовки дневной формы обучения. Изложены теоретические вопросы, разобраны образцы решения примеров, приведены задачи для самостоятельного решения и задания для домашней работы.

Учебное издание

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА. МАТЕМАТИКА

Ответственный за выпуск	В. Г. Замураев
Корректор	И. В. Голубцова
Компьютерная верстка	Е. В. Ковалевская

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 56 экз. Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение:
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 07.03.2019.
Пр-т Мира, 43, 212022, г. Могилев.

Содержание

1 Числовые ряды. Достаточные признаки сходимости

1.1 Теоретическая часть

Выражение вида

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n,$$

где $u_n \in \mathbb{R}$, называется ***числовым рядом***. Числа u_1, u_2, …, u_n, … называются ***членами ряда***, число u_n – ***общим членом ряда***.

Суммы

$$S_1 = u_1, \quad S_2 = u_1 + u_2, \quad S_3 = u_1 + u_2 + u_3, \quad \ldots, \quad S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n, \quad \ldots$$

называются ***частичными суммами***, а S_n – ***n-й частичной суммой ряда***.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ называется ***сходящимся***, а S – его ***суммой***. Если же $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует или бесконечен, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ называется ***расходящимся***. Такой ряд суммы не имеет.

Сумма $r_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+k} + \ldots$ называется ***n-м остатком ряда***. Если ряд сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$.

Необходимый признак сходимости. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то его общий член стремится к нулю, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

Достаточные признаки сходимости.

Признак сравнения. Пусть даны знакоположительные ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$. Если для всех n (или начиная с некоторого номера n) выполняется неравенство $u_n \le v_n$, то из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ следует сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, а из расходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ следует расходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$.

Предельный признак сравнения. Пусть даны знакоположительные ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$. Если существует конечный, отличный от нуля, предел $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n}$, то два ряда сходятся или расходятся одновременно.

В качестве рядов для сравнения применяют следующие «эталонные» ряды:
1) ***геометрический ряд*** или ***ряд геометрической прогрессии***

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n \; - \; \begin{cases} \text{сходится при } |q| < 1, \\ \text{расходится при } |q| \ge 1; \end{cases}$$

2) ***обобщенный гармонический ряд*** или ***ряд Дирихле***

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \; - \; \begin{cases} \text{сходится при } \alpha > 1, \\ \text{расходится при } \alpha \le 1. \end{cases}$$

Признак Даламбера. Пусть дан знакоположительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и существует конечный или бесконечный предел $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$. Тогда при $l < 1$ ряд сходится, при $l > 1$ ряд расходится, при $l = 1$ нужны дополнительные исследования.

Признак Коши. Пусть дан знакоположительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и существует конечный или бесконечный предел $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$. Тогда при $l < 1$ ряд сходится, при $l > 1$ ряд расходится, при $l = 1$ нужны дополнительные исследования.

Интегральный признак Коши. Если члены знакоположительного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ таковы, что $u_n = f(n) \;\; \forall n \in \mathbb{N}$, где $f(x)$ – непрерывная положительная монотонно убывающая на $[1; +\infty)$ функция, то ряд сходится (расходится) тогда и только тогда, когда сходится (расходится) интеграл $\int_{1}^{+\infty} f(x)\,dx$.

1.2 Образцы решения примеров

Пример 1 – Дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$. Установить сходимость этого ряда и найти его сумму.

Решение

Запишем n-ю частичную сумму ряда и преобразуем ее:

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$, то данный ряд сходится и его сумма $S=1$.

Пример 2 – Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{5n+1}$.

Решение

Применим необходимый признак сходимости. Так как

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{5n+1}=\frac{1}{5}\neq 0,$$

то данный ряд расходится.

Пример 3 – Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\,3^n}$.

Решение

Сравним общий член данного ряда с общим членом ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$, который является геометрическим рядом с $q=\frac{1}{3}<1$, а значит, он сходится. Так как $\frac{1}{n\,3^n}<\frac{1}{3^n}$ $\left(\forall n\geq 2\right)$, то по признаку сравнения исходный ряд сходится.

Пример 4 – Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}\frac{\pi}{5n}$.

Решение

Сравним данный ряд с расходящимся гармоническим рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Так как

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{5n}:\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{5}\neq 0,$$

то по предельному признаку сравнения исходный ряд расходится как сравниваемый с расходящимся рядом.

Пример 5 – Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^{n-1}}$.

Решение

Применим признак Даламбера.

$$u_n=\frac{n^2}{2^{n-1}};\qquad u_{n+1}=\frac{(n+1)^2}{2^n};$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)^2}{2^n}:\frac{n^2}{2^{n-1}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)^2}{2^n}\cdot\frac{2^{n-1}}{n^2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2=\frac{1}{2}<1.$$

Следовательно, ряд сходится.

Пример 6 – Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n+3}{2n-1}\right)^n$.

Решение

Применим признак Коши.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{5n+3}{2n-1}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5n+3}{2n-1}=\frac{5}{2}>1.$$

Следовательно, ряд расходится.

Пример *7* – Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{\left(n^2+1\right)^2}$.

Решение

Функция $f(x)=\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}$ удовлетворяет всем условиям интегрального признака Коши. Найдем несобственный интеграл:

$$\int_1^{+\infty}\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}dx=\lim_{b\to+\infty}\int_1^{b}\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}dx=-\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x^2+1}\right)\Bigg|_1^b=-\left(0-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}.$$

Интеграл сходится, а значит, данный ряд также сходится.

1.3 Примеры для самостоятельной работы

1 Написать первые пять членов ряда по заданному общему члену:

1) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n(n+2)}$;

2) $u_n = \dfrac{7n-5}{4^n}$;

3) $u_n = \dfrac{n^3}{(n+1)!}$;

4) $u_n = \dfrac{n!!}{n^n}$.

2 Написать простейшую формулу общего члена ряда:

1) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{10}+\ldots$;

2) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{5}+\dfrac{3}{8}+\dfrac{4}{11}+\dfrac{5}{14}+\ldots$;

3) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{3}+\dfrac{4}{4}+\dfrac{8}{5}+\dfrac{16}{6}+\ldots$;

4) $\dfrac{1}{1}+\dfrac{2}{4}+\dfrac{6}{9}+\dfrac{24}{16}+\dfrac{120}{25}+\ldots$.

3 Доказать сходимость ряда и найти его сумму:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{3^{n-1}}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n+5^n}{10^n}$.

Ответы: 1) $\dfrac{1}{2}$; 2) $\dfrac{1}{4}$; 3) $\dfrac{3}{4}$; 4) $\dfrac{5}{4}$.

