АВГУСТ 1972 г., ТОМ VIII, № 8

УДК 517.926.7

НЕКОТОРЫЕ СПЕЦИАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-МАТРИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА РИККАТИ

В. Н. ЛАПТИНСКИЙ, В. В. ПУГИН

Рассмотрим задачу Коши для дифференциально-матричного уравнения типа Риккати

$$\dot{X}=A(t)X^2, \quad X(0)=\tilde{X}_0, \tag{1}$$

где X, A—$n\times n$-матрицы, $A(t)$ непрерывна на промежутке $[0, b]$ изменения аргумента t.

Это уравнение представляет лишь наиболее простой случай дифференциально-матричного уравнения типа Риккати

$$\frac{dW}{dt}=F(t)+D(t)W+WP(t)+A(t)W^2+WC(t)W+W^2Q(t), \tag{2}$$

задача исследования которого поставлена в [9].

Широкие приложения уравнения (2) и его многомерных аналогов в теории управления, теории многоволновых линий передач, в квантовой механике, динамическом программировании и других областях вызывают к нему все возрастающий интерес. Изучению частных случаев уравнения (2) посвящены работы [1—5] советских и зарубежных математиков.

Многие авторы исследовали частные виды уравнения (2) либо при постоянных и симметрических коэффициентах, либо только при постоянных, при этом искали решения в замкнутой форме или изучали их свойства.

Однако большой интерес представляет отыскание методов решения дифференциально-матричных уравнений типа Риккати с произвольными коэффициентами. Разумеется, здесь речь идет о приближенных методах. Особый интерес представляет метод, основанный на введении параметра, восходящий к А. Пуанкаре, А. М. Ляпунову, Н. П. Еругину.

Обратимся к уравнению (1). Вводя скалярный численный параметр $\lambda>0$, запишем уравнение (1) в виде

$$\dot{X}=\lambda A(t)X^2, \quad X(0)=\tilde{X}_0 \tag{3}$$

и будем изучать линейные преобразования специального вида в случае уравнения (3). Пусть

$$X=(E-\lambda B)^{-1}Y, \quad Y(0)=\tilde{X}_0, \quad B=\int_0^t A(\tau)\,d\tau. \tag{4}$$

Известно [8], что в случае линейного уравнения

$$\dot{X}=\lambda A(t)X, \quad X(0)=\tilde{X}_0,$$

преобразование $X=\exp(\lambda B)Y$ приводит это уравнение к виду, правая часть которого не содержит λ в первой степени, а при условии $AB=BA$ получается точное решение $X=(\exp\lambda B)\tilde{X}_0$.

В случае уравнения (3) можно сказать [9], что если $AB=BA$, то точное решение $X(t,\lambda)$, $X(0,\lambda)=E$, при малых λ имеет вид

$$X(t,\lambda)=[E-\lambda B(t)]^{-1}, \quad X(0,\lambda)=E.$$

Во многих задачах для инженерных вычислений достаточно получить лишь первое приближение к решению. В связи с этим возникает вопрос, обладает ли преобразование (4) свойством описанного преобразования?

Теорема 1. *Преобразование (4) приводит уравнение (3) к уравнению относительно Y, решение которого по степеням λ начинается с λ^2 тогда и только тогда, если начальные данные удовлетворяют алгебраическому матричному уравнению*

$$A(t)\tilde{X}_0^2-A(t)\tilde{X}_0=0. \tag{$*$}$$

В самом деле, преобразование типа (4) лишь изменяет структуру правой части уравнения (3) относительно параметра и из уравнения (3) получаем

$$\dot{Y}=-\lambda A(E-\lambda B)^{-1}Y+\lambda(E-\lambda B)A(E-\lambda B)^{-1}Y(E-\lambda B)^{-1}Y, \quad Y(0)=\tilde{X}_0. \tag{5}$$

Будем искать его решение в виде ряда, расположенного по степеням λ, т. е. положим

$$Y=\sum_{s=0}^{\infty}\lambda^s Y_s,\quad Y_0(0)=\tilde{X}_0,\quad Y_k(0)=0,\quad k=1,\ 2,\ \ldots \tag{6}$$

