ФЕВРАЛЬ 1972 г., ТОМ VIII, № 2

УДК 517.926.7

О ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ

В. Н. ЛАПТИНСКИЙ

Рассмотрим уравнение

$$dX/dt = A(t)\,X, \tag{1}$$

где X, A — $n\times n$ матрицы, $A(t)$ — вещественная матрица, непрерывная на промежутке $[0,\ b]$.

Нас будут интересовать представления фундаментальных матриц линейных дифференциальных систем с помощью рядов специального вида. Метод, предлагаемый ниже, по своему характеру близок к классическим методам и в первую очередь к методам И. А. Лаппо-Данилевского [1], Н. П. Еругина [2, 3], И. З. Штокало [4, 5]. Из последних работ по линейным системам, близких по тематике к излагаемой работе, приведем [6].

Наряду с (1) рассмотрим уравнение

$$dX/dt = \lambda A(t)\,X, \tag{2}$$

где λ — вещественный параметр.

Решение этого уравнения ищем в следующем виде:

$$X(t,\ \lambda) = \exp Z(t,\ \lambda),\quad Z(t,\ \lambda) = \sum_{k=1}^{\infty}\lambda^k Z_k(t),\quad Z_k(0) = 0. \tag{3}$$

Представление фундаментальных матриц в таком виде является наиболее характерным как для линейных систем, так и для некоторых классов нелинейных систем.

Согласно [8, 9], имеем

$$d(\exp Z)/dt = (\bar{q}Z)\exp Z, \tag{4}$$

$$\bar{q}Z = \int_0^1 \exp(\mu Z)\,\dot{Z}\exp(-\mu Z)\,d\mu,\quad \dot{Z} = dZ/dt.$$

Напомним, что

$$\bar{q}Z = \sum_{s=1}^{\infty}\frac{(-1)^{s-1}}{s!}K^{(s-1)},$$

$$K^{(0)} = \dot{Z},\ K^{(1)} = \dot{Z}Z - Z\dot{Z},\ \ldots,\ K^{(s)} = K^{(s-1)}Z - ZK^{(s-1)}.$$

Подставляя (3), (4) в (2), получим

$$(\bar{q}Z)\exp Z = \lambda A\exp Z. \tag{5}$$

Отсюда

$$\bar{q}Z = \lambda A. \tag{6}$$

Решая это операторное уравнение, найдем все члены ряда (3), а вместе с тем и искомое решение уравнения (2).

Теорема 1. *Для того чтобы уравнение (2) имело фундаментальную матрицу вида* $X = \exp \lambda H(t)$, *необходимо и достаточно, чтобы* $H = B(t)$ *и* $AB = BA$, $B = \int\limits_0^t A(\tau)\, d\tau$.

Достаточность этого утверждения очевидна, она выражает известный критерий И. А. Лаппо-Данилевского для уравнения (2). Покажем необходимость этого утверждения. Условие $X = \exp \lambda H$ приведет уравнение (6) к виду

$$\int\limits_0^1 \exp(\mu\lambda H)\, \dot{H} \exp(-\mu\lambda H)\, d\mu = A$$

или

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{s-1}}{s!} \lambda^{s-1} K^{(s-1)} = A.$$

Отсюда

$$K^{(0)} = \dot{H} = A, \quad H = \int\limits_0^t A(\tau)\, d\tau = B(t),$$

$$K^{(1)} = \dot{H}H - H\dot{H} = 0, \quad AB = BA.$$

Остальные члены $K^{(i)}$, $i = 2, 3, \ldots$, исчезают, поскольку $K^{(1)} = 0$. Теорема доказана.

Теорема 2. *Для того чтобы уравнение (1) имело фундаментальную матрицу вида* $X = \exp B(t)$, $0 \leqslant t \leqslant b$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$Q(t) = \int\limits_0^1 \mu \exp(-\mu B)\, K^{(1)} \exp(\mu B)\, d\mu = 0, \tag{7}$$

$$0 \leqslant t \leqslant b.$$

Необходимость. Поскольку $\exp B(t)$ является фундаментальной для уравнения (1), то

$$d(\exp B)/dt = A \exp B.$$

С другой стороны, справедливо тождество (см. [9])

$$d(\exp B)/dt = A \exp B - (\exp B)\, Q.$$

Из этих двух тождеств получим $(\exp B)\, Q = 0$. Отсюда $Q = 0$. Достаточность следует непосредственно из второго тождества.

Теорема 3. *Пусть* $\exp B(t)$ *есть фундаментальная матрица уравнения (1). Тогда можно указать такой промежуток* $[0, b_1] \subseteq [0, b]$, *в котором* $AB = BA$.