4 Проверить, выполняется ли необходимый признак сходимости:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{10n+1}$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+1}{2n+1}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2-n}{n^3+2n^2-1}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{5^n}{n+2}$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\dfrac{n^2+1}{n-5}$;

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\sin\dfrac{1}{n}$;

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{\ln(n+1)}$;

8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{3}{n}\right)^n$.

5 Исследовать ряды на сходимость, применяя признак сравнения:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$;

2) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{\ln n}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n2^n}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n}{4^n+1}$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\operatorname{arctg} n+1}{n^2}$;

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}$;

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$; 8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^{n+1}}$.

6 Исследовать ряды на сходимость, применяя предельный признак сравнения:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{n^2+2}$; 5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n}}{(2n-1)\left(5\sqrt[3]{n}-1\right)}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3-n}{n^4+5n^2-7}$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$; 7) $\sum_{n=1}^{\infty}\arcsin\frac{1}{\sqrt{n}}$;

4) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$; 8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n+2}{3^n+4}$.

7 Исследовать ряды на сходимость, применяя признак Даламбера:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n(3n-1)}$; 5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{7^n(n+3)!}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{3^n}$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!\sqrt{2n+5}}{2^n}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n^2}$; 7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}$; 8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[4]{n}}{3^n}$.

8 Исследовать ряды на сходимость, применяя признак Коши:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{3n+1}\right)^n$; 5) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n-3}{4n}\right)^{n^2}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2+7n}{n^2-3n+5}\right)^n$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\arcsin^n\frac{3}{n}$; 7) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}^n\frac{n}{5}$; 8) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$.

9 Исследовать ряды на сходимость, применяя интегральный признак Коши:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n-2}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+4}$;

3) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)\sqrt{2n-1}}$;

6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2-1}$;

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)^3}$;

8) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n\ln\ln n}$.

10 Исследовать ряды на сходимость:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n^3+1}{4n^3-2}\right)^n$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-6n+13}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{4+n^2}}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+2)}{2^n}$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\cdot5\cdot6\cdot\ldots\cdot(n+3)}{5\cdot7\cdot9\cdot\ldots\cdot(2n+3)}$;

6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-2}{n^3}$;

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{5n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$;

8) $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}\frac{1}{n\sqrt{n}}$.

1.4 Домашнее задание

1 Написать простейшую формулу общего члена ряда:

1) $2\frac{1}{4}+1\frac{9}{16}+1\frac{13}{36}+1\frac{17}{64}+\ldots$; 2) $\left(\frac{4}{3}\right)^2+\left(\frac{5}{6}\right)^3+\left(\frac{6}{9}\right)^4+\left(\frac{7}{12}\right)^5+\ldots$.

2 Доказать сходимость ряда и найти его сумму:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+4^n}{12^n}$.

Ответы: 1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{5}{6}$.

3 Исследовать ряды на сходимость:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n^2+4)^2}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{3^n n!}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+3)}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{4n^2+1}\right)^{2n}$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2n+1}$;

6) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^3 n}$.

2 Знакочередующиеся и знакопеременные ряды

2.1 Теоретическая часть

Числовой ряд вида

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n,$$

где $u_n > 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$, называется ***знакочередующимся***. В нем положительные и отрицательные члены следуют друг за другом поочередно.

Для знакочередующихся рядов имеет место следующий достаточный признак сходимости.

Признак Лейбница. Если члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n$ таковы, что $u_1 > u_2 > u_3 > \ldots > u_n > \ldots$ и $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, то ряд сходится, причем его сумма $0 < S \le u_1$.

Следствие. Остаток $r_n = (-1)^n \left(u_{n+1} - u_{n+2} + \ldots\right)$ всегда удовлетворяет условию $|r_n| \le u_{n+1}$.

Числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется ***знакопеременным***, если он содержит бесконечное число как положительных, так и отрицательных членов.

Знакопеременный ряд называется ***абсолютно сходящимся***, если сам он сходится и сходится ряд, составленный из модулей его членов. Знакопеременный ряд называется ***условно сходящимся***, если сам он сходится, а ряд, составленный из модулей его членов, расходится.

Из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, но из расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ не следует расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

2.2 Образцы решения примеров

Пример 1 – Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{2n+1}{n(n+1)}$.

Решение

Задан знакочередующийся ряд. Модули его членов монотонно убывают, общий член стремится к нулю, следовательно, по признаку Лейбница ряд сходится.

Рассмотрим ряд, составленный из модулей членов данного ряда, т. е. ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n(n+1)}$. Сравним его с расходящимся гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ и применим предельный признак сравнения. Так как

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{n(n+1)}:\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}=2\neq 0,$$

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n(n+1)}$ расходится, а значит, исходный ряд сходится условно.

Пример 2 – Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n^2}{3n^2+n}$.

Решение

Имеем знакочередующийся ряд. Второе условие признака Лейбница здесь не выполняется:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{3n^2+n}=\frac{1}{3}\neq 0.$$

Так как необходимое условие сходимости ряда не выполняется, то данный ряд расходится.

Пример 3 – Исследовать на сходимость ряд

$$1-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{3}{5^2}-\frac{1}{6^2}-\frac{1}{7^2}+\ldots.$$

Решение

Данный ряд не является знакочередующимся, следовательно, нельзя применить признак Лейбница. Рассмотрим ряд из модулей его членов:

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots.$$

Этот ряд сходится, как ряд Дирихле при $\alpha=2>1$. Следовательно, исходный ряд сходится абсолютно.

Пример 4 – Исследовать на сходимость ряд

$$-3+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}-\frac{3}{5^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}\left((-1)^n-2\sin\frac{\pi n}{2}\right)+\ldots.$$

Решение

Данный ряд не является знакочередующимся, следовательно, нельзя применить признак Лейбница. Рассмотрим ряд из модулей его членов:

$$3+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{3}{5^2}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left|(-1)^n-2\sin\frac{\pi n}{2}\right|.$$

Сравним этот ряд со сходящимся рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n^2}$ (ряд Дирихле при $\alpha=2>1$).

$$\frac{1}{n^2}\left|(-1)^n-2\sin\frac{\pi n}{2}\right|\le\frac{3}{n^2}\quad\forall n\in\mathbb{N}.$$

Следовательно, ряд из модулей сходится, а значит, исходный знакопеременный ряд сходится абсолютно.

Пример 5 – Вычислить сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2 2^n}$ с точностью до $\varepsilon=10^{-3}$.

