1997. Т. 33, № 2. С. 275 — 277

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.925.5

ОБ ОГРАНИЧЕННЫХ НА ПОЛУОСИ РЕШЕНИЯХ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

В. Н. Лаптинский

В данной работе развит способ исследования поведения на полуоси $J = [0, \infty)$ решений дифференциальных уравнений, изложенный в [1]. Изучен вопрос существования и построения ограниченных в J решений существенно нелинейной системы вида

$$dy/dt = f(t, y), \quad y \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

где $f \in C^{(0,1)}(J \times D, \mathbb{R}^n)$; $D = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y\| < \delta\}$, $0 < \delta \leq \infty$. Пусть $b \equiv \sup\limits_{t \geq 0} \left\| \int\limits_0^t f(\tau, 0) d\tau \right\| < \infty$; для матрицы $\partial f(t, y)/\partial y$ имеет место оценка

$$\|\partial f(t, y)/\partial y\| \leq \gamma(t, \|y\|), \tag{2}$$

где $\gamma(t, s)$ — неубывающая по s функция класса $C(J \times [0, \delta))$, $\gamma(t, 0) = 0$;

$$\alpha(s) \equiv \int\limits_0^\infty \gamma(t, s) dt < \infty \quad \forall s \in [0, \delta), \tag{3}$$

причем несобственный интеграл в (3) сходится равномерно по $s \in [0, \rho]$ $\forall \rho \in (0, \delta)$.

Будем исследовать задачу Коши для системы (1) с условием

$$y(0) = \lambda. \tag{4}$$

Примем следующие обозначения: $\varepsilon = \|\lambda\|$, $\varphi(\rho, \varepsilon) = \int\limits_0^\rho (\alpha(s) - 1) ds + \varepsilon + b$, $\|y\|_C = \sup\limits_{t \geq 0} \|y(t)\|$, где C — банахово пространство $C[0, \infty)$ вектор-функций, непрерывных и ограниченных на полуоси.

Теорема [2]. *Пусть уравнение $\alpha(s) - 1 = 0$ имеет на промежутке $(0, \delta)$ решение ρ^* и выполнено неравенство*

$$\varphi(\rho^*, 0) < 0. \tag{5}$$

Тогда решения системы (1) с начальными значениями, принадлежащими области

$$\|\lambda\| < \int\limits_0^{\rho^*} (1 - \alpha(s)) ds - b \equiv -\varphi(\rho^*, 0), \tag{6}$$

существуют и ограничены на полуоси $[0, \infty)$ и могут быть представлены как предел равномерно сходящейся последовательности ограниченных функций. Эти решения принадлежат области значений $\|y\| \leq \rho$, где

$$\rho_1(\varepsilon) \leq \rho < \rho^*, \tag{7}$$

$\rho_1(\varepsilon)$ — *положительный корень уравнения* $\varphi(\rho, \varepsilon) = 0$.

Доказательство. Применим конструктивный способ [1], вытекающий из принципа сжатых отображений [3]. Вместо задачи (1), (4) рассмотрим эквивалентное векторное интегральное уравнение

$$y(t) = \lambda + \int\limits_0^t f(\tau, y(\tau)) d\tau. \tag{8}$$

Будем исследовать разрешимость этого уравнения в пространстве $C[0, \infty)$. Сходимость последовательности в $C[0, \infty)$ означает равномерную сходимость на полуоси $[0, \infty)$.

На основании формулы Адамара имеем

$$f(\tau, y) = \int\limits_0^1 \frac{\partial f(\tau, \mu y)}{\partial y} d\mu y + f(\tau, 0). \tag{9}$$

Тогда уравнение (8) имеет вид

$$y(t) = \lambda + \int\limits_0^t \left(\int\limits_0^1 \frac{\partial f(\tau, \mu y)}{\partial y} d\mu y \right) d\tau + \int\limits_0^t f(\tau, 0) d\tau. \tag{10}$$

Используя (2), выполним оценки по норме в (9):

$$\|f(\tau, y) - f(\tau, 0)\| \le \int\limits_0^1 \left\| \frac{\partial f(\tau, \mu y)}{\partial y} \right\| d\mu \|y\| \le \int\limits_0^1 \gamma(\tau, \mu \|y\|) d\mu \|y\| \le \int\limits_0^1 \gamma(\tau, \mu\rho) d\mu\rho = \int\limits_0^\rho \gamma(\tau, s) ds. \tag{11}$$

Используя (3), (11), для всякой вектор-функции $x(t)$ пространства $C[0, \infty)$, принадлежащей замкнутому шару $\|x\|_C \le \rho$, из (10) получим

$$\left\|\lambda + \int\limits_0^t f(\tau, 0) d\tau + \int\limits_0^t (f(\tau, x(\tau)) - f(\tau, 0)) d\tau \right\| \le \varepsilon + \left\| \int\limits_0^t f(\tau, 0) d\tau \right\| + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_0^\rho \gamma(\tau, s) ds \le \varepsilon + b + \int\limits_0^\infty d\tau \int\limits_0^\rho \gamma(\tau, s) ds =$$

$$= \varepsilon + b + \int\limits_0^\rho ds \int\limits_0^\infty \gamma(\tau, s) d\tau = \varepsilon + b + \int\limits_0^\rho \alpha(s) ds.$$

Отсюда следует оценка $\|\lambda + \int\limits_0^t f(\tau, x(\tau)) d\tau\|_C \le \int\limits_0^\rho \alpha(s) ds + \varepsilon + b$.

