ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

АПРЕЛЬ 1974 г., ТОМ X, № 4

УДК 517.926.4

ОБ ОЦЕНКАХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ $x''' = A(t)x$

В. Н. ЛАПТИНСКИЙ

Рассмотрим систему

$$x''' = A(t)\,x, \quad \left({}' = \frac{d}{dt}\right), \tag{1}$$

где $A(t)$ суть $n \times n$-матрица, x — вектор.

Нас будут интересовать оценки решений этой системы и их производных, точные в классе систем с постоянными коэффициентами. Приведенные ниже результаты являются продолжением исследований, начатых в [1, 2]. Следует отметить, что в случае систем второго порядка аналогичная задача рассматривалась многими авторами (см., например, [3—5]).

Введем некоторые обозначения.

1. $(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \eta_i$, $\xi, \eta \in R_n$,—скалярное произведение векторов n-мерного векторного действительного евклидова пространства R_n.

2. $\|\xi\| = \sqrt{(\xi, \xi)}$ — норма вектора $\xi \in R_n$.

3. $\|B\| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}^2}$ — норма матрицы B.

4. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — характеристические корни симметрической матрицы S. Тогда обозначим $\Lambda(S) = \max_i \lambda_i$, $\lambda(S) = \min_i \lambda_i$.

5. A^T — матрица, транспонированная матрице A.

6. $s(A) = \dfrac{A + A^T}{2}$ — симметрическая часть матрицы A.

7. $\rho = \begin{pmatrix} \|x\|^2 \\ \|x'\|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ — 2-мерный вектор, соответствующий мажоранте решения системы (1) и его производной.

Лемма. *Пусть $A(t)$ дважды непрерывно дифференцируема при $t \geqslant 0$. Тогда $u\rho \leqslant \rho \leqslant U\rho$, где*

$$u\rho = \varphi(t) + \int_0^t Q(t, \tau)\,\rho\,d\tau, \quad U\rho = \varphi(t) + \int_0^t P(t, \tau)\,\rho\,d\tau,$$

$$P = [p_{ik}]_1^2, \quad Q = [q_{ik}]_1^2, \quad \varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix},$$

$$\varphi_1 = v_1(0) + v_1'(0)\,t + \frac{1}{2}\left[v_1''(0) - 3v_2(0)\right]t^2, \quad \varphi_2 = v_2(0) + \left[v_2'(0) - 3(Ax, x)_0\right]t + \beta t^2,$$

$$\beta = (x'', x'')_0 - (Ax, x)_0' + 2(A'x, x)_0 + \left((A - A^T)\,x', x\right)_0,$$

$$p_{11} = (t-\tau)^2\,\Lambda[s(A)], \quad p_{12} = q_{12} = 3(t-\tau), \quad q_{11} = (t-\tau)^2\,\lambda[s(A)],$$

$$p_{21} = 3\,\Lambda[s(A)] + (t-\tau)\left(\frac{3}{2}\|A - A^T\| - 5\lambda[s(A')]\right) +$$

$$+ (t-\tau)^2 \left(\frac{1}{2} \|(A - A^T)'\| + \Lambda [s(A'')]\right),$$

$$q_{21} = 3\lambda [s(A)] - (t-\tau)\left(\frac{3}{2} \|A - A^T\| + 5\Lambda [s(A')]\right) +$$

$$+ (t-\tau)^2 \left(\lambda [s(A'')] - \frac{1}{2} \|(A - A^T)'\|\right),$$

$$p_{22} = \frac{3}{2} (t-\tau) \|A - A^T\| + (t-\tau)^2 \left(\frac{1}{2} \|(A - A^T)'\| - 2\lambda [s(A)]\right),$$

$$q_{22} = -\frac{3}{2} (t-\tau) \|A - A^T\| - (t-\tau)^2 \left(\frac{1}{2} \|(A - A^T)'\| + 2\Lambda [s(A)]\right).$$

Доказательство. Умножая уравнение (1) скалярно на x, получим

$$(x''', x) = (Ax, x). \tag{2}$$

Нетрудно проверить, что

$$(x''', x) = \frac{1}{2}(x, x)''' - \frac{3}{2}(x', x')'.$$

Тогда (2) примет вид

$$(x, x)''' - 3(x', x')' = 2(Ax, x).$$

Отсюда после интегрирования получим

$$v_1 = \varphi_1(t) + 3\int_0^t (t-\tau)(x', x')\, d\tau + \int_0^t (t-\tau)^2 (Ax, x)\, d\tau. \tag{3}$$

Умножим теперь уравнение (1) на x'

$$(x''', x') = (Ax, x'). \tag{4}$$

Учитывая, что

$$(x''', x') = \frac{1}{2}(x', x')'' - (x'', x''),$$

$$(Ax, x') = \frac{1}{2}(Ax, x)' - \frac{1}{2}(A'x, x) - \frac{1}{2}\left((A - A^T)x', x\right),$$

получим из (4) после интегрирования

$$v_2 = v_2(0) + [v_2'(0) - (Ax, x)_0]\, t + \int_0^t (Ax, x)\, d\tau + 2\int_0^t (t-\tau)(x'', x'')\, d\tau -$$

$$- \int_0^t (t-\tau)\left[(A'x, x) + \left((A - A^T)x', x\right)\right] d\tau. \tag{5}$$