Решение

Данный ряд – знакочередующийся и сходящийся, поэтому величина отброшенного при вычислении остатка ряда не превосходит по модулю первого отброшенного члена (по следствию из признака Лейбница).

Нужное число членов n найдём путём подбора из неравенства $\frac{1}{n^2 2^n}<10^{-3}$. При $n=6$ неравенство выполняется. Значит, если отбросить в данном ряде все члены, начиная с шестого, то требуемая точность будет обеспечена. Сумма ряда при этом будет

$$S\approx S_5=\frac{1}{2}-\frac{1}{16}+\frac{1}{72}-\frac{1}{256}+\frac{1}{800}=0{,}449.$$

2.3 Примеры для самостоятельной работы

1 Исследовать ряды на абсолютную и условную сходимость:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{n}{2^n}$;

3) $\sum\limits_{n=4}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n^2-9}$;

4) $\sum\limits_{n=4}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{n}{6n+5}$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos\pi n}{n^2+1}$;

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\dfrac{1}{n-\ln n}$;

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{2n-1}$;

8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{2n+1}{5n(n+1)}$;

9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n^2+n}{2}}\dfrac{n}{2^n}$;

10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\left(\dfrac{2n+1}{3n+1}\right)^n$;

11) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\dfrac{8n}{7^n\cdot(2n-3)}$;

12) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\operatorname{tg}\dfrac{1}{n\sqrt{n}}$;

13) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{10n+1}$;

14) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\dfrac{1}{\sqrt[4]{n^5}}$.

2 Сколько первых членов ряда достаточно взять, чтобы сумма отличалась от суммы ряда на величину, меньшую, чем 10^{-6}:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n^2}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$.

Ответы: 1) $n=10^3$; 2) $n=10^6$.

2.4 Домашнее задание

1 Исследовать ряды на абсолютную и условную сходимость:

1) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}\dfrac{1}{n\ln^2 n}$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{n}{3n-1}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{2n+1}{n}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\dfrac{1}{n\sqrt{n}}$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{\sqrt{n+5}}$;

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{(n+1)3^n}$;

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{n^{10}}{e^n}$;

8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\dfrac{1}{2n+7}\right)^n$.

2 Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{(0,7)^n}{(n-1)!}$, ограничившись его первыми тремя членами. Оценить абсолютную погрешность вычислений.

Ответ: $S=0,38$; $\varepsilon=0,04$.

3 Функциональные и степенные ряды

3.1 Теоретическая часть

Пусть функции $u_i(x)\left(i=1,2,\ldots,n,\ldots\right)$ определены в области D_x. Выражение вида

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$$

называется ***функциональным рядом***.

Функциональный ряд называется ***сходящимся в точке*** $x=x_0$, если сходится числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n\left(x_0\right)$. Множество значений x, при которых ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ сходится, называется ***областью сходимости функционального ряда***. Обозначим ее D_s, причем $D_s\subset D_x$.

Если $S(x)$ – сумма ряда, а $S_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)$ – n-я частичная сумма, то его n-й остаток будет $r_n(x)=S(x)-S_n(x)=u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\ldots$. В области сходимости ряда $\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)=S(x)$, а $\lim\limits_{n\to\infty}r_n(x)=0$.

Функциональный ряд называется ***мажорируемым*** в области D, если существует сходящийся числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\left(\alpha_n>0\right)$ такой, что $\forall x\in D$ справедливы неравенства $\left|u_k(x)\right|\le\alpha_k\ \left(k=1,2,\ldots\right)$.

Степенным рядом называется функциональный ряд вида $\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(x-x_0\right)^n$, где $a_0,a_1,\ldots,a_n,\ldots$ – постоянные числа, называемые ***коэффициентами степенного ряда***, x_0 – фиксированное число.

При $x_0=0$ имеем степенной ряд вида $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$.

Теорема Абеля.

1 Если степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ сходится при некотором значении $x=x_1\ne 0$, то он абсолютно сходится при всех x, удовлетворяющих условию $|x|<|x_1|$.

2 Если степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ расходится при некотором значении $x=x_2$, то он расходится при всех x, удовлетворяющих условию $|x|>|x_2|$.

Неотрицательное число R такое, что при всех $|x|<R$ степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится, а при всех $|x|>R$ – расходится, называется ***радиусом сходимости степенного ряда***.

Интервал $(-R;\,R)$ называется ***интервалом сходимости степенного ряда***.

Радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ находят по формулам

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \qquad \text{или} \qquad R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}},$$

если указанные пределы существуют.

3.2 Образцы решения примеров

Пример 1 – Найти область сходимости функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \ln^n x$.

Решение

Данный ряд является суммой геометрической прогрессии с $q=\ln x$. Такой ряд сходится, если $|q|=|\ln x|<1$, т. е. при $-1<\ln x<1$. Поэтому областью сходимости исследуемого ряда является интервал $D_s:\frac{1}{e}<x<e$. Так как $D_x: x>0$, то $D_s\subset D_x$.

Пример 2 – Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{3^n\sqrt{n}}$.

Решение

$$a_n=\frac{2^n}{3^n\sqrt{n}}; \qquad a_{n+1}=\frac{2^{n+1}}{3^{n+1}\sqrt{n+1}}.$$

Найдём радиус сходимости:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^n}{3^n\sqrt{n}}:\frac{2^{n+1}}{3^{n+1}\sqrt{n+1}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n 3^{n+1}\sqrt{n+1}}{2^{n+1}3^n\sqrt{n}}=\frac{3}{2}\lim_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}}=\frac{3}{2}.$$

Следовательно, степенной ряд сходится в интервале $\left(-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$.

При $x=-\frac{3}{2}$ имеем знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$. По признаку Лейбница он сходится.

При $x=\frac{3}{2}$ имеем числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$. Данный ряд расходится, как ряд Дирихле при $\alpha=\frac{1}{2}<1$.

Таким образом, область сходимости есть промежуток $\left[-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$.

Пример 3 – Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$.

Решение

Найдём радиус сходимости:

$$a_n=\frac{1}{n!},\qquad a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)!},$$

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n!}:\frac{1}{(n+1)!}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}=\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty.$$

Таким образом, ряд сходится на всей числовой прямой.