Рассмотрим уравнение

$$\varphi(\rho, \varepsilon) = 0. \tag{12}$$

Из соотношения $\varphi(0, \varepsilon) > 0$ и условия (5), которое определяет неравенство $\varphi(\rho^*, \varepsilon) < 0$, следует, что для значений λ, принадлежащих области (6), уравнение (12) имеет решения на интевале $(0, \rho^*)$.

На промежутке $[0, \rho^*)$ справедливо неравенство $d\varphi(\rho, \varepsilon)/d\rho \equiv \alpha(\rho) - 1 < 0$. Поскольку функция $\varphi(\rho, \varepsilon)$ непрерывна на отрезке $[0, \rho^*]$, то уравнение (12) имеет на этом отрезке единственное решение $\rho_1 = \rho_1(\varepsilon)$.

Из соотношения $\varphi(\rho, \varepsilon) = \int\limits_{p_1}^\rho (\alpha(s) - 1) ds$ видно, что для значений ε, ρ, принадлежащих (6), (7), выполняются неравенства

$$\int\limits_0^\rho \alpha(s) ds + \varepsilon + b \le \rho, \quad \alpha(\rho) < 1, \tag{13}$$

являющиеся условиями принципа сжатых отображений, примененного к интегральному уравнению (8).

Для построения требуемых решений воспользуемся следующим алгоритмом:

$$y_k(t) = \lambda + \int\limits_0^t f(\tau, y_{k-1}(\tau)) d\tau, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{14}$$

где $y_0 = 0$.

Используя первое из неравенств (13), можно показать, что функции $y_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots$, принадлежат шару $\|y\|_C \le \rho$ пространства $C[0, \infty)$.

Исходя из (14), имеем

$$y_{k+1} - y_k = \int\limits_0^t \left(\int\limits_0^1 \frac{\partial f(\tau, y_{k-1} + \mu(y_k - y_{k-1}))}{\partial y} d\mu (y_k - y_{k-1}) \right) d\tau. \tag{15}$$

Проводя оценки по норме в (15), получим

$$\|y_{k+1} - y_k\| \le \int\limits_0^t \left(\int\limits_0^1 \gamma(\tau, \|y_{k-1} + \mu(y_k - y_{k-1})\|) d\mu \|y_k - y_{k-1}\| \right) d\tau \le \int\limits_0^\infty \gamma(\tau, \rho) \|y_k - y_{k-1}\| d\tau \le \alpha(\rho) \|y_k - y_{k-1}\|_C.$$

Отсюда имеем

$$\|y_{k+1} - y_k\|_C \le \alpha(\rho) \|y_k - y_{k-1}\|_C. \tag{16}$$

Далее нетрудно доказать, что последовательность функций $y_k(t), k = 1, 2, \ldots,$ равномерно сходится к функции $y(t)$, принадлежащей шару $\|y\|_C \leq \rho$ и являющейся решением интегрального уравнения (8). Быстрота сходимости последовательности $\{y_k(t)\}_1^\infty$ к решению $y(t)$ дается неравенством

$$\|y - y_k\|_C \leq (\alpha^k(\rho)/(1 - \alpha(\rho)))\|y_1 - y_0\|_C, \quad k = 1, 2, \ldots$$

На основе (16) можно получить конструктивную равномерную оценку решения $\|y\|_C \leq M$, где $M = (\varepsilon + b)/(1 - \alpha(\rho)) \geq \rho_1(\varepsilon)$.

Замечания. 1. Используя условия (13), можно показать, что оценка области начальных значений решений класса $C[0, \infty)$ уравнения (8) имеет вид $\|\lambda\| \leq \int\limits_0^\rho (1 - \alpha(s))ds - b$, где $\rho_1(0) < \rho < \rho^*$.

2. Теорема дает конструктивный способ исследования задачи существования семейства решений $y(t, \lambda)$ класса $C[0, \infty)$ нелинейных систем. Единственность каждого решения из этого семейства следует из сжимаемости нелинейного интегрального оператора, определяемого правой частью уравнения (8). Качественными методами эта задача изучалась многими авторами (см. [4]).

Литература

1. *Лаптинский В. Н.* // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32, № 1. С. 131 — 132.
2. *Лаптинский В. Н.* // Вторые респ. науч. чтения по обыкн. дифференц. уравнениям, посвящ. 75-летию Ю. С. Богданова: Тез. докл. Минск, 1995. С. 44.
3. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. М., 1977.
4. *Кигурадзе И. Т.* // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Новейшие достижения. 1987. Т. 30. С. 3 — 103.

Институт прикладной оптики
АН Беларуси

Поступила в редакцию
16 февраля 1996 г.