Доказательство. Из (7) имеем

$$K^{(1)} = -2 \int\limits_0^1 \mu\, d\mu \int\limits_0^{\mu} \exp(-\rho B)\, K^{(2)} \exp(\rho B)\, d\rho. \tag{8}$$

Так как $\|K^{(2)}\| \leqslant 2\|B\| \cdot \|K^{(1)}\| \leqslant 2h\|K^{(1)}\|$, где $h = \alpha t$, $\|A(t)\| \leqslant \alpha$, $0 \leqslant t \leqslant b$, то из (8) получим

$$\|K^{(1)}\| \leqslant 4h \int_0^1 \mu d\mu \int_0^\mu (\exp 2\rho h)\, d\rho \|K^{(1)}\|. \tag{9}$$

Здесь введена норма матриц.

Далее можно показать, что если $2h < 1$ или $t < 1/2\alpha$, то

$$4h \int_0^1 \mu d\mu \int_0^\mu (\exp 2\rho h)\, d\rho < 1.$$

А тогда из неравенства (9) следует $K^{(1)} = 0$ при $t < 1/2\alpha$. Ясно, что в качестве b_1 можно взять число $1/2\alpha$. При этом, если $\|B(t)\| < 1/2$ при $0 \leqslant t \leqslant b$, то $b_1 = b$. Теорема доказана.

Следует отметить, что теорема 3 по своему содержанию примыкает к [6].

Вернемся к нашей общей задаче. Подставляя разложение для $Z(t, \lambda)$ в уравнение (6), получим

$$\dot{Z} - \frac{1}{2!}(\dot{Z}Z - Z\dot{Z}) + \cdots = \lambda A.$$

Полагая здесь $Z(t, \lambda) = \lambda H(t. \lambda)$, получим далее

$$H - \frac{\lambda}{2!}(\dot{H}H - H\dot{H}) + \cdots = A.$$

Отсюда последовательно находим матрицы Z_i, $i = 1, 2, \ldots$,

$$\dot{Z}_1 = A(t),\ Z_1 = \int_0^t A(\tau)\, d\tau = B(t),$$

$$\dot{Z}_2 = \frac{1}{2}(\dot{Z}_1 Z_1 - Z_1\dot{Z}_1) = \frac{1}{2}(AB - BA) = \frac{1}{2}K^{(1)},\ Z_2 = \frac{1}{2}\int_0^t K^{(1)} d\tau,$$

$$\dot{Z}_3 = \frac{1}{2!}[(\dot{Z}_2 Z_1 - Z_1\dot{Z}_2) + (\dot{Z}_1 Z_2 - Z_2\dot{Z}_1)] - \frac{1}{3!}(K^{(1)}Z_1 - Z_1 K^{(1)}),$$

$$Z_3 = \frac{1}{4}\left[\int_0^t \left(A\int_0^\tau K^{(1)} d\sigma - \int_0^\tau K^{(1)} d\sigma A\right) d\tau + \frac{1}{3}\int_0^t (K^{(1)}B - BK^{(1)})\, d\tau\right].$$

Вообще

$$\dot{Z}_k = \Phi(Z_1, Z_2, \ldots, Z_{k-1}, \dot{Z}_1, \dot{Z}_2, \ldots, \dot{Z}_{k-1}) \tag{10}$$

и все коэффициенты, таким образом, определяются из (10).

Следует отметить, что из (3) получаем

$$Z(t, \lambda) = \ln X(t, \lambda). \tag{11}$$

Здесь $X(t, \lambda)$ есть матрицант уравнения (2). Ряд (11) для $Z(t, \lambda)$ должен сходиться для малых λ, (см. [2, стр. 34]).

Вычисление матриц Z_k по формулам (10) является более эффективным по следующим причинам: наличие рекуррентной формулы, хотя и в дифференциальной форме, единая структура матриц Z_k как совокупности соответствующих коммутаторов. При этом дифференциальные выражения для Z_k

имеют свои преимущества, например, при исследовании специальных вопросов.

Ясно, что в случае $\lambda = 1$ указанные разложения справедливы при малых t.

Пусть теперь $A(t)$ — периодическая матрица с периодом 2π. В этом случае изложенный метод с некоторыми изменениями позволяет найти представление матрицы X в форме типа Флоке—Н. П. Еругина.—И. З. Штокало.