3.3 Примеры для самостоятельной работы

1 Найти область сходимости ряда:

1) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)2^n}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}\left(\frac{x}{2}\right)^n$;

3) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n x^n}{n^2+1}$;

4) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5^n(x-1)^n}{3^n}$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{(2n-1)4^n}$;

6) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^{n-1}x^{2(n-1)}}{\sqrt{n^3-1}}$;

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\,x^{n-1}}{2^{n-1}\,3^n}$;

8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n x^n}{(2n+1)^2\sqrt{3^n}}$;

9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n}}{8^n}$;

10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\left(n+1\right)^2 x^n}{2^n}$;

11) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$;

12) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\left(x-4\right)^{2n-1}}{2n-1}$;

13) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\left(x-2\right)^n}{2^n}$;

14) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^{n-1}\frac{\left(x-2\right)^{2n}}{2n}$.

Ответы: 1) $-2\le x<2$; 2) $-2<x<2$; 3) $-\frac{1}{2}\le x\le\frac{1}{2}$; 4) $\frac{2}{5}<x<\frac{8}{5}$; 5) $-6\le x<2$; 6) $-\frac{\sqrt{2}}{2}\le x\le\frac{\sqrt{2}}{2}$; 7) $-6<x<6$; 8) $-2<x<2$; 9) $-\frac{\sqrt{3}}{5}\le x\le\frac{\sqrt{3}}{5}$; 10) $-2<x<2$; 11) $-1<x<1$; 12) $3<x<5$; 13) $0<x<4$; 14) $1\le x\le 3$.

3.4 Домашнее задание

1 Найти область сходимости ряда:

1) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{7^{n-1}x^n}{5^n\sqrt{n^2-1}}$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\left(x-3\right)^n}{5^n\sqrt{n^3-0,5}}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\left(x+5\right)^{2n-1}}{2n\,4^n}$;

4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\left(3n-2\right)\left(x-3\right)^n}{\left(n+1\right)^2 24^{n+1}}$.

Ответы: 1) $-\frac{5}{7}\le x<\frac{5}{7}$; 2) $-\frac{1}{2}\le x\le\frac{11}{2}$; 3) $-7<x<-3$; 4) $1\le x<5$.

4 Разложение функций в степенные ряды

4.1 Теоретическая часть

Если функция $y=f\left(x\right)$ раскладывается в степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n\left(x-x_0\right)^n$ с областью сходимости D_s, т. е. $f\left(x\right)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n\left(x-x_0\right)^n$ $\forall x\in D_s$, то этот ряд является ее ***рядом Тейлора*** в точке x_0:

$$f\left(x_0\right)+\frac{f'\left(x_0\right)}{1!}\left(x-x_0\right)+\frac{f''\left(x_0\right)}{2!}\left(x-x_0\right)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}\left(x_0\right)}{n!}\left(x-x_0\right)^n+\ldots=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}\left(x_0\right)}{n!}\left(x-x_0\right)^n.$$

Частный случай ряда Тейлора при $x_0 = 0$ называется ***рядом Маклорена*** и имеет вид:

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Если функция $f(x)$ имеет в некоторой δ-окрестности точки x_0 производные всех порядков, причём $\left|f^{(n)}(x)\right| \le M$ $(M = \mathrm{const})$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, то функция $f(x)$ в этой окрестности разложима в ряд Тейлора.

При разложении многих функций в степенные ряды часто применяются следующие основные (табличные) разложения:

1) $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!} \quad \forall x \in (-\infty; +\infty)$;

2) $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \quad \forall x \in (-\infty; +\infty)$;

3) $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \forall x \in (-\infty; +\infty)$;

4) $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n \quad \forall x \in (-1; 1)$;

5) $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{x^n}{n} \quad \forall x \in (-1; 1]$;

6) $\operatorname{arctg} x = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^7}{7} + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{x^{2n-1}}{2n-1} \quad \forall x \in [-1; 1]$;

7) $(1+x)^m = 1 + mx + \dfrac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dfrac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \ldots =$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n \quad \forall x \in (-1; 1).$$

Данные разложения позволяют существенно упростить процесс разложения функций в ряд Тейлора (Маклорена).

4.2 Образцы решения примеров

Пример 1 – Разложить функцию $y = x^4 - 3x^2 + 2x + 2$ по степеням разности $(x-1)$.

Решение

Воспользуемся формулой Тейлора при $x_0 = 1$. Имеем

$$y(1) = 2;$$

$$y'(1) = \left(4x^3 - 6x + 2\right)\Big|_{x=1} = 0;$$

$$y''(1) = \left(12x^2 - 6\right)\Big|_{x=1} = 6;$$

$$y'''(1) = 24x\big|_{x=1} = 24;$$

$$y^{\mathrm{IV}}(1) = 24;$$

$$y^{\mathrm{V}}(1) = y^{\mathrm{VI}}(1) = \ldots = 0.$$

Таким образом, получаем

$$x^4 - 3x^2 + 2x + 2 = 2 + \frac{6}{2!}(x-1)^2 + \frac{24}{3!}(x-1)^3 + \frac{24}{4!}(x-1)^4 =$$

$$= 2 + 3(x-1)^2 + 4(x-1)^3 + (x-1)^4.$$

Пример 2 – Разложить в ряд Тейлора функцию $f(x) = \cos x$ по степеням разности $\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Решение

$$f(x) = \cos x, \quad f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$f'(x) = -\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \quad f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$f''(x) = -\cos x = \cos\left(x + 2\cdot\frac{\pi}{2}\right), \quad f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$f'''(x) = \sin x = \cos\left(x + 3\cdot\frac{\pi}{2}\right), \quad f'''\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\ldots$$

$$f^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right); \quad f^{(n)}\left(\frac{\pi}{4}\right) = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad n = 0, 1, \ldots.$$

Таким образом, получаем

$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 - \frac{1}{1!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + \ldots + \right.$$

$$\left. + \frac{(-1)^{\frac{1}{2}n(n+1)}}{n!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^n + \ldots \right).$$

Найдем область сходимости полученного ряда.

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty.$$

Значит, ряд сходится $\forall x \in (-\infty; +\infty)$.

Пример 3 – Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x) = \dfrac{3}{(1-x)(1+2x)}$.

Решение

Разложим функцию на сумму простейших дробей.

$$\frac{3}{(1-x)(1+2x)} = \frac{1}{1-x} + \frac{2}{1+2x}.$$

Так как

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad (|x|<1), \qquad \frac{1}{1+2x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^n x^n \quad (|2x|<1),$$

то

$$\frac{3}{(1-x)(1+2x)} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n + 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(1 + (-1)^n 2^{n+1}\right)x^n.$$

Так как ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ сходится при $|x|<1$, а ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^n x^n$ – при $|x|<\dfrac{1}{2}$, то полученный ряд сходится к данной функции при $|x|<\dfrac{1}{2}$.

