ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ОКТЯБРЬ 1971 г., ТОМ VII, № 10

517.926.7

ОБ ОДНОМ МАТРИЧНОМ МЕТОДЕ В ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ

В. Н. ЛАПТИНСКИЙ

Для решения задач теории колебаний известен ряд методов, важное место среди которых занимает метод малого параметра, особенно удобный при исследовании систем, близких к точно интегрируемым [1—4]. Этот метод, как известно, восходит к Пуанкаре [5] и Ляпунову [6]. В теории колебаний со многими степенями свободы большое значение имеет матричный метод исследования систем. В этой связи следует упомянуть аппарат теории функций от матриц, созданный И. А. Лаппо-Данилевским [7] и развитый в работах Н. П. Еругина и И. З. Штокало [2, 8—10], а также других авторов.

При этом наряду с известными преимуществами матричного метода по сравнению со скалярными (компактность записи формул, легкость и обозримость промежуточных преобразований, возможность стандартизации и алгоритмизации) возникает ряд дополнительных трудностей, обусловленных именно матричной спецификой сформулированной задачи.

Ниже излагается матричный метод построения формальных решений задач теории линейных и квазилинейных колебаний, основанный на аппарате теории параметрических функций от матриц [11, 12] и связанных с ними операторов [13].

Рассмотрим $n\times n$ матрицы $A(t)$, $B(t)$, непрерывные на промежутке $0\leqslant t\leqslant b$. Введем операторы (см. [13])

$$\psi_\lambda A=\exp(-B\lambda)\,A\exp(B\lambda),\quad \bar\psi_\lambda A=\exp(B\lambda)\,A\exp(-B\lambda), \tag{1}$$

где λ—действительный параметр.

В предположении дифференцируемости матрицы $B(t)$ на $[0, b]$ и $dB/dt=A(t)$ введем еще операторы:

$$\varphi_\lambda A=\int_0^\lambda\psi_\mu A\,d\mu,\quad \bar q_\lambda A=\int_0^\lambda\bar\psi_\mu A\,d\mu. \tag{2}$$

Операторы ψ_λ, $\bar\psi_\lambda$, φ_λ, $\bar q_\lambda$ имеют следующую структуру:

$$\varphi_\lambda A=\exp(-B\lambda)\,d(\exp B\lambda)/dt,\quad \bar q_\lambda A=d(\exp B\lambda)/dt\exp(-B\lambda), \tag{2'}$$

причем

$$\psi_\lambda A=\sum_{s=0}^\infty\frac{1}{s!}\lambda^sK^{(s)},\quad \bar\psi_\lambda A=\sum_{s=0}^\infty\frac{(-1)^s}{s!}\lambda^sK^{(s)}, \tag{3}$$

$$\varphi_\lambda A=\sum_{s=1}^\infty\frac{1}{s!}\lambda^sK^{(s-1)},\quad \bar q_\lambda A=\sum_{s=1}^\infty\frac{(-1)^{s-1}}{s!}\lambda^sK^{(s-1)}, \tag{4}$$

где $K^{(0)}=A$, $K^{(1)}=AB-BA=[A, B]$, ..., $K^{(s)}=[K^{(s-1)}, B]$.

На основе этих операторов можем записать:

$$d(\exp B\lambda)/dt = (\overline{q}_\lambda A)\exp(B\lambda), \tag{5}$$

$$d^2(\exp B\lambda)/dt^2 = [d\overline{q}_\lambda A/dt + (\overline{q}_\lambda A)^2]\exp(B\lambda) \tag{6}$$

и т. д.

