АВГУСТ 1969 г., ТОМ V, № 8

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.912

О НЕЛИНЕЙНЫХ МАТРИЧНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

В. Н. ЛАПТИНСКИЙ, В. В. ПУГИН

Рассмотрим уравнения

$$\frac{dX}{dt} = A(t) X^2, \tag{1}$$

$$\frac{dY}{dt} = YA(t) Y, \tag{2}$$

где X, Y, A суть $n \times n$ матрицы; $A(t)$ непрерывна на $[0, b]$.

Изучению таких уравнений в последнее время уделяется особое внимание. Из опубликованных результатов, близких по тематике к излагаемой заметке, следует отметить работы [1—3]. Изучаются частные случаи уравнения вида

$$\frac{dW}{dt} = F(t) + D(t) W + WB(t) + WC(t) W.$$

Наиболее общая задача заключается в исследовании уравнения

$$\frac{dW}{dt} = F(t) + D(t) W + WP(t) + A(t) W^2 + WC(t) W + W^2 Q(t).$$

Однако уже изучение уравнений вида (1), (2) представляет интерес, причем специфика задачи, обусловленная наличием матриц, создает ряд трудностей, преодоление которых требует известных усилий.

Нас будут интересовать решения уравнений (1), (2), нормированные при $t = 0$.

Лемма 1. *Пусть матрица $E - B(t)$, где E — единичная, $B(t) = \int_0^t A(\tau)\, d\tau$, невырожденная при $0 \leqslant t \leqslant b$. И пусть $A(t) B(t) = B(t) A(t)$. Тогда*

$$(E - B)^{-1} A = A (E - B)^{-1}.$$

Доказательство. В самом деле, так как $AB = BA$, то

$$(E - B) A = A (E - B).$$

Отсюда

$$(E - B) A = A (E - B)^2 (E - B)^{-1} = (E - B)^2 A (E - B)^{-1}.$$

Умножая обе части этого выражения на $[(E - B)^{-1}]^2$, получим

$$(E - B)^{-1} A = A (E - B)^{-1},$$

то есть лемма доказана.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия леммы 1. Тогда уравнение (1) разрешимо в замкнутом виде и его решение имеет вид*

$$X(t) = (E - B)^{-1}, \quad X(0) = E.$$

Доказательство. Имеем

$$(E - B)(E - B)^{-1} = E.$$

Отсюда

$$-\frac{dB}{dt}(E-B)^{-1}+(E-B)\frac{d(E-B)^{-1}}{dt}=0,$$

или

$$\frac{d(E-B)^{-1}}{dt}=(E-B)^{-1}A(E-B)^{-1}. \tag{3}$$

Согласно лемме 1, получим из (3)

$$\frac{d(E-B)^{-1}}{dt}=A[(E-B)^{-1}]^2,$$

что и требовалось доказать.

Следствие. *Пусть матрица $E-B$ невырожденная. Тогда уравнение (2) разрешимо в замкнутом виде и*

$$Y(t)=(E-B)^{-1},\quad Y(0)=E.$$

Справедливость этого утверждения вытекает непосредственно из формулы (3).

Рассмотрим функцию

$$f[B(t)]=\sum_{m=0}^{\infty}\alpha_m B^m(t),\qquad 0\leqslant t\leqslant b, \tag{4}$$

где $B(t)$ — непрерывно дифференцируемая на $[0,\ b]$ матрица. Вводя норму матриц

$$\|A\|=\max_i\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}|,$$

будем предполагать, что функция (4), аналитическая при $\|B(t)\|<\rho$, см. [4], а также [5, 6].

Введем обозначения

$$B(t)=\int_0^t A(\tau)\,d\tau,\qquad A(t)=K^{(0)},$$

$$K^{(1)}=AB-BA,\ \ldots,\ K^{(s)}=K^{(s-1)}B-BK^{(s-1)},\ \ldots$$

Известно тождество [7]

$$\frac{df}{dt}=\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{s!}f^{(s)}(B)K^{(s-1)}, \tag{5}$$

где $f^{(s)}(B)$, $s=1,\ 2,\ \ldots$, суть формальные производные функции $f(B)$ по матрице B. Приведем еще тождество типа (5)

$$\frac{df}{dt}=\sum_{s=1}^{\infty}(-1)^{s-1}\frac{1}{s!}K^{(s-1)}f^{(s)}(B). \tag{6}$$

Теорема 2. *Пусть $\|B(t)\|<1$, $0\leqslant t\leqslant b$. Тогда матрица $U=(E-B)^{-1}$ удовлетворяет уравнению*

$$\frac{dU}{dt}=U^2\sum_{s=0}^{\infty}U^sK^{(s)}. \tag{7}$$

Доказательство. В тождестве (5) положим

$$f(B)=E+B+B^2+\cdots+B^m+\cdots$$

Так как $\|B\|<1$, то

$$f(B)=(E-B)^{-1}$$

и

$$f^{(s)}(B)=s![(E-B)^{-1}]^{s+1},\quad s=1,\ 2,\ \ldots$$

$$f^{(0)}(B)=f(B)=(E-B)^{-1}.$$

При этом

$$\frac{d(E-B)^{-1}}{dt} = [(E-B)^{-1}]^2 \sum_{s=0}^{\infty} [(E-B)^{-1}]^s K^{(s)}.$$

Последнее соотношение и убеждает нас в справедливости теоремы.

Следствие 1. *Пусть* $K^{(1)} \equiv 0$. *Тогда*

$$\frac{d(E-B)^{-1}}{dt} = [(E-B)^{-1}]^2 A = A[(E-B)^{-1}]^2,$$

а это и есть содержание теоремы 1.

Следствие 2. *Пусть* $K^{(2)} \equiv 0$. *Тогда*

$$\frac{d(E-B)^{-1}}{dt} = [(E-B)^{-1}]^2 [A + (E-B)^{-1} K^{(1)}].$$

Теорема 3. *Пусть* $\|B(t)\| < 1$, $0 \leqslant t \leqslant b$. *Тогда матрица* $V = (E-B)^{-1}$ *удовлетворяет уравнению*

$$\frac{dV}{dt} = \left(\sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s K^{(s)} V^s\right) V^2. \tag{8}$$

Справедливость этой теоремы вытекает из тождества (6). Из этой теоремы также можно получить следствия, аналогичные следствиям 1, 2 предыдущей теоремы.

Замечание. В условиях теорем 2, 3 можно требовать чтобы $|\lambda_i(t)| < 1$, $0 \leqslant t \leqslant b$, где $\lambda_i(t)$ — характеристические числа матрицы $B(t)$, см. [5].

Литература

1. Bellman R. J. Math. Analysis and Applic., 17, № 2, 1967.
2. Coles W. J. J. Soc. Industr. and Appl. Math., 13, № 3, 1965.
3. Reid William T. Duke Math. J., 32, № 4, 1965.
4. Лапо-Данилевский И. А. Применение функций от матриц к теории линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. М., ГИТТЛ, 1957.
5. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М., ГИТТЛ, 1953.
6. Еругин Н. П. Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Минск, Изд. АН БССР, 1963.
7. Лаптинский В. Н. ДАН БССР, 11, № 12, 1967.

Поступила в редакцию
27 мая 1968 г.

Могилевский машиностроительный институт