Пример 4 – Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x)=\sin\dfrac{2x^4}{3}$.

Решение

Применим разложение в ряд Маклорена функции $\sin x$, заменив в нем x на $\dfrac{2x^4}{3}$. Получим

$$\sin\frac{2x^4}{3}=\frac{2x^4}{3}-\frac{2^3x^{12}}{3^3\cdot 3!}+\frac{2^5x^{20}}{3^5\cdot 5!}-\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^{2n-1}x^{8n-4}}{3^{2n-1}(2n-1)!},\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

Пример 5 – Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x)=3^x$.

Решение

Так как $3^x=e^{\ln 3^x}=e^{x\cdot\ln 3}$, то, заменяя в разложении в ряд Маклорена функции e^x переменную x на произведение $x\cdot\ln 3$, получим

$$3^x=1+\frac{\ln 3}{1!}\cdot x+\frac{\ln^2 3}{2!}\cdot x^2+\frac{\ln^3 3}{3!}\cdot x^3+\ldots+\frac{\ln^n 3}{n!}\cdot x^n+\ldots,\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

4.3 Примеры для самостоятельной работы

1 Разложить многочлен $f(x)=x^5-4x^4+2x^3+2x+1$ в ряд по степеням разности $(x+1)$.

2 Разложить в ряд по степеням x функцию $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$, используя ряд Маклорена.

3 Разложить в ряд по степеням x функцию $f(x)$ и найти область сходимости полученного ряда:

1) $f(x)=e^{-x^2}$;
2) $f(x)=x\cos 2x$;
3) $f(x)=\cos^2 x$;
4) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$;
5) $f(x)=\ln(1-3x)$;
6) $f(x)=x\sin 2x$;
7) $f(x)=x^3\operatorname{arctg} x^2$;
8) $f(x)=\sin^2 3x$.

4 Разложить функцию $f(x)$ в окрестности точки x_0 в ряд Тейлора. Найти область сходимости полученного ряда к этой функции:

1) $f(x)=\dfrac{1}{x}, \quad x_0=-2$; 3) $f(x)=\ln\dfrac{1}{x^2-2x+2}, \quad x_0=1$.

2) $f(x)=\dfrac{1}{(x-3)^2}, \quad x_0=1$;

Ответы: 1) $-\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(x+2)^n}{2^n}, -4<x<0$; 2) $\dfrac{1}{4}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n+1}{2^n}(x-1)^n, -1<x<3$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}(x-1)^{2n}, 0\le x\le 2$.

4.4 Домашнее задание

1 Разложить функцию $f(x)$ в ряд Тейлора по степеням $(x-x_0)$:

1) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}, \quad x_0=3$; 2) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}, \quad x_0=2$.

2 Разложить функцию $f(x)$ в ряд Маклорена:

1) $f(x)=\cos 5x$; 3) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{e^x}}$;

2) $f(x)=x^3\operatorname{arctg} x$; 4) $f(x)=\ln\left(x^2-3x+2\right)$.

5 Приложения степенных рядов

5.1 Теоретическая часть

Приближенное вычисление значений функции.

Пусть требуется вычислить значение функции $f(x)$ при $x=x_0$ с заданной точностью $\varepsilon>0$. Если функция $f(x)$ на интервале $(-R, R)$ разлагается в степенной ряд и $x_0\in(-R,R)$, то точное значение $f(x_0)$ равно сумме этого ряда при $x=x_0$, т. е. $f(x_0)=a_0+a_1x_0+a_2x_0^2+\ldots+a_nx_0^n+\ldots$, а приближенное значение – частичной сумме $S_n(x_0)$, т. е. $f(x_0)\approx S_n(x_0)=a_0+a_1x_0+a_2x_0^2+\ldots+a_nx_0^n$.

Точность этого равенства увеличивается с ростом n. Абсолютная погрешность этого приближенного равенства равна модулю остатка ряда $|r_n(x_0)|$. Для рядов лейбницевского типа остаток ряда не будет превосходить модуля первого из отброшенных членов. В остальных случаях составляют ряд из модулей членов ряда и для него стараются найти положительный ряд с большими членами, который легко бы суммировался. Тогда в качестве оценки $\left|r_n(x_0)\right|$ берут величину остатка этого нового ряда.

Приближенное вычисление определенных интегралов.

Пусть требуется вычислить интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ с заданной точностью $\varepsilon > 0$. Если подынтегральную функцию $f(x)$ можно разложить в ряд по степеням x и интервал сходимости $(-R, R)$ включает в себя отрезок $[a,b]$, то для вычисления заданного интеграла можно воспользоваться почленным интегрированием этого ряда. Ошибку вычислений определяют так же, как и при вычислении значений функций.

Приближенное решение дифференциальных уравнений.

В случае, когда точно проинтегрировать дифференциальное уравнение не удается, его решение удобно искать в виде степенного ряда. При решении задачи Коши вида $y' = f(x, y), y(x_0) = y_0$ используется ряд Тейлора $y(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$, где $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$, а остальные производные находят путём последовательного дифференцирования уравнения и подстановки начальных данных в выражения для этих производных.

5.2 Образцы решения примеров

Пример 1 – Вычислить $\sqrt[3]{130}$ с точностью до $\varepsilon = 10^{-4}$.

Решение

Воспользуемся разложением в ряд Маклорена функции $(1+x)^m$:

$$\sqrt[3]{130} = \left(5^3 + 5\right)^{\frac{1}{3}} = 5\left(1 + \frac{1}{5^2}\right)^{\frac{1}{3}} = 5 + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} - 1\right)}{2! \cdot 5^3} + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} - 1\right)\left(\frac{1}{3} - 2\right)}{3! \cdot 5^5} + \ldots =$$

$$= 5 + \frac{1}{3 \cdot 5} - \frac{1}{3^2 \cdot 5^3} + \frac{1}{3^4 \cdot 5^4} - \ldots.$$

Начиная с четвертого члена, отбрасываем все остальные члены, т. к. $\frac{1}{3^4 \cdot 5^4} < 0,0001$. Поэтому

$$\sqrt[3]{130} \approx 5 + 0,06667 - 0,00089 \approx 5,0658.$$

Пример 2 – Вычислить $\int\limits_0^1 \sin x^2\, dx$ с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$.