Будем изучать в начале уравнение вида

$$\ddot{X} + P_1(t)\dot{X} + P_2(t)X = F(t). \tag{7}$$

Здесь X, P_1, P_2, F — $n\times n$ матрицы, непрерывные на $[0, b]$, $\dot{X} = dX/dt$. Для этого уравнения решаем задачу построения общего решения в смысле [14, стр. 107]. Строим общее решение однородного уравнения

$$\ddot{X} + P_1(t)\dot{X} + P_2(t)X = 0, \tag{8}$$

для чего поступаем так: заменой $X=\exp Z_1(t)$, $Z_1(0)=0$, $\dot{Z}_1(0)=0$ уравнение (8) с учетом (5), (6) сводим к такому уравнению:

$$\overline{q}\ddot{Z}_1 + (\overline{q}\dot{Z}_1)^2 + P_1(\overline{q}\dot{Z}_1) + P_2 = 0.$$

От этого уравнения переходим к матричной системе вида

$$\overline{q}\dot{Z}_1 + \overline{q}\dot{Z}_2 = -P_1(t), \quad \overline{q}\dot{Z}_1\overline{q}\dot{Z}_2 - \overline{q}\ddot{Z}_1 = P_2(t), \tag{9}$$

где $Z_2(t)$, $Z_2(0)=0$ — вспомогательная матричная функция.

Предположим, что решения системы (9) продолжимы на всем промежутке $[0, b]$. Тогда общее решение уравнения (7) примет вид

$$X = X_1C_1 + X_2C_2 + \widetilde{X},$$

где

$$X_1 = \exp Z_1, \quad X_2 = (\exp Z_1)\int_0^t \exp(-Z_1)\exp Z_2\,d\tau,$$

$$\widetilde{X} = (\exp Z_1)\int_0^t \exp(-Z_1)(\exp Z_2)d\tau\int_0^\tau \exp(-Z_2)F\,d\sigma,$$

C_1, C_2 — произвольные постоянные матрицы.

Теперь рассмотрим уравнение

$$\ddot{X} + [A^2 + \varepsilon P(t)]X = 0, \tag{10}$$

где A — постоянная симметрическая $n\times n$ матрица; $P(t)$ — непрерывная на $[0, T]$ матрица, периодическая с периодом T; ε — малый параметр.

Решение этого уравнения будем искать в следующем виде:

$$X = \exp(iAt)\exp i\int_0^t \Phi(\tau, \varepsilon)\,d\tau \exp\int_0^t H(\tau, \varepsilon)d\tau, \tag{11}$$

где $i=\sqrt{-1}$, $\Phi(t, \varepsilon)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\Phi_k(t)\varepsilon^k$, $H(t, \varepsilon)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}H_k(t)\varepsilon^k$. С учетом (2′), (5), (6) получим

$$\dot{X} = iAX + \exp(iAt)\exp(i\widetilde{\Phi})(\varphi_i\Phi + \overline{q}H)\exp\tilde{H},$$

$$\ddot{X} = -A^2X + 2iA\exp(iAt)\exp(i\widetilde{\Phi})(\varphi_i\Phi + \bar{q}H)\exp\widetilde{H} +$$

$$+\exp(iAt)\exp(i\widetilde{\Phi})[\dot{\varphi_i\Phi} + \dot{\bar{q}H} + (\varphi_i\Phi)^2 + 2(\varphi_i\Phi)(\bar{q}H) + (\bar{q}H)^2]\exp\widetilde{H}.$$

Здесь

$$\widetilde{\Phi} = \int_0^t \Phi(\tau,\ \varepsilon)d\tau,\ \widetilde{H} = \int_0^t H(\tau,\ \varepsilon)d\tau.$$

Подставляя значения X, $\ddot{X}$ в (10), получим

$$\begin{gathered}\dot{\varphi_i\Phi} + \dot{\bar{q}H} + (\varphi_i\Phi)^2 + 2(\varphi_i\Phi)(\bar{q}H) + (\bar{q}H)^2 + \\ + 2i\psi_iA(\varphi_i\Phi + \bar{q}H) + \varepsilon\psi_i\bar{P} = 0,\end{gathered} \tag{12}$$

где

$$\psi_iA = \exp(-i\widetilde{\Phi})A\exp(i\widetilde{\Phi}),\ \bar{P} = \exp(-iAt)P\exp(iAt) =$$

$$= \bar{P}_1 + i\bar{P}_2,\ \bar{P}_1 = (\cos At)P\cos At + (\sin At)P\sin At,$$

$$\bar{P}_2 = (\cos At)P\sin At - (\sin At)P\cos At,\ \psi_iP = \exp(-i\widetilde{\Phi})\bar{P}\exp(i\widetilde{\Phi}).$$