Подставляя (6) в уравнение (5) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ, для определения Y_s, $s=0,\ 1,\ \ldots$, мы получаем соотношения

$$\dot{Y}_0=0,\quad \dot{Y}_1=-AY_0+AY_0^2.$$

И вообще

$$\dot{Y}_{m+2}=-A\sum_{s=0}^{m+1}B^sY_{m+1-s}+A\sum_{k=0}^{m+1}\left(\sum_{s=0}^{k}B^sY_{k-s}\sum_{s=0}^{m+1-k}B^sY_{m+1-k-s}\right)-$$

$$-BA\sum_{k=0}^{m}\left(\sum_{s=0}^{k}B^sY_{k-s}\cdot\sum_{s=0}^{m-k}B^sY_{m-k-s}\right),\quad m=0,\ 1,\ \ldots,\ B^0=E. \tag{7}$$

Откуда имеем

$$Y_0=\tilde{X}_0,\quad Y_1=\int_0^t(-AY_0+AY_0^2)\,d\tau,\ \ldots,$$

$$Y_{m+2}=\int_0^t f_{m+1}(A,\ B,\ Y_0,\ Y_1,\ \ldots,\ Y_{m+1})\,d\tau,\quad m=0,\ 1,\ \ldots, \tag{8}$$

где

$$f_{m+1}=-A\sum_{s=0}^{m+1}B^sY_{m+1-s}+A\sum_{k=0}^{m+1}\left(\sum_{s=0}^{k}B^sY_{k-s}\cdot\sum_{s=0}^{m+1-k}B^sY_{m+1-k-s}\right)-$$

$$-BA\sum_{k=0}^{m}\left(\sum_{s=0}^{k}B^sY_{k-s}\cdot\sum_{s=0}^{m-k}B^sY_{m-k-s}\right).$$

И, следовательно,

$$Y(t,\ \lambda)=\tilde{X}_0+\lambda\int_0^t(-AY_0+AY_0^2)\,d\tau+\sum_{m=0}^{\infty}\lambda^{m+2}\int_0^t f_{m+1}(A,\ B,\ Y_0,\ Y_1,\ \ldots,\ Y_{m+1})\,d\tau. \tag{9}$$

Откуда и получаем требуемое.

Докажем аналитичность матрицы $Y(t,\ \lambda)$ в некоторой области λ, $t\in M$. Из (4) имеем при малых λ

$$Y=(E-\lambda B)\,X(t,\ \lambda). \tag{10}$$

Матрицу $X(t,\ \lambda)$ также ищем в виде ряда, расположенного по степеням λ, т. е.

$$X(t,\ \lambda)=\sum_{s=0}^{\infty}\lambda^sX_s,\ X_0(0)=\tilde{X}_0,\quad X_k(0)=0,\quad k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots \tag{11}$$

Ряд (11) мажорируется [10] скалярным рядом

$$\sum_{k=0}^{\infty}(\lambda\alpha t)^k \tag{12}$$

и, следовательно, ряд, определяемый $Y(t,\ \lambda)$, сходится равномерно в некоторой области $t\in[0,\ b]$, $0<\lambda<\tilde{\lambda}$, и представляет собой решение уравнения (5).

Вводя норму матриц, например, $\|A\|=\max\limits_i\sum\limits_{k=1}^{n}|a_{ik}|$, $i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$, и оценки $\|A\|\leqslant\alpha$, $\|\tilde{X}_0\|\leqslant x_0$, $t\in[0,\ b]$, истинность решения $Y(t,\ \lambda)$ можно установить непосредственно, а также можно получить оценку скорости сходимости.