Решение

Воспользуемся разложением в ряд Маклорена функции $\sin x$, заменив в нем x на x^2:

$$\sin x^2 = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{4n-2}}{(2n-1)!} + \ldots.$$

Данный ряд сходится на всей числовой прямой, поэтому его можно почленно интегрировать:

$$\int\limits_0^1 \sin x^2 dx = \int\limits_0^1 \left(x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{4n-2}}{(2n-1)!} + \ldots \right) dx =$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{7\cdot 3!} + \frac{x^{11}}{11\cdot 5!} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{4n-1}}{(4n-1)(2n-1)!} + \ldots \right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{7\cdot 3!} + \frac{1}{11\cdot 5!} - \ldots \approx \frac{1}{3} - \frac{1}{7\cdot 3!} \approx 0{,}3333 - 0{,}0381 = 0{,}295.$$

Все члены разложения, начиная с третьего, отброшены, т. к. они меньше $\varepsilon = 10^{-3}$.

Пример 3 – Найти первые пять членов разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения $y' = x^2 + y^2$, если $y(1) = 1$.

Решение

Из условия следует, что

$$y'(1) = 1 + 1 = 2.$$

Дифференцируем исходное уравнение:

$$y'' = 2x + 2yy', \quad y''(1) = 6,$$

$$y''' = 2 + 2(y')^2 + 2yy'', \quad y'''(1) = 22,$$

$$y^{\mathrm{IV}} = 4y'y'' + 2y'y'' + 2yy''', \quad y^{\mathrm{IV}}(1) = 116 \text{ и т. д.}$$

Таким образом, получаем

$$y(x)=1+2(x-1)+\frac{6(x-1)^2}{2}+\frac{22(x-1)^3}{6}+\frac{116(x-1)^4}{24}+\ldots=$$

$$=1+2(x-1)+3(x-1)^2+\frac{11}{3}(x-1)^3+\frac{29}{6}(x-1)^4+\ldots.$$

5.3 Примеры для самостоятельной работы

1 С помощью степенных рядов вычислить с точностью $\varepsilon=0{,}001$:

1) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{e}}$;

2) $\sqrt[3]{10}$;

3) $\ln\dfrac{3}{2}$;

4) $\cos 10^\circ$.

Ответы: 1) $0{,}819$; 2) $2{,}154$; 3) $0{,}406$; 4) $0{,}985$.

2 Вычислить определённые интегралы с точностью $\varepsilon=0{,}001$:

1) $\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+x^3}\,dx$;

2) $\int\limits_0^1\cos\sqrt{x}\,dx$;

3) $\int\limits_0^{\frac{1}{4}}e^{-x^2}dx$;

4) $\int\limits_0^{0,1}\dfrac{\ln(1+x)}{x}dx$.

Ответы: 1) $0{,}508$; 2) $0{,}764$; 3) $0{,}245$; 4) $0{,}098$.

3 Записать первые пять ненулевых членов разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения:

1) $y'=e^y+xy$, $y(0)=0$;

2) $y'=1+x+x^2-2y^2$, $y(1)=1$;

3) $y''=x^2y-y'$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$.

5.4 Домашнее задание

1 С помощью степенных рядов вычислить с точностью $\varepsilon=0{,}001$:

1) $\sqrt[3]{70}$;

2) $\ln 5$;

3) $\sqrt[6]{738}$;

4) $\cos 2^\circ$.

Ответы: 1) $4{,}121$; 2) $1{,}609$; 3) $3{,}006$; 4) $0{,}999$.

2 Вычислить $\int\limits_0^{0,5}\dfrac{\sin 2x}{x}dx$ с точностью $\varepsilon=0{,}001$.

Ответ: $0{,}946$.

3 Найти первых три ненулевых члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения $y' = x^2 - y^3$, если $y(1) = 1$.

6 Ряды Фурье

6.1 Теоретическая часть

Функциональный ряд вида

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right),$$

где

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx,$$

называется ***рядом Фурье*** функции $f(x)$ с периодом $T = 2\pi$.

Теорема Дирихле. Если функция $f(x)$ – периодическая с периодом $T = 2\pi$, кусочно-монотонная и ограниченная на $[-\pi; \pi]$, то ряд Фурье, построенный для этой функции, сходится во всех точках. Сумма полученного ряда $S(x)$ равна значению функции $f(x)$ в точках непрерывности. В точках разрыва сумма ряда равна среднему арифметическому пределов функции слева и справа от точки разрыва.

Если $f(x)$ – чётная функция, то разложение принимает вид:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx, \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \quad b_n = 0.$$

Если $f(x)$ – нечетная функция, то разложение принимает вид:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx,$$

$$a_0 = 0, \quad a_n = 0, \quad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx.$$

Для функции с любым периодом $T=2l$ разложение в ряд Фурье и формулы для коэффициентов Фурье будут следующими:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{\pi nx}{l}+b_n\sin\frac{\pi nx}{l}\right);$$

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\,dx,\quad a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}\,dx,\quad b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}\,dx.$$

Если $f(x)$ – чётная функция, то

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{\pi nx}{l};$$

$$a_0=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)\,dx,\quad a_n=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}\,dx,\quad b_n=0.$$

Если $f(x)$ – нечётная функция, то

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{\pi nx}{l};$$

$$a_0=0,\quad a_n=0,\quad b_n=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}\,dx.$$

6.2 Образцы решения примеров

Пример 1 – Разложить в ряд Фурье функцию с периодом 2π:

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при}\quad -\pi\le x<0;\\ x & \text{при}\quad 0\le x\le\pi.\end{cases}$$

Решение

Так как функция является кусочно-монотонной и ограниченной, то она разлагается в ряд Фурье. Найдём коэффициенты ряда.

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\,dx=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{x^2}{2}\bigg|_0^{\pi}=\frac{\pi^2}{2\pi}=\frac{\pi}{2};$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\,dx = \left[\begin{array}{c} u = x, \quad du = dx \\ dv = \cos nx\,dx, \quad v = \frac{1}{n}\sin nx \end{array}\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{x}{n}\sin nx\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{1}{n}\sin nx\,dx\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{n}\sin n\pi + \frac{1}{n^2}\cos nx\Big|_0^{\pi}\right) = \frac{1}{\pi n^2}\left((-1)^n - 1\right);$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx\,dx = \left[\begin{array}{c} u = x, \quad du = dx \\ dv = \sin nx\,dx, \quad v = -\frac{1}{n}\cos nx \end{array}\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{x}{n}\cos nx\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\frac{1}{n}\cos nx\,dx\right) = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi}{n}\cos n\pi + \frac{1}{n^2}\sin nx\Big|_0^{\pi}\right) = (-1)^{n-1}\frac{1}{n}.$$

Таким образом, получаем

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{\pi(2n-1)^2}\cos(2n-1)x + \frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin nx\right).$$

Этот ряд сходится к заданной функции с $T = 2\pi$ при всех $x \neq (2n-1)\pi$. В точках $x = (2n-1)\pi$ сумма ряда $S = \frac{\pi + 0}{2} = \frac{\pi}{2}$.

