ИЮЛЬ 1969 г. ТОМ V, № 7

УДК 517.941.92

ОБ ОДНОМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ НЕРАВЕНСТВЕ

В. Н. ЛАПТИНСКИЙ, Л. П. ЮРАСОВА

Рассмотрим неравенство

$$\dot{x} \leqslant A(t)\,x, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x} = dx/dt, \tag{1}$$

где x — векторная функция с n компонентами; $A(t)$ — непрерывная на промежутке $[0, b]$ матрица.

Лемма. *Если $x(t)$ — решение неравенства (1) и $x(t) = C(t)\,y(t)$, где $C^{-1}(t) \geqslant 0$, то $y(t)$ — решение неравенства*

$$\dot{y} \leqslant B(t)\,y, \quad y(0) = 0,$$

где $B = C^{-1}(AC - \dot{C})$.

Опираясь на эту лемму, получим ряд результатов, относящихся к неравенству (1).

Следствие 1. *Пусть постоянная матрица M такова, что $M \geqslant 0$, $A(t) + M \geqslant 0$, $A(t)\,M = MA(t)$. Тогда $x = \exp(-Mt)\,y(t)$ и $y(t) \leqslant 0$.*

Действительно, полагая $C = \exp(-Mt)$, имеем $C^{-1} \geqslant 0$, $B = A(t) + M \geqslant 0$ и, значит (см., например, [1]) $y(t) \leqslant 0$.

Положим теперь

$$K^{(0)} = A, \quad \int\limits_0^t A(\tau)\,d\tau = \overline{B}, \quad K^{(s)} = K^{(s-1)}\overline{B} - \overline{B}K^{(s-1)}, \quad s \geqslant 1,$$

$$\overline{q} = \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{s+1} \frac{1}{s!} K^{(s-1)},$$

$$Q = [\exp(-\overline{B})](A - \overline{q}) \exp \overline{B}.$$

Следствие 2. *Пусть* $\exp(-\overline{B}) \geqslant 0$. *Тогда $x = (\exp \overline{B})\,y$, где y — решение неравенства*

$$\dot{y} \leqslant Q(t)\,y, \quad y(0) = 0.$$

Действительно, положим $C = \exp \overline{B}$. Известно (см. [2]), что $\dot{C} = \overline{q}C$. Поэтому $B = C^{-1}(A - \overline{q})\,C = Q$.

Рассмотрим теперь такое неравенство

$$\dot{z} \leqslant [A(t) + R(t)]\,z, \quad z(0) = 0. \tag{2}$$

Фундаментальную матрицу уравнения $\dot{x} = A(t)\,x$ обозначим через $X(t)$, $X(0) = E$.

Опираясь на лемму, можно показать, что если $X^{-1}(t) \geqslant 0$, то $z = Xy$, где y удовлетворяет неравенству

$$\dot{y} \leqslant (X^{-1}RX)\,y, \quad y(0) = 0.$$

Следствие 3. *Пусть $A(t)\,R(t) \equiv R(t)\,A(t)$, $R(0) = R_0$. Тогда*

$$\dot{y} \leqslant R_0 y + \left(\int\limits_0^t X^{-1}\dot{R}X\,d\tau\right) y, \quad \dot{R} = \dot{R}(\tau).$$

Это можно показать дифференцированием выражения $X^{-1}RX$.

Теорема. *Пусть $X(t)\,X^{-1}(\tau) \geqslant 0$, $0 \leqslant \tau < t \leqslant b$. Тогда*

$$z(t) \leqslant \int_0^t X(t) X^{-1}(\tau) R(\tau) z(\tau) d\tau.$$

В самом деле, так как

$$z(t) = \int_0^t X(t) X^{-1}(\tau) [\dot{z}(\tau) - A(\tau) z(\tau)] d\tau,$$

то отсюда, учитывая (2), получим требуемое.

Отметим, что приемом, составляющим содержание этой теоремы, пользовались многие авторы, например, при исследовании линейных систем дифференциальных уравнений.

Авторы признательны З. Б. Цалюку за весьма ценные замечания.

Литература

1. Беккенбах Э., Беллман Р. Неравенства. М., «Мир», 1965.
2. Лаптинский В. Н. ДАН БССР, т. XI, № 12, 1967.

Поступила в редакцию 29 мая 1968 г.

Могилевский машиностроительный институт