Для решения (12) необходимо знать структуру операторов φ_i, ψ_i. Ее можно получить исходя из структуры φ_λ, ψ_λ, заданных формулами (3), (4), а именно:

$$\varphi_i\Phi = U_1 + iV_1,\ \psi_iA = U_2 + iV_2,\ \psi_i\bar{P} = U_3 + iV_3,$$

где

$$U_1 = -\frac{1}{2}[\Phi,\ \widetilde{\Phi}] + \frac{1}{4!}\left[[[\Phi,\ \widetilde{\Phi}]\widetilde{\Phi}]\widetilde{\Phi}\right] - \ldots + \frac{(-1)^{s+1}}{(2s+2)!}K_{\Phi}^{(2s+1)} + \ldots,$$

$$V_1 = \Phi - \frac{1}{3!}[[\Phi,\ \widetilde{\Phi}]\widetilde{\Phi}] + \ldots + \frac{(-1)^s}{(2s+1)!}K_{\Phi}^{(2s)} + \ldots,$$

$$U_2 = A - \frac{1}{2}[[A,\ \widetilde{\Phi}]\widetilde{\Phi}] + \ldots + \frac{(-1)^s}{(2s)!}K_A^{(2s)} + \ldots,$$

$$V_2 = [A,\ \widetilde{\Phi}] - \frac{1}{3!}\left[[[A,\ \widetilde{\Phi}]\widetilde{\Phi}]\widetilde{\Phi}\right] + \ldots + \frac{(-1)^s}{(2s+1)!}K_A^{(2s+1)} + \ldots,$$

$$U_3 = \bar{P}_1 - [\bar{P}_2,\ \widetilde{\Phi}] - \ldots + \frac{(-1)^s}{(2s)!}K_{\bar{P}_1}^{(2s)} + \frac{(-1)^{s+1}}{(2s+1)!}K_{\bar{P}_2}^{(2s+1)} + \ldots,$$

$$V_3 = \bar{P}_2 + [\bar{P}_1,\ \widetilde{\Phi}] - \ldots + \frac{(-1)^s}{(2s)!}K_{\bar{P}_2}^{(2s)} + \frac{(-1)^s}{(2s+1)!}K_{\bar{P}_1}^{(2s+1)} + \ldots,$$

причем

$$U_1 = \operatorname{Re}\varphi_i\Phi = -\int_0^1 \operatorname{Im}\psi_{\mu i}\Phi d\mu,\ V_1 = \operatorname{Im}\varphi_i\Phi = \int_0^1 \operatorname{Re}\psi_{\mu i}\Phi d\mu.$$

Напомним, что

$$\bar{q}H = H - \frac{1}{2}[H,\ \widetilde{H}] + \ldots + \frac{(-1)^s}{(s+1)!}K^{(s)} + \ldots$$

Учитывая это, получим из (12)

$$\dot{U}_1 + \ddot{q}H + 2(U_1\bar{q}H - U_2V_1 - V_2U_1 - V_2\bar{q}H) + U_1^2 - V_1^2 + (\bar{q}H)^2 + \varepsilon U_3 = 0,$$
$$\dot{V}_1 + U_1V_1 + V_1U_1 + 2(V_1\bar{q}H + U_2U_1 + U_2\bar{q}H - V_2V_1) + \varepsilon V_3 = 0. \tag{13}$$

Подставляя разложения $\Phi(t, \varepsilon)$, $H(t, \varepsilon)$ в (13) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, придем к следующим рекуррентным системам:

$$\begin{aligned}
\dot{H}_1 &= 2A\Phi_1 - \bar{P}_1,\\
\dot{\Phi}_1 &= -2AH_1 - \bar{P}_2,\\
&\cdots\cdots\\
\dot{H}_k &= 2A\Phi_k + P_k(t),\\
\dot{\Phi}_k &= -2AH_k + Q_k(t), \quad k = 2, 3, \ldots
\end{aligned} \tag{14}$$