График функции изображён на рисунке 1.

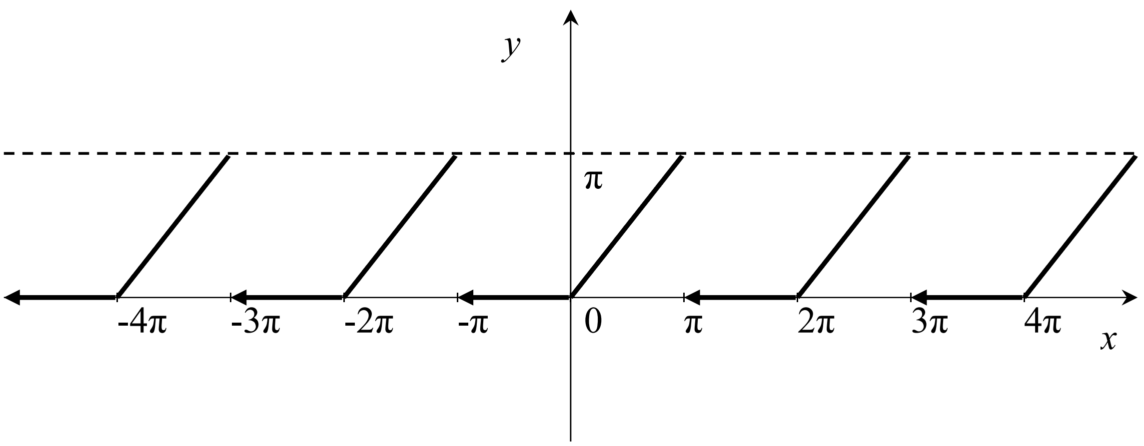

Рисунок 1

Пример 2 – Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = |x|$, где $-\pi < x \le \pi$.

Решение

Период $T = 2\pi$, функция чётная и удовлетворяет условиям теоремы о разложимости, следовательно, её можно разложить в ряд Фурье.

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{\pi} = \pi;$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\,dx = \left[\begin{array}{c} u = x, \quad du = dx \\ dv = \cos nx\,dx, \quad v = \frac{1}{n}\sin nx \end{array}\right] =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{x}{n}\sin nx\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{1}{n}\sin nx\,dx\right) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{n}\sin n\pi + \frac{1}{n^2}\cos nx\Big|_0^{\pi}\right) = \frac{2}{\pi n^2}\big((-1)^n - 1\big) =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{при } n \text{ четном;} \\ -\dfrac{4}{\pi n^2} & \text{при } n \text{ нечетном;} \end{cases}$$

$$b_n = 0.$$

Таким образом, получаем

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{1}{9}\cos 3x + \frac{1}{25}\cos 5x + \ldots + \frac{1}{(2n+1)^2}\cos(2n+1)x + \ldots\right).$$

Пример 3 – Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} & \text{при } -\pi < x < 0; \\ 0 & \text{при } x = \pi. \end{cases}$$

Решение

Функция нечетная, разрывная и удовлетворяет условиям теоремы о разложимости, следовательно, её можно разложить в ряд Фурье.

$$a_0 = a_n = 0;$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{x}{2}\sin nx\,dx = \left[\begin{array}{c} u = \frac{x}{2}, \quad du = \frac{1}{2}dx \\ dv = \sin nx\,dx, \quad v = -\frac{1}{n}\cos nx \end{array}\right] =$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{x}{2n}\cos nx\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\frac{1}{2n}\cos nx\,dx\right)=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi}{2n}\cos n\pi+\frac{1}{2n^2}\sin nx\Big|_0^{\pi}\right)=(-1)^{n+1}\frac{1}{n}.$$

Таким образом, получаем

$$f(x)=\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x-\frac{1}{4}\sin 4x+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\sin nx+\ldots.$$

Пример 4 – Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x)=\begin{cases}-1 & \text{при } -2<x<0;\\ 2 & \text{при } 0\le x\le 2.\end{cases}$$

Решение

Функция имеет период $T=4$, разрывная и удовлетворяет условиям теоремы о разложимости, следовательно, её можно разложить в ряд Фурье.

$$a_0=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}f(x)\,dx=\frac{1}{2}\int_{-2}^{0}(-1)\,dx+\frac{1}{2}\int_0^2 2\,dx=-\frac{1}{2}x\Big|_{-2}^{0}+x\Big|_0^2=-\frac{1}{2}(0+2)+2=1;$$

$$a_n=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}f(x)\cos\frac{\pi nx}{2}dx=\frac{1}{2}\int_{-2}^{0}(-1)\cos\frac{\pi nx}{2}dx+\frac{1}{2}\int_0^2 2\cos\frac{\pi nx}{2}dx=$$

$$=\frac{1}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{2}\Big|_0^{-2}+\frac{2}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{2}\Big|_0^{2}=\frac{2}{\pi n}(\sin\pi n-\sin 0)=0;$$

$$b_n=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}f(x)\sin\frac{\pi nx}{2}dx=\frac{1}{2}\int_{-2}^{0}(-1)\sin\frac{\pi nx}{2}dx+\frac{1}{2}\int_0^2 2\sin\frac{\pi nx}{2}dx=$$

$$=\frac{1}{\pi n}\cos\frac{\pi nx}{2}\Big|_{-2}^{0}-\frac{2}{\pi n}\cos\frac{\pi nx}{2}\Big|_0^{2}=\frac{1}{\pi n}\left(1-(-1)^n\right)-\frac{2}{\pi n}\left((-1)^n-1\right)=$$

$$=-\frac{3}{\pi n}\left((-1)^n-1\right).$$

Таким образом, получаем

$$f(x)=\frac{1}{2}+\frac{6}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2}.$$

График функции изображен на рисунке 2.