Действительно, из формулы (9) имеем

$$\|Y(t,\ \lambda)\|\leqslant x_0+\lambda\alpha x_0(x_0+1)\,t+\lambda^2\alpha^2x_0(x_0^2+3x_0+1)\,t^2+\ \ldots \tag{13}$$

Полученные оценки согласуются с разложением в ряд по степеням λt функции

$$u=\frac{1-\lambda\alpha t}{-\lambda\alpha t+x_0^{-1}(1-\lambda\alpha t)^2}, \tag{14}$$

которая является мажорантной для интегральной матрицы $Y(t, \lambda)$. Эту оценку можно получить путем перехода от дифференциального уравнения (5) к соответствующему интегральному, а затем опираясь на теорему об интегральных неравенствах.

Следовательно, ряд в (9) сходится равномерно при $t\in[0, b]$, $0<\lambda<\lambda_0$ и (9) представляет собой решение уравнения (5) при любых начальных условиях.

Заметим, однако, что в случае, когда решается задача нахождения нормированного решения уравнения (1) с помощью подстановки (4), интегральная матрица $Y(t, \lambda)$ не содержит первую степень λ. Здесь тоже пригодна мажоранта типа (14), но можно указать при этом и более точную мажоранту. В самом деле, применяя к уравнению (1) подстановку

$$X=[E+\lambda B(E-\lambda B)^{-1}][E+Z(t, \lambda)], \tag{4'}$$

где $Z(t, \lambda)=\sum\limits_{s=2}^{\infty}\lambda^s Z_s$, $Z_s(0)=0$, $s=2, 3, \ldots$, для $Z(t, \lambda)$ получаем уравнение, не содержащее в правой части λ в первой степени, из которого аналогично описанному выше случаю можно найти $Z(t, \lambda)$ и получить мажорантную функцию

$$u=\frac{\ln[(\exp\lambda\alpha t)(1-\lambda\alpha t)]^{-2}}{\ln[(1-\lambda\alpha t)^2\exp(1+\lambda\alpha t)]}. \tag{14'}$$

При этом оценка интегральной матрицы $Z(t, \lambda)$ начинается с λ^2 и имеет вид

$$\|Z(t, \lambda)\|\leqslant\lambda^2\alpha^2t^2+\frac{5}{3}\lambda^3\alpha^3t^3+\ldots \tag{13'}$$

Полагая в (9) и в (4) $\lambda=1$, мы получим интегральную матрицу уравнения (1) в промежутке $[0, b]$, $\tilde{b}<b$, изменения аргумента.

З а м е ч а н и е. Следует отметить, что если $A(t)$ —невырожденная матрица, то имеются нетривиальные решения, например, с начальным условием $X(0)=E$, обладающие указанным в теореме 1 свойством. Если же $A(t)$—вырожденная матрица, то таких решений—бесчисленное множество или вообще может не быть.

Пусть, кроме условия (*), матрица $\tilde{X}_0$ удовлетворяет условиям

$$A(t)\tilde{X}_0=\tilde{X}_0A(t), \quad AB=BA.$$

Тогда точное решение уравнения (3) имеет вид $X=(E-\lambda B)^{-1}\tilde{X}_0$.

Аналогичный подход к нахождению приближенного решения можно осуществить в случае уравнения

$$\dot{X}=A(t)X^2+F(t), \quad X(0)=\tilde{X}_0, \tag{15}$$

где X, A, F—$n\times n$-матрицы, $A(t)$, $F(t)$—непрерывные на промежутке $[0, b]$ изменения аргумента t.

Вводя действительный скалярный положительный параметр λ, уравнение (15) запишем в виде

$$\dot{X}=\lambda A(t)X^2+F(t), \quad X(0)=\tilde{X}_0. \tag{16}$$

Используя преобразование $X=(E-\lambda B)^{-1}Y+\tilde{F}(t)$, где $\tilde{F}(t)=\int\limits_0^t F(\tau)\,d\tau$, для новой неизвестной матрицы Y из (16) получаем уравнение

$$\dot{Y}=-\lambda A(E-\lambda B)^{-1}Y+\lambda(E-\lambda B)A(E-\lambda B)^{-1}Y(E-\lambda B)^{-1}Y+\lambda(E-\lambda B)A(E-\lambda B)^{-1}Y\tilde{F}+$$
$$+\lambda(E-\lambda B)A\tilde{F}(E-\lambda B)^{-1}Y+\lambda(E-\lambda B)A\tilde{F}^2, \quad Y(0)=\tilde{X}_0. \tag{17}$$