Каждую из этих систем можно свести к уравнению второго порядка, предполагая дифференцируемость $P_k(t)$ либо $Q_k(t)$, а затем решить, используя результаты [15, стр. 129]. Если (14) решать непосредственно, то получим

$$\begin{aligned}
H_k &= (\cos 2At)\,C_1 + (\sin 2At)C_2 + \bar{H}_k,\\
\Phi_k &= -(\sin 2At)C_1 + (\cos 2At)C_2 + \bar{\Phi}_k,
\end{aligned} \tag{15}$$

где

$$\bar{H}_k = \int_0^t [\cos 2A(t-\tau)P_k(\tau) + \sin 2A(t-\tau)\,Q_k(\tau)]d\tau,$$

$$\bar{\Phi}_k = \int_0^t [\cos 2A(t-\tau)Q_k(\tau) - \sin 2A\,(t-\tau)P_k(\tau)]\,d\tau, \quad k=1, 2, \ldots$$

Учитывая это, получим из (11)

$$\begin{aligned}
X_1 &= (\cos At\cos\tilde{\Phi} - \sin At\sin\tilde{\Phi})\exp\tilde{H},\\
X_2 &= (\cos At\sin\tilde{\Phi} + \sin At\cos\tilde{\Phi})\exp\tilde{H}.
\end{aligned} \tag{16}$$

Отметим, что для скалярных уравнений этот метод изложен в [16], в том числе и для квазилинейных уравнений.

Рассмотрим пример (см. [4], стр. 102]):

$$\ddot{X} + A_1X = 2\varepsilon(\cos t)P_0X, \tag{17}$$

где $A_1 = \mathrm{diag}\,[\sigma^2, \sigma^2 + \varepsilon^2\gamma\sigma]$, $\sigma > 0$, ε, γ — вещественные параметры; $P_0 = \begin{bmatrix} p & 1 \\ q & r \end{bmatrix}$, p, q, r — вещественные постоянные.

Запишем (17) в таком виде:

$$\ddot{X} + [A^2 + \varepsilon P(t, \varepsilon)]X = 0,$$

где $A = \mathrm{diag}\,[\sigma, \sigma] = \sigma E$, E — единичная матрица,

$$P(t, \varepsilon) = -2(\cos t)P_0 + \varepsilon\,\mathrm{diag}\,[0, \gamma\sigma].$$

Найдем несколько приближений решения изложенным выше методом, предполагая, что $2\sigma \neq m = 0, 1, 2, \ldots$

В нашем случае имеем

$$\exp(\pm i\sigma tE) = \exp(\pm i\sigma t)E,\quad P_1 = P(t, \varepsilon),\quad \overline{P}_2 = 0,$$

$$V_2 = 0,\ U_2 = \sigma E,\ \overline{P} = P(t, \varepsilon).$$

Система (14) для H_1, Φ_1 примет вид

$$\dot{H}_1 = 2\sigma\Phi_1 + 2(\cos t)\, P_0,$$

$$\dot{\Phi}_1 = -2\sigma H_1.$$

Отсюда, учитывая, что $2\sigma \neq 1$, получим обычным методом неопределенных коэффициентов

$$H_1 = -\frac{2\sin t}{4\sigma^2 - 1} P_0,\quad \Phi_1 = -\frac{4\sigma}{4\sigma^2 - 1}(\cos t)P_0.$$

Далее,

$$\dot{H}_2 = 2\sigma\Phi_2 + P_2,\quad \dot{\Phi}_2 = -2\sigma H_2 + Q_2,$$

где

$$P_2 = H_1^2 - \Phi_1^2 - \operatorname{diag}[0,\ \sigma\gamma] = \frac{16\sigma^2}{(4\sigma^2-1)^2} P_0^2 + \frac{4}{4\sigma^2 - 1}(\cos 2t)P_0^2,$$

$$Q_2 = -2\Phi_1 H_1 = \frac{4\sigma}{(4\sigma^2-1)^2}(\sin 2t)P_0^2.$$

Так как $\sigma \neq 1$, то

$$H_2 = -\frac{2(3\sigma^2-1)}{(4\sigma^2 - 1)(\sigma^2 - 1)}(\sin 2t)P_0^2,$$

$$\Phi_2 = -\frac{8\sigma}{(4\sigma - 1)^2} P_0^2 - \frac{4\sigma(2\sigma^2 - 1)}{(4\sigma^2 - 1)^2(\sigma^2 - 1)}(\cos 2t)\, P_0^2.$$

Теперь находим

$$\widetilde{H}_m = \int\limits_0^t H_m(\tau)d\tau,\quad \widetilde{\Phi}_m = \int\limits_0^t \Phi_m(\tau)d\tau,\quad m = 1,\ 2,$$

и подставляем в (11).