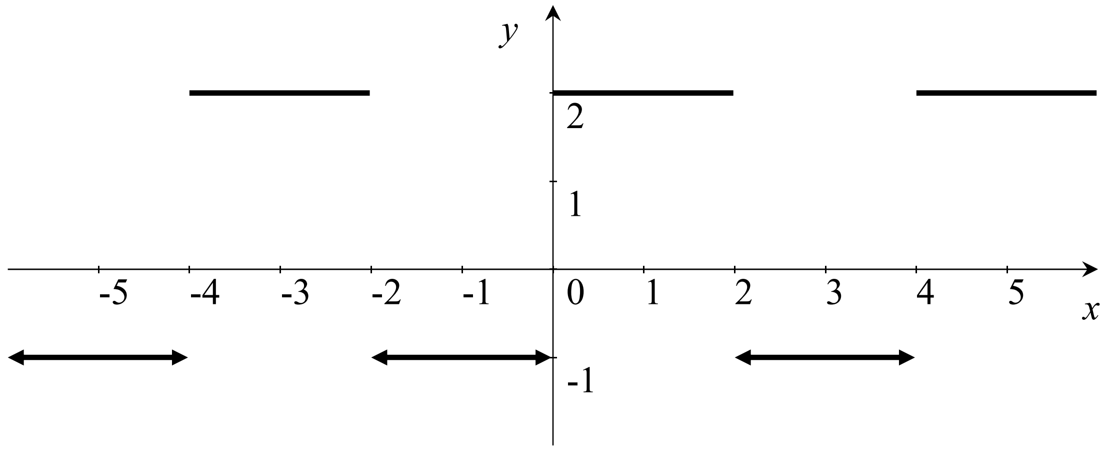

Рисунок 2

6.3 Примеры для самостоятельной работы

1 Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$ с периодом 2π, заданную на отрезке $[-\pi; \pi]$:

1) $f(x)=\begin{cases} 0 \quad \text{при} \quad -\pi \le x < 0; \\ x-1 \quad \text{при} \quad 0 \le x < \pi; \end{cases}$

2) $f(x)=\begin{cases} 2x+3 \quad \text{при} \quad -\pi \le x < 0; \\ 0 \quad \text{при} \quad 0 < x \le \pi; \end{cases}$

3) $f(x)=(x-1)^2$;

4) $f(x)=2-3x$.

Ответы:

1) $f(x)=\dfrac{\pi-2}{4}-\dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos((2n-1)x)}{(2n-1)^2}+\dfrac{\pi-2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin((2n-1)x)}{2n-1}-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin(2nx)}{2n}$;

2) $f(x)=\dfrac{3-\pi}{2}+\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos((2n-1)x)}{(2n-1)^2}+\dfrac{2(\pi-3)}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin((2n-1)x)}{2n-1}-2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin(2nx)}{2n}$;

3) $f(x)=\dfrac{\pi^2-3\pi+3}{3}+\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2-\pi}{(2n-1)^2}\cos((2n-1)x)+4\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos(2nx)}{(2n)^2}$;

4) $f(x)=2+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\sin nx}{n}$.

2 Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$ с периодом $2l$:

1) $f(x)=|x|$ на $(-1;1)$;

2) $f(x)=2x$ на $(-1;1)$;

3) $f(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad -3<x\le 0;\\ x & \text{при} \quad 0<x\le 3;\end{cases}$

4) $f(x)=x-\dfrac{x^2}{2}$ на полупериоде $[0;2]$.

Ответы: 1) $f(x)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{4}{\pi^2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\cos((2n+1)\pi x)}{(2n+1)^2}$;

2) $f(x)=1-\dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin(2n\pi x)}{n}$;

3) $f(x)=\dfrac{3}{4}-\dfrac{6}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos\dfrac{(2n-1)\pi x}{3}}{(2n-1)^2}-\dfrac{3}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}\sin\dfrac{n\pi x}{3}$;

4) $f(x)=\dfrac{1}{3}-\dfrac{4}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1+(-1)^n}{n^2}\cos\dfrac{n\pi x}{2}$.

6.4 Домашнее задание

1 Разложить функцию $f(x)$ в ряд Фурье на интервале $(-\pi;\pi)$:

1) $f(x)=\pi+x$;

2) $f(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad -\pi\le x<0;\\ 4-2x & \text{при} \quad 0\le x\le \pi.\end{cases}$

Ответы: 1) $f(x)=\pi+2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$;

2) $f(x)=\dfrac{4-\pi}{2}+\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos((2n-1)x)}{(2n-1)^2}+\dfrac{2(4-\pi)}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin((2n-1)x)}{2n-1}+2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin(2nx)}{2n}$.

2 Разложить функцию $f(x)=4x-3$ в ряд Фурье на промежутке $(-5;5)$.

Ответ: $f(x)=-3+\dfrac{40}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\dfrac{\pi n x}{5}$.

Список литературы

1 **Гусак, А. А.** Высшая математика: учебник для студентов вузов: в 2 т. / А. А. Гусак. – 7-е изд. – Минск: ТетраСистемс, 2009. – Т. 2. – 448 с.

2 **Данко, П. Е.** Высшая математика в упражнениях и задачах: учебное пособие для втузов: в 2 ч. / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – 5-е изд. – Москва: Высшая школа, 1999. – Ч. 2. – 416 с.

3 **Кудрявцев, Л. Д.** Краткий курс математического анализа: учебник: в 2 т. Т. 1: Дифференциальное и интегральное исчисления функций одной переменной. Ряды / Л. Д. Кудрявцев. – 4-е изд. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2015. – 444 с.

4 **Лунгу, К. Н.** Высшая математика. Руководство к решению задач: учебное пособие: в 2 ч. / К. Н. Лунгу, Е. В. Макаров. – 2-е изд. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2015. – Ч. 2. – 384 с.

5 **Письменный, Д. Т.** Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д. Т. Письменный. – 16-е изд. – Москва: АЙРИС-пресс, 2019. – 608 с.

6 Сборник задач по курсу высшей математики: учебное пособие для вузов / Под ред. Г. И. Кручковича. – 3-е изд. – Москва: Высшая школа, 1973. – 576 с.

7 Сборник задач по математике для втузов: учебное пособие для втузов: в 2 ч. Ч. 2: Специальные разделы математического анализа / Под ред. А. В. Ефимова, Б. П. Демидовича. – 2-е изд. – Москва: Наука, 1986. – 368 с.

8 Сборник индивидуальных заданий по высшей математике: учебное пособие: в 3 ч. / А. П. Рябушко [и др.]; под общ. ред. А. П. Рябушко. – Минск: Вышэйшая школа, 1991. – Ч. 3. – 288 с.

9 **Шипачев, В. С.** Высшая математика: учебник / В. С. Шипачев. – Москва: ИНФРА-М, 2023. – 479 с.