Наконец, умножим уравнение (1) на x''

$$(x''', x'') = (Ax, x''). \tag{6}$$

Очевидно, что $(x''', x'') = \frac{1}{2}(x'', x'')'$. Далее можно проверить справедливость соотношения

$$(Ax, x'') = \frac{1}{2}(Ax, x)'' - (A'x, x)' - \frac{1}{2}\left((A - A^T)x', x\right)' +$$

$$+ \frac{1}{2}\left((A - A^T)'x', x\right) + \frac{1}{2}(A''x, x) - (Ax', x').$$

Тогда из (6) следует

$$(x'', x'') = \beta + (Ax, x)' - 2(A'x, x) - ((A - A^T)x', x) +$$
$$+ \int_0^t [((A - A^T)' x', x) + (A''x, x) - 2(Ax', x')] \, d\tau.$$

Подставляя значение (x'', x'') в формулу (5), получим

$$v_2 = \varphi_2(t) + 3\int_0^t (Ax, x)\, d\tau - \int_0^t (t-\tau)[5(A'x, x) + 3((A - A^T)x', x)]\, d\tau +$$
$$+ \int_0^t (t-\tau)^2 [((A - A^T)' x', x) + (A''x, x) - 2(Ax', x')]\, d\tau. \tag{7}$$

А теперь, используя известные соотношения

$$|((B - B^T)\xi, \eta)| \leqslant \frac{1}{2}\|B - B^T\| (\|\xi\|^2 + \|\eta\|^2), \quad \lambda[s(B)]\|\xi\|^2 \leqslant (B\xi, \xi) \leqslant \Lambda[s(B)]\|\xi\|^2,$$

от выражений (3) и (7) придем к неравенствам $u\rho \leqslant \rho \leqslant U\rho$, тем самым лемма доказана.

Теорема. *Пусть матрица $A(t)$ дважды непрерывно дифференцируема при $t \geqslant 0$, причем $\Lambda[s(A)] \leqslant a_1$, $\frac{3}{2}\|A - A^T\| - 5\lambda[s(A')] \leqslant a_2$, $\frac{1}{2}\|(A - A^T)'\| + \Lambda[s(A'')] \leqslant a_3$, $\frac{3}{2}\|A - A^T\| \leqslant a_4$, $\frac{1}{2}\|(A - A^T)'\| - 2\lambda[s(A)] \leqslant a_5$, где a_i, $i = \overline{1,5}$, неотрицательные постоянные.*

Тогда $\rho \leqslant z$, где z есть решение следующей задачи:

$$z''' - A_1 z'' - A_2 z' - A_3 z = 0, \tag{8}$$

$$z(0) = \rho(0),\ z_1'(0) = v_1'(0),\ z_2'(0) = v_2'(0) - 3(Ax, x)_0 + 3a_1 v_1(0),$$

$$z_1''(0) = v_1''(0),\ z_2''(0) = 2\beta + 3a_1 v_1'(0) + a_2 v_1(0) + a_4 v_2(0),$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3a_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ a_2 & a_4 \end{pmatrix}, \quad A_3 = 2\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ a_3 & a_5 \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Из условий теоремы следует, что $P(t, \tau) \leqslant R(t, \tau)$, $0 \leqslant \tau \leqslant t$, где

$$R(t, \tau) = \begin{pmatrix} a_1 (t-\tau)^2 & 3(t-\tau) \\ 3a_1 + a_2(t-\tau) + a_3(t-\tau)^2 & a_4(t-\tau) + a_5(t-\tau)^2 \end{pmatrix}.$$

Ясно, что $R(t, \tau) \geqslant 0$. А тогда из теоремы об интегральных неравенствах (см., например, [6, стр. 86]) имеем $\rho \leqslant z$, где $z(t)$ суть решение интегрального уравнения

$$z(t) = \varphi(t) + \int_0^t R(t, \tau) z(\tau)\, d\tau,$$

которое эквивалентно задаче Коши, сформулированной в условии теоремы.

Разумеется, по этой схеме можно получить оценку снизу для $\rho(t)$.

Отметим еще, что, исходя из выражения для (x'', x''), можно соответствующим образом оценить и эту функцию, тем самым получим полную оценку решения задачи Коши для уравнения (1). Эти оценки при указанных ограничениях на элементы матрицы $A(t)$ являются точными, когда $A = \text{const}$.

В частности, в случае скалярного уравнения

$$x''' = ax$$

имеем $a_1 = a$, $a_5 = -2a$, $a_2 = a_3 = a_4 = 0$, $z_1''' = 2az_1 + 3z_2'$, $z_2''' = 3az_1'' - 4az_2$, причем $x^2(t) = z_1(t)$, $x'^2(t) = z_2(t)$.

Литература

1. Лаптинский В. Н. Всесоюзная конференция по качественной теории дифференц. уравнений. Тезисы докладов. Рязань, 1971, стр. 161.
2. Лаптинский В. Н. Дифференц. уравнения, **9**, № 5, 1973.
3. Скрипник В. П. Изв. вузов. Математика, № 2(27), 151—161, 1962.
4. Кудаев Б. М. Дифференц. уравнения, **4**, № 10, 1968.
5. Олехник С. Н. Дифференц. уравнения, **8**, 10, 1972.
6. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М., «Наука», 1970.

Поступила в редакцию
22 марта 1973 г.

Могилевский машиностроительный институт