Тем самым решение нашего уравнения найдено с учетом малых ε второго порядка. В нашем случае формулы (16) примут вид

$$X_1(t) = \cos(\sigma tE + \widetilde{\Phi}) \exp\widetilde{H},\quad X_2(t) = \sin(\sigma tE + \widetilde{\Phi})\exp\widetilde{H}.$$

Рассмотрим уравнение

$$\ddot{X} + [A^2 + \varepsilon P(t,\ X,\ \varepsilon)]X = 0,$$

где $P(t, X, \varepsilon)$ — функция, аналитическая по X, ε в некоторой области t, X, $\varepsilon \in D$, причем коэффициенты ее разложения в ряд по X, ε могут быть матричными функциями t. Пусть, например,

$$P(t,\ X,\ \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(t)X^k\varepsilon^k$$

(функцию $P(t, X, \varepsilon)$ можно брать и более общего вида). Это уравнение решаем также исходя из представления (11). Система для нахождения матриц H_k, Φ_k будет аналогична (14). Разумеется, при этом значительно усложнятся выкладки, мы их опускаем. Поясним лишь некоторые моменты. Уравнение (12) в нашем случае будет иметь последнее слагаемое следующего вида:

$$\varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} (\psi_i D_k) S^k \varepsilon^k,$$

где

$$D_k = \exp(-iAt) P_k \exp(iAt) = D_k^{(1)} + i D_k^{(2)},$$

$$S = \exp \widetilde{H} \exp(iAt) \exp i \widetilde{\Phi} = (\exp \widetilde{H})(S_1 + iS_2).$$

Полагая $\psi_i D_k = U_3^{(k)} + i V_3^{(k)}$, мы сможем указанное слагаемое представить в таком виде: $\varepsilon(U_3 + iV_3)$, после чего от уравнения (12) переходим к системе типа (13) и т. д.

Наконец, описанным выше методом можно решать такое уравнение:

$$\ddot{X} + \varepsilon f(t, X, \dot{X}, \varepsilon) \dot{X} + X = 0$$

в предположении аналитичности функции $f(t, X, \dot{X}, \varepsilon)$ по X, $\dot{X}$, ε в области t, X, $\dot{X}$, $\varepsilon \in M$, а также дифференциально-матричные уравнения более высоких порядков.

Литература

1. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., Физматгиз, 1963.
2. Еругин Н. П. Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Минск, Изд. АН БССР, 1963.
3. Фещенко С. Ф., Шкиль Н. И., Николаенко Л. Д. Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений. Киев, «Наукова думка», 1966.
4. Хейл Дж. Колебания в нелинейных системах. М., «Мир», 1966.
5. Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. ГТТИ, 1956.
6. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. ОНТЛ, 1935.
7. Лаппо-Данилевский И. А. Применение функций от матриц к теории линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. ГИТТЛ, 1957.
8. Еругин Н. П. Метод Лаппо-Данилевского в теории линейных дифференциальных уравнений. Изд. ЛГУ, 1956.
9. Еругин Н. П. Приводимые системы. Труды Математического ин-та им. В. А. Стеклова, т. XIII, 1946.
10. Штокало И. З. Линейные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами. Киев, Изд. АН УССР, 1960.
11. Лаптинский В. Н. ДАН БССР, **13**, № 11, 1969.
12. Лаптинский В. Н. Дифференц. уравнения, **6**, № 3, 1970.
13. Лаптинский В. Н. Дифференц. уравнения, **6**, № 5, 1970.
14. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М., «Наука», 1969.
15. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М., «Наука», 1967.
16. Лаптинский В. Н. Украинский матем. ж., **22**, № 6, 1970.

Поступила в редакцию
27 мая 1970 г.

Могилевский машиностроительный институт