1996. Т. 32, № 1. С. 131 — 132

УДК 517.928.1

ОБ ОГРАНИЧЕННЫХ НА ПОЛУОСИ РЕШЕНИЯХ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В. Н. Лаптинский

Исследование задачи об ограниченных решениях дифференциальных уравнений представляет интерес как для теории дифференциальных уравнений [1, 2], так и в связи с рядом конкретных задач [3, 4].

В настоящей работе на основе подхода [5] изучен вопрос существования и построения ограниченных на полуоси $J = [0, \infty)$ решений уравнения

$$dy/dt = p(t)y^m + q(t), \tag{1}$$

где m — целое число $(m > 1)$, $p(t)$, $q(t)$ — непрерывные и ограниченные в J функции, подчиненные условиям

$$a \equiv \int\limits_0^\infty |p(\tau)|\,d\tau < \infty, \quad b \equiv \sup_{t\geq 0} |\tilde{q}(t)| < \infty, \quad \tilde{q}(t) = \int\limits_0^t q(\tau)\,d\tau.$$

Будем исследовать задачу Коши для уравнения (1) с условием

$$y(0) = \lambda. \tag{2}$$

Примем следующие обозначения: $\varphi(\rho, \varepsilon) = a\rho^m - \rho + \varepsilon + b$, $\beta = (1/ma)^{1/(m-1)}$, $\|y\|_C = \sup\limits_{t\geq 0} |y(t)|$, где $\varepsilon = |\lambda|$, C — банахово пространство $C[0, \infty)$ функций, непрерывных и ограниченных на полуоси.

Иными словами, исследуется нелинейное асимптотическое равновесие в случае уравнения (1).

Теорема. *Пусть выполнено условие*

$$\varphi(\beta, 0) < 0. \tag{3}$$

Тогда решения уравнения (1) с начальными значениями, принадлежащими области

$$|\lambda| < \beta - a\beta^m - b, \tag{4}$$

существуют и ограничены на полуоси $[0, \infty)$ и могут быть представлены как предел равномерно сходящейся последовательности ограниченных функций. Эти решения принадлежат области $|y| \leq \rho$, где

$$\rho_1(\varepsilon) \leq \rho < \beta, \tag{5}$$

$\rho_1(\varepsilon)$ — положительный корень уравнения $\varphi(\rho, \varepsilon) = 0$.

Доказательство. Для доказательства теоремы применим конструктивный способ [5], вытекающий из принципа сжатых отображений [6].

Вместо задачи (1), (2) рассмотрим эквивалентное интегральное уравнение

$$y(t) = \lambda + \int\limits_0^t \rho(\tau)y^m(\tau)\,d\tau + \tilde{q}(t). \tag{6}$$

Будем исследовать разрешимость этого уравнения в пространстве $C[0, \infty)$. Сходимость последовательности в $C[0, \infty)$ означает равномерную сходимость на полуоси $[0, \infty)$. Для отыскания требуемых решений используем алгоритм

$$y_k(t) = \lambda + \int\limits_0^t \rho(\tau)y_{k-1}^m(\tau)\,d\tau + \tilde{q}(t), \tag{7}$$

где $k = 1, 2, \ldots$, $y_0 = 0$.

Рассмотрим уравнение

$$\varphi(\rho, \varepsilon) = 0. \tag{8}$$

Из соотношения $\varphi(0, \varepsilon) > 0$ и условия (3), которое определяет неравенство $\varphi(\beta, \varepsilon) < 0$, следует, что для значений λ, принадлежащих области (4), уравнение (8) имеет решения на интервале $(0, \beta)$.

На промежутке $[0, \beta)$ справедливо неравенство $d\varphi(\rho, \varepsilon)/d\rho \equiv ma\rho^{m-1} - 1 < 0$. Поскольку функция $\varphi(\rho, \varepsilon)$ непрерывна на отрезке $[0, \beta]$, то уравнение (8) имеет на этом отрезке единственное решение $\rho_1 = \rho_1(\varepsilon)$.

Из соотношения

$$\varphi(\rho,\varepsilon) = \int\limits_{\rho_1}^{\rho} (mas^{m-1} - 1)\, ds$$

видно, что для значений λ, ρ, принадлежащих (4), (5), выполняются неравенства

$$a\rho^m + \varepsilon + b \le \rho, \tag{9}$$

$$ma\rho^{m-1} < 1, \tag{10}$$

являющиеся условиями принципа сжатых отображений, примененного к интегральному уравнению (6).

Используя условие (9), можно показать, что функции $y_k(t)$, $k = 1, 2, \dots$, принадлежат замкнутому шару $\|y\|_C \le \rho$ пространства $C[0,\infty)$. Докажем равномерную относительно $t \in J$ сходимость построенной последовательности функций. Исходя из (7), получим

$$y_{k+1}(t) - y_k(t) = \int\limits_0^t \rho(\tau)(y_k^m(\tau) - y_{k-1}^m(\tau))\, d\tau. \tag{11}$$

На основе формулы Адамара имеем равенство

$$y_k^m - y_{k-1}^m = m \int\limits_0^1 (y_{k-1} + \mu(y_k - y_{k-1}))^{m-1} d\mu\, (y_k - y_{k-1}), \tag{12}$$

с помощью которого произведем оценки по норме в (11). Тогда получим

$$\|y_{k+1} - y_k\|_C \le r\|y_k - y_{k-1}\|_C, \tag{13}$$

где $r = ma\rho^{m-1}$, причем условие (10) обеспечивает сжимаемость на данном множестве интегрального оператора в (6).

Далее нетрудно доказать, что последовательность функций $y_k(t)$, $k = 1, 2, \dots$, равномерно сходится к функции $y(t)$, принадлежащей шару $\|y\|_C \le \rho$ и являющейся решением интегрального уравнения (6). Быстрота сходимости последовательности $\{y_k(t)\}_1^\infty$ к решению характеризуется неравенством $\|y - y_k\|_C \le$ $\le (r^k/(1-r))\|y_1 - y_0\|_C$, $k = 1, 2, \dots$

Применяя (13), можно получить коэффициентную равномерную оценку решения $\|y\|_C \le M$, где $M = (|\lambda| + b)/(1-r) \ge \rho_1(\varepsilon)$.

Замечание 1. С помощью условий (9), (10) можно показать, что оценка области начальных значений решений класса $C[0,\infty)$ уравнения (6) имеет вид $|\lambda| \le \rho - a\rho^m - b$, где $\rho_1(0) < \rho < \beta$.

Замечание 2. Анализ приемов получения соотношений (9), (10) показывает, что используемый подход может быть применен для исследования нелинейного асимптотического равновесия некоторых существенно нелинейных систем, например, систем с аналитическими по пространственным переменным правыми частями. Абстрактным вариантом этих задач являются операторные уравнения [6].

Литература

1. *Чезари Л.* Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1964.
2. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. М., 1967.
3. *Зубов В. И.* Лекции по теории управления. М., 1975.
4. *Сотский А. Б., Романенко А. А., Войтенков А. И., Хомченко А. В.* // II Международный симпозиум "Физические принципы и методы оптической обработки информации": Тез. докл. Гродно, 1993. С. 13.
5. *Лаптинский В. Н.* // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24, № 12. С. 2075 — 2083.
6. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. М., 1977.

Институт прикладной оптики
АН Беларуси

Поступила в редакцию
7 июля 1994 г.