ДЕКАБРЬ 1969 г., ТОМ V, № 12

УДК 517.926.7

МЕТОД МНИМЫХ КВАДРАТУР

В. Н. ЛАПТИНСКИЙ

В этом сообщении рассмотрен метод построения приближенного аналитического решения линейных дифференциальных систем. Этот метод основан на применении теоремы И. А. Лаппо-Данилевского [1] и, как видно будет из приведенных рассуждений, имеет тесную связь с классическим методом Пикара—Линделефа. В последнее время опубликован ряд приближенных методов, из которых выделим метод, предложенный П. Байчаи [2] и А. Н. Еругиным [3]. Следует отметить, что изложение метода не является основным содержанием работы [3]. Кроме того, оценки в [2] и [3] носят принципиально разный характер.

Одним из вариантов метода последовательных приближений является метод, изложенный в [4], [5]. Отметим еще методы, рассмотренные в [6] и [7].

Рассмотрим дифференциально-матричное уравнение

$$dX/dt = A(t)\,X, \tag{1}$$

предполагая $n \times n$ матрицу $A(t)$ непрерывной на промежутке $[0,\ b]$. Приближенное решение уравнения (1) будем находить нормированным при $t = 0$.

Из (1) имеем

$$X = E + \int_0^t A(\tau)\, X(\tau)\, d\tau.$$

Отсюда

$$X - \exp B = E - \exp B + \int_0^t A(\exp B)\, d\tau + \int_0^t A(X - \exp B)\, d\tau, \tag{2}$$

где $B = \int_0^t A d\tau$.

В качестве исходного приближения берем матрицу $X^{(0)} = \exp B(t)$, что и является содержанием теоремы И. А. Лаппо-Данилевского, если $AB = BA$.

Теперь из (2), полагая $X - \exp B = X_1$, получаем

$$X_1 = F_1 + \int_0^t AX_1 d\tau, \tag{3}$$

где

$$F_1 = E - \exp B + \int_0^t A(\exp B)\, d\tau.$$

Переходя от (3) к дифференциальному уравнению, получаем

$$dX_1/dt = A \exp B - d(\exp B)/dt + AX_1. \tag{4}$$

Решая уравнение (4) в предположении, что $AB = BA$, вычислим матрицу $\tilde{X}_1$, $\tilde{X}_1(0) = 0$:

$$\tilde{X}_1 = (\exp B) \int_0^t Q(\tau)\, d\tau.$$

Здесь $Q = \exp(-B)\,[A \exp B - d(\exp B)/dt]$.

Тогда в качестве первого приближения берем матрицу

$$X^{(1)} = \exp B + \tilde{X}_1.$$

Теперь, отправляясь от матрицы $\tilde{X}_{n-1}$, получим в общем случае

$$X_n = F_n + \int_0^t AX_n d\tau,$$

где

$$F_n = F_{n-1} - \tilde{X}_{n-1} + \int_0^t A\tilde{X}_{n-1} d\tau, \quad X_{n-1} - \tilde{X}_{n-1} = X_n.$$

Матрицу F_n можно привести к виду

$$F_n = \int_0^t (\exp B)\, Q dt_1 \int_0^{t_1} Q dt_2 \ldots \int_0^{t_{n-1}} Q dt_n.$$

Приближение $X^{(n)}$ выглядит так:

$$X^{(n)} = \tilde{X}_0 + \tilde{X}_1 + \ldots + \tilde{X}_n,$$

где

$$X_n = (\exp B) \int_0^t Q dt_1 \ldots \int_0^{t_{n-1}} Q dt_n.$$

Таким образом, последующее приближение находится с помощью квадратур, опираясь на предыдущее, как и в отмеченных выше методах. Здесь для построения приближений мы как бы опирались на теорему И. А. Лаппо-Данилевского, считая $A(t)$ произвольной непрерывной матрицей. В этом смысле метод называем методом мнимых квадратур.

Вводя обозначения $\|\exp B(t)\| \leqslant \alpha$, $\|Q(t)\| \leqslant \beta$, $0 \leqslant t \leqslant b$, можно получить оценку нормы разности $X - X^{(s)}$ в следующем виде:

$$\|X - X^{(s)}\| \leqslant \alpha \frac{(\beta t)^{s+1}}{(s+1)!} \exp(\beta t), \tag{5}$$

где α, β — числа.

Формула (5) дает возможность судить о скорости сходимости приближений $X^{(s)}$ к точному решению X.

Следует отметить, что метод мнимых квадратур имеет тесную связь с методом Пикара — Линделефа. В самом деле, преобразуя уравнение (1) по формуле $X = (\exp B)\, Y$, получаем

$$dY/dt = Q(t)\, Y, \tag{6}$$

где

$$Q = \int_0^1 \mu \exp(-\mu B)\, K^{(1)} \exp(\mu B)\, d\mu, \quad K^{(1)} = AB - BA.$$

Решив уравнение (6) методом Пикара — Линделефа и учитывая введенное преобразование, получим итерации метода мнимых квадратур.

Из вида матрицы $Q(t)$ заключаем, что если $\|K^{(1)}\| = \|AB - BA\| \leqslant \varepsilon$, где ε — такое положительное число, что $\|Q\| \leqslant \delta < 1$, то, как видно из оценки (5), приближения $X^{(s)}$ будут достаточно быстро сходиться к точному решению X.

Установим связь метода со ставшим классическим способом расщепления матрицы $A(t)$ на две так, что полученное затем укороченное уравнение решается в квадратурах, а стало быть, можно строить приближения исходного уравнения. Этим характерны методы, рассмотренные в [2] — [7]. Для этого уравнение (1) перепишем в виде

$$dX/dt = (A + \bar{L})\, X - \bar{L}X, \tag{7}$$

где

$$A + \bar{L} = \bar{q} = \int_0^1 \exp(\mu B)\, A \exp(-\mu B)\, d\mu.$$

Учитывая, что решение уравнения

$$dH/dt = \bar{q}H,$$

нормированное при $t = 0$, имеет вид $H = \exp B(t)$, строим приближенный метод по схеме

$$dX_s/dt = \bar{q}X_s - \bar{L}X_{s-1}.$$

Тогда

$$X_s = (\exp B)\left(E + \int_0^t Qdt_1 + \ldots + \int_0^t Qdt_1 \ldots \int_0^{t_{s-2}} Qdt_{s-1}\right).$$

А это и есть содержание метода мнимых квадратур.

Отметим, что в случае, когда $AB = BA$, методом мнимых квадратур найдем точное решение на первом шаге.

Литература

1. Лаппо-Данилевский И. А. Применение функций от матриц к теории линейных систем дифференциальных уравнений. ГИТТЛ, 1957.
2. Bajcsay P. Periodica Polytechnica. Budapest, **3**, № 3, 217—231, 1959.
3. Еругин А. Н. ИФЖ, **4**, № 5, 111—114, 1961.
4. Лаптинский В. Н. ДАН БССР, **9**, № 5, 219—220, 1965.
5. Лаптинский В. Н. ДАН БССР, **10**, № 10, 732—734, 1966.
6. Olech C. Annales Polonici Mathematici, 11, 237—245, 1960.
7. Zuber R. A. A method of successive approximations. «Bull. Acad. Polon. sci, ser. sci math., astron. et phys.», **14**, № 10, 559—561, 1966.
8. Лаптинский В. Н. ДАН БССР, **11**, № 12, 1055—1056, 1967.

Поступила в редакцию 9 октября 1967 г.

Могилевский машиностроительный институт