МАРТ 1970 г., ТОМ VI, № 3

УДК 517.926

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ОТ МНОГИХ МАТРИЦ И ОТ СЧЕТНОГО МНОЖЕСТВА МАТРИЦ*)

В. Н. ЛАПТИНСКИЙ

Рассмотрим функцию [1]

$$F(B_1, B_2, \ldots, B_m) = \sum_{\nu=0}^{\infty} [B\alpha]_\nu, \tag{1}$$

где B_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, суть $n \times n$-матрицы;

$$[B\alpha]_\nu = \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_\nu}^{1,2,\ldots,m} B_{j_1} B_{j_2} \ldots B_{j_\nu}, \quad [B\alpha]_0 = \alpha_0,$$

α — комплексные числа, а индексы $j_1, j_2, \ldots, j_\nu$ пробегают независимо друг от друга все возможные значения от 1 до m.

Пусть $B_i = B_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, m$; $0 \leqslant t \leqslant b$, и функция F является равномерно голоморфной [2, стр. 45] в области

$$\|B_1(t)\| + \ldots + \|B_m(t)\| < \rho, \quad 0 \leqslant t \leqslant b, \quad \rho = \text{const}. \tag{2}$$

Здесь введена норма матриц.

Введем обозначение

$$\mathfrak{B}_\nu = B_{j_1} B_{j_2} \ldots B_{j_\nu},$$

$$\nu = 1, 2, \ldots; \; j_1, j_2, \ldots, j_\nu = 1, 2, \ldots, m.$$

Лемма 1. *Пусть на промежутке* $[0, b]$ *заданы матрицы* $A_1(t)$, $B_i(t)$, $i=1, 2, \ldots, m$. *Тогда*

$$A_1 \mathfrak{B}_\nu = \sum_{r=0}^{\nu} d^r \mathfrak{B}_\nu, \quad \mathfrak{B}_\nu A_1 = \sum_{r=0}^{\nu} (-1)^r \bar{d}^r \mathfrak{B}_\nu, \tag{3}$$

где

$$d^r \mathfrak{B}_\nu = \sum_{s_1 < s_2 < \ldots < s_r}^{1,2,\ldots,\nu} \frac{\partial^r \mathfrak{B}_\nu}{\partial B_{j_{s_1}} \partial B_{j_{s_2}} \ldots \partial B_{j_{s_r}}} \mathfrak{K}^{(1 j_{s_1} j_{s_2} \ldots j_{s_r})},$$

$$\bar{d}^r \mathfrak{B}_\nu = \sum_{s_1 > s_2 > \ldots > s_r}^{1,2,\ldots,\nu} \mathfrak{K}^{(1 j_{s_1} j_{s_2} \ldots j_{s_r})} \frac{\partial^r \mathfrak{B}_\nu}{\partial B_{j_{s_1}} \partial B_{j_{s_2}} \ldots \partial B_{j_{s_r}}},$$

$$\mathfrak{K}^{(1 j_{s_1} j_{s_2} \ldots j_{s_r})} = [\ldots [A_1 B_{j_{s_1}}] B_{j_{s_2}}] \ldots] B_{j_{s_r}}].$$

Приведенная лемма обобщает тождество Н. Джекобсона [3, стр. 49].

*) Статья полностью депонирована в ВИНИТИ — 1286—69 Деп.

Теорема 1. *Пусть функция F равномерно голоморфная в области* (2). *Тогда*

$$A_1F=\sum_{r=0}^{\infty} d_B^r F, \quad FA_1=\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r \bar{d}_B^r F. \tag{4}$$

Доказывается теорема с помощью леммы 1, причем оператором d_B^r дифференцирование F производится по матрицам B_i слева направо, а оператором $\bar{d}_B^r$ — справа налево.