Теорема 4. *Пусть* $A(t+2\pi) = A(t)$. *Тогда решение уравнения* (2) *имеет вид*

$$X = \exp R(t) \exp Wt, \tag{12}$$

где W—*постоянная матрица*, $R(t)$ —*вещественная периодическая матрица.*

Доказательство. Матрицы W, $R(t)$ будем искать как и в [2, стр. 74] при помощи рядов

$$W = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k W_k, \quad R = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k R_k(t), \quad R_k(t+2\pi) = R_k(t). \tag{13}$$

Подставляя (12) в (2), получим

$$(\bar{q}R) \exp R \exp Wt + \exp R \exp (Wt) W = \lambda A \exp R \exp Wt.$$

Отсюда

$$\bar{q}R = \lambda A - (\exp R) W \exp(-R). \tag{14}$$

Здесь

$$\bar{q}R = \int_0^1 (\exp \mu R) \dot{R} \exp(-\mu R)\, d\mu.$$

Учитывая (13) и

$$(\exp R) W \exp(-R) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!} \tilde{K}^{(s)},$$

$$\tilde{K}^{(0)} = W, \quad \tilde{K}^{(1)} = WR - RW, \ \ldots, \ \tilde{K}^{(s)} = \tilde{K}^{(s-1)} R - R \tilde{K}^{(s-1)},$$

получим после сравнивания коэффициентов при одинаковых степенях λ

$$\dot{R}_1 = A - W_1, \quad R_1 = \int_0^t [A(\tau) - W_1]\, d\tau.$$

Поскольку $A(t)$, $R_1(t)$ периодические, то

$$W_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} A(t)\, dt, \quad R_1 = \int_0^t A(\tau)\, d\tau - \frac{t}{2\pi} \int_0^{2\pi} A(\tau)\, d\tau.$$

Далее

$$\dot{R}_2 = \frac{1}{2} (\dot{R}_1 R_1 - R_1 \dot{R}_1) + (W_1 R_1 - R_1 W_1) - W_2.$$

Поскольку $\dot{R}_2$, R_2 периодические, то

$$W_2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} (\dot{R}_1 R_1 - R_1 \dot{R}_1) + (W_1 R_1 - R_1 W_1) \right] dt,$$

$$R_2 = \int_0^t \left[\frac{1}{2} (\dot{R}_1 R_1 - R_1 \dot{R}_1) + (W_1 R_1 - R_1 W_1) \right] d\tau - W_2 t.$$

Аналогично получим $\dot{R}_k = G_k(t) - W_k$, где $G_k(t)$ периодическая. А поэтому

$$W_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} G_k(\tau)\, d\tau, \quad R_k = \int_0^t G_k(\tau)\, d\tau - W_k t.$$

Как видим, принцип нахождения матриц W_k, $R_k(t)$ таков же, как и в [2]. Ряды (13) будут сходиться при малых λ. Если они сходятся и при $\lambda = 1$, то получим решение уравнения (1), полагая в (12), (13) $\lambda = 1$. Вообще говоря, при $\lambda = 1$ матрицы W и $R(t)$ можно всегда найти вещественными, для чего нужно воспользоваться принципом кратного периода (см. [2, стр. 70]). Это известный принцип А. М. Ляпунова—Н. П. Еругина [7, 2]. В нашем случае мы приходим к этому принципу, исходя из соотношения

$$\exp R = X \exp(-Wt),$$

в котором требуем, чтобы $R(t)$ была вещественной, периодической, а W — вещественной, постоянной матрицей.

Предлагаемый метод применим также для исследования такого уравнения:

$$dX/dt = \left(\sum_{k=0}^{\infty} P_k(t)\, \varepsilon^k \right) X. \tag{15}$$

Здесь $P_k(t)$ непрерывные матрицы при $0 \leqslant t \leqslant b$. Ряд в (15) сходится при $|\varepsilon| < r$.

Литература

1. Лаппо-Данилевский И. А. Применение функций от матриц к теории линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. ГИТТЛ, 1957.
2. Еругин Н. П. Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Минск, Изд-во АН БССР, 1963.
3. Еругин Н. П. Приводимые системы. Труды математического ин-та им. В. А. Стеклова, т. XIII, 1946.
4. Штокало И. З. Матем. сб., т. **19** (61), 1946, стр. 263—286.
5. Штокало И. З. Линейные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами. Киев, Изд-во АН УССР, 1960.
6. Martin J. F. P. Journal of differential equations, IV, № 2, 257—279, 1968.
7. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. М., ОНТИ, 1935.
8. Лаптинский В. Н. ДАН БССР, **11**, № 12, 1967.
9. Лаптинский В. Н. Дифференц. уравнения, **5**, № 12, 1969.

Поступила в редакцию
29 декабря 1969 г.

Могилевский машиностроительный институт