Полагая в (17) $Y=\sum\limits_{s=0}^{\infty}\lambda^sY_s$, $Y_0(0)=\tilde{Y}_0=\tilde{X}_0$, $Y_k(0)=0$, $k=1, 2, 3, \ldots$, интегральную матрицу $Y(t, \lambda)$ найдем в виде

$$Y=\tilde{X}_0+\sum_{m=0}^{\infty} \lambda^{m+1} \int_0^t f_m(A, B, \tilde{F}, Y_0, Y_1, \ldots, Y_m)\, d\tau.$$

Доказательство сходимости полученного решения и оценки погрешности приближений могут быть получены по той же схеме, что и для задачи (1).

Эффективным в указанном выше смысле из серии линейных преобразований для уравнений вида (3) и (16) является так же преобразование

$$X=(\tilde{X}_0^{-1}-\lambda B)^{-1} Y, \quad Y(0)=E, \tag{18}$$

для которого имеет место

Теорема 2. *Преобразование (18) приводит уравнение (3) к уравнению относительно Y, решение которого по степеням λ начинается с λ^2 тогда и только тогда, если начальные данные удовлетворяют алгебраическому матричному уравнению*

$$A(t)\tilde{X}_0=\tilde{X}_0 A(t).$$

Доказательство теоремы можно провести по схеме, содержащейся в теореме 1,

Отметим, что если выполняются условия $A\tilde{X}_0=\tilde{X}_0 A$, $AB=BA$, то точное решение уравнения (3) имеет вид

$$X=(E-\lambda\tilde{X}_0 B)^{-1}\tilde{X}_0.$$

Приведенные выше рассуждения можно провести для уравнений вида

$$\dot{X}=X^2A(t), \quad \dot{X}=X^2A(t)+F(t), \quad \dot{X}=XA(t)X+F(t).$$

Рассматривая уравнение

$$\dot{X}=XA(t)X+F(t), \; X(0)=\tilde{X}_0, \tag{19}$$

в тех же предположениях на матрицы X, A и F, что и для уравнения (15), укажем так же метод построения его решения. Для этого введем в уравнение (19) численный параметр λ следующим образом

$$\dot{X}=XA(t)X+\lambda F(t), \; X(0)=\tilde{X}_0. \tag{20}$$

Следует заметить, что непосредственное нахождение интегральной матрицы $X(t, \lambda)$, разложенной по степеням λ, начиная с λ^0, неприменимо для уравнения (20) в области нетривиальных $X_0(t)$. При этом возникают трудности нахождения решений линейных неоднородных матричных уравнений вида

$$\dot{H}_s=A_sH_s+H_sB_s+F_s, \quad s=0, 1, \ldots$$

Избежать указанных трудностей удается, если в уравнении (20) выполнить преобразование вида $X=U^{-1}$, где $U(t)$—неособенная матрица.

Литература

1. Красовский А. А. Статистическая теория переходных процессов в системах управления. М., «Наука», 1968.
2. Захар—Иткин М. Х. УМН, т. XXV, вып. 5, 1970.
3. Bellman R. I. Math. Analysis. and Appic., 17, № 2, 1967.
4. Schumitzky A. I. Comput. Syst. Sci., 2, № 1, 1968.
5. Vaughan D. R. JEEE Trans. Automat. Control, 14, № 1, 1969.
6. Беллман Р., Калаба Р. Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи. М., «Мир», 1968.
7. Еругин Н. П. Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Изд. АН БССР, Минск, 1963.
8. Лаптинский В. Н. Дифференц. уравнения, 6, № 5, 1970.
9. Лаптинский В. Н., Пугин В. В. Дифференц. уравнения, 5, № 8, 1969.
10. Пугин В. В. Третья республиканская конференция математиков Белоруссии, ч. 2. Минск, 1971.

Поступила в редакцию 30 ноября 1971 г.

Могилевский машиностроительный институт, Белорусский государственный университет им. В. И. Ленина