В случае функций от одной матрицы B формулы (4) принимают соответственно следующий вид:

$$A_1F=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{r!}F^{(r)}(B)\,K^{(r)}, \quad FA_1=\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\frac{1}{r!}K^{(r)}\,F^{(r)}(B).$$

Здесь $F^{(r)}(B)$ суть формальные производные функции $F(B)$ по матрице B, $K^{(r)}=$ $=[\ldots[A_1B]\ldots]B]$.

Лемма 2. *Пусть $B_i(t)$, $i=1, 2, \ldots, m$, непрерывно дифференцируемы на* $[0, b]$. *Тогда*

$$d\mathfrak{B}_\nu/dt=\sum_{r=1}^{\nu} D^r\mathfrak{B}_\nu=\sum_{r=1}^{\nu}(-1)^{r-1}\bar{D}^r\mathfrak{B}_\nu, \tag{5}$$

$$D^r\mathfrak{B}_\nu=\sum_{k_1<k_2<\ldots<k_r}^{1,2,\ldots,\nu}\frac{\partial^r\mathfrak{B}_\nu}{\partial B_{j_{k_1}}\partial B_{j_{k_2}}\ldots\partial B_{j_{k_r}}}\,\mathfrak{K}^{(j_{k_1}\,j_{k_2}\,\cdots\,j_{k_r})},$$

$$\bar{D}^r\mathfrak{B}_\nu=\sum_{k_1>k_2>\ldots>k_r}^{1,2,\ldots,\nu}\mathfrak{K}^{(j_{k_1}\,j_{k_2}\,\cdots\,j_{k_r}}\,\frac{\partial^r\mathfrak{B}_\nu}{\partial B_{j_{k_1}}\partial B_{j_{k_2}}\ldots\partial B_{j_{k_r}}},$$

$$\mathfrak{K}^{(j_{k_1}\,j_{k_2}\,\cdots\,j_{k_r})}=[\ldots[A_{j_{k_1}}B_{j_{k_2}}]\ldots]B_{j_{k_r}}], \quad A_i=dB_i/dt.$$

Теорема 2. *Пусть функция F равномерно голоморфная в области* (2). *И пусть матрицы $B_i(t)$ непрерывно дифференцируемы на* $[0, b]$. *Тогда*

$$dF/dt=\sum_{r=1}^{\infty}D_B^rF=\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r-1}\bar{D}_B^rF. \tag{6}$$

Здесь операторы D_B^r, $\bar{D}_B^r$ аналогичны операторам соответственно d_B^r, $\bar{d}_B^r$.

Эта теорема доказывается, опираясь на лемму 2.

Следствие. *Пусть $B_i(t)=B(t)$, $i=1, 2, \ldots, m$. Тогда*

$$dF/dt=\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{s!}F^{(s)}K^{(s-1)}=\sum_{s=1}^{\infty}(-1)^{s-1}\frac{1}{s!}K^{(s-1)}F^{(s)},$$

$$K^{(0)}=A=dB/dt.$$

В частности, при $F(B)=\exp B$ получим тождество из [4].

Полученные результаты обобщают формулы Ф. Хаусдорфа [5, стр. 132], метод доказательства которых не проходит в общем случае, т. е. для вывода приведенных формул.

Если ввести в рассмотрение функции от счетного множества матриц [2], то приведенные результаты можно полностью перенести на такие функции. Соответствующие тождества получаются предельным переходом.

Литература

1. Лаппо-Данилевский И. А. Применение функций от матриц к теории линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. М., ГИТТЛ, 1957.
2. Еругин Н. П. Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Минск, Изд-во АН БССР, 1963.
3. Джекобсон Н. Алгебры Ли. М., «Мир», 1964.
4. Лаптинский В. Н. ДАН БССР, 2, № 12, 1055—1056, 1967.
5. Чеботарев Н. Г. Теории групп Ли. М., ГИТТЛ, 1940.

Поступила в редакцию 7 июня 1968 г.

Могилевский машиностроительный институт