СЕНТЯБРЬ 1976 г., ТОМ XII, № 9

УДК 517.926.45

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ ВАРИАЦИИ ПАРАМЕТРА

В. Н. ЛАПТИНСКИЙ

Рассмотрим уравнение

$$\frac{dx}{dt} = A(t)\,x, \quad x \in R^n, \quad A(t): R^n \to R^n, \tag{1}$$

с непрерывной ω-периодической матрицей $A(t)$.

Изучение асимптотических характеристик этого уравнения, как известно, сводится к выяснению спектра его матрицы монодромии $X(\omega)$.

Эту задачу будем решать следующим образом. Наряду с уравнением для фундаментальной матрицы $X(t)$, $X(0) = E$, E — единичная,

$$\frac{dX(t)}{dt} = A(t)\,X(t) \tag{2}$$

рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial U(t, \lambda)}{\partial t} = \lambda A(t)\,U(t, \lambda), \tag{3}$$

в котором параметр $\lambda \in R^+ \{\lambda : 0 \leqslant \lambda < \infty\}$.

Матрица $U(t, \lambda)$, $U(0, \lambda) = E$, $\forall \lambda \in R^+$ аналитична по λ и имеет вид, см., например, [1, стр. 56],

$$U(t, \lambda) = E + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k \int_0^t A(t_1)\,dt_1 \int_0^{t_1} A(t_2)\,dt_2 \ldots \int_0^{t_{k-1}} A(t_k)\,dt_k, \tag{4}$$

причем $U(t, 1) = X(t)$. Ее можно рассматривать как фундаментальную матрицу $U(t, \lambda)$, $U(t, 0) = E$, $\forall t \in R$ уравнения

$$\frac{\partial U}{\partial \lambda} = P(t, \lambda)\,U, \tag{5}$$

в котором параметр уже $t \in R$. Матрица $P(t, \lambda)$, $P(0, \lambda) = 0$, $\forall \lambda \in R^+$ аналитична по λ, ее можно найти, опираясь на формулу (4), но при этом мы не получим эффективного алгоритма для вычисления $P(t, \lambda)$. Используем для этой цели уравнение (3), из которого имеем, см. [2, стр. 316],

$$\frac{\partial U(t, \lambda)}{\partial \lambda} = U(t, \lambda) \int_0^t U^{-1}(\tau, \lambda)\,A(\tau)\,U(\tau, \lambda)\,d\tau. \tag{6}$$

Сопоставляя (5) и (6), получаем

$$P(t, \lambda) = U(t, \lambda) \int_0^t U^{-1}(\tau, \lambda)\,A(\tau)\,U(\tau, \lambda)\,d\tau\, U^{-1}(t, \lambda).$$

А теперь нетрудно вывести дифференциальное уравнение для P

$$\frac{\partial P}{\partial t}=A+\lambda[A,\ P],\tag{7}$$

где $[A,\ P]=AP-PA$. Матрицу P находим из (7) в виде ряда по степеням λ

$$P=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k P_k(t),\tag{8}$$

$$P_{r+1}=\int_0^t [A(\tau),\ P_r(\tau)]\,d\tau,\quad r=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ P_0=\int_0^t A(\tau)\,d\tau.$$

Ряд (8) сходится абсолютно и равномерно в области $D\{t,\ \lambda: t,\ \lambda\in R\times R^+\}$. Это доказывается построением скалярного мажорантного ряда.

Нетрудно проверить справедливость формулы

$$P(t,\ \lambda)=\tilde{P}_m(t,\ \lambda)+R_m(t,\ \lambda),\quad m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\tag{9}$$

где

$$\tilde{P}_m=\sum_{k=0}^{m}\lambda^k P_k(t),\ \ R_m=\lambda^{m+1}\int_0^t K(t,\ \tau,\ \lambda)\,[A,\ P_m]\,K^{-1}(t,\ \tau,\ \lambda)\,d\tau,$$

$$K(t,\ \tau,\ \lambda)=U(t,\ \lambda)\,U^{-1}(\tau,\ \lambda).$$

Далее из (5) с учетом (9) имеем с помощью неравенства Гронуолла—Беллмана оценку

$$\|U(t,\ \lambda)\|\leqslant\exp\left(\sum_{k=0}^{m}\frac{\lambda^{k+1}}{k+1}\|P_k(t)\|+\int_0^{\lambda}\|R_m(t,\ \mu)\|\,d\mu\right).\tag{10}$$

Здесь $\|\cdot\|$ — любая (согласованная) норма, для которой $\|E\|=1$. Поскольку

$$\|R_m\|\leqslant\lambda^{m+1}e^{2\lambda\alpha t}\int_0^t\|[A,\ P_m]\|\,d\tau,$$

где $\|A(t)\|\leqslant\alpha,\ t\in[0,\ \omega]$, то (10) можем несколько упростить, а именно

$$\|U(t,\ \lambda)\|\leqslant\exp\left(\sum_{k=0}^{m}\frac{\lambda^{k+1}}{k+1}\|P_k(t)\|+\frac{\lambda^{m+2}}{m+2}e^{2\lambda\alpha t}\int_0^t\|[A,\ P_m]\|\,d\tau\right).$$

Заметим, что если $[A,\ P_m]=0\ \forall t\in[0,\ \omega]$, то (10) примет вид

$$\|U(t,\ \lambda)\|\leqslant\exp\left(\sum_{k=0}^{m}\frac{\lambda^{k+1}}{k+1}\|P_k(t)\|\right).$$

Наконец, сведем уравнение (5) к эквивалентному интегральному уравнению

$$U(t,\ \lambda)=\tilde{U}_m(t,\ \lambda)+\int_0^{\lambda}\tilde{U}_m(t,\ \lambda)\,\tilde{U}_m^{-1}(t,\ \mu)\,R_m(t,\ \mu)\,U(t,\ \mu)\,d\mu,\tag{11}$$

где $\tilde{U}_m(t,\ \lambda)$, $\tilde{U}_m(t,\ 0)=E$, находится из уравнения

$$\frac{\partial\tilde{U}_m}{\partial\lambda}=\tilde{P}_m(t,\lambda)\,\tilde{U}_m.$$

Приведем теперь достаточный признак асимптотической устойчивости уравнения (1).

Теорема. *Пусть выполнены условия*

$$\sigma=\|\tilde{U}_m(\omega,\ 1)\|<1,$$

$$\exp\left(\frac{1}{m+2} e^{2\alpha\omega} \int_0^\omega \| [A, P_m] \| \, dt\right) < \frac{1-\sigma}{\sigma} \exp\left(-2 \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k+1} \| P_k(\omega) \| \right) + 1 .$$

Тогда уравнение (1) асимптотически устойчиво.

Доказательство. Очевидно, нам достаточно показать обратимость при $|\rho| \geqslant 1$ матрицы коэффициентов алгебраической системы

$$[\rho E - U(\omega, 1)]\, x_0 = 0.$$

Согласно уравнению (11), имеем

$$\left[\rho E - \tilde{U}_m(\omega, 1) - \tilde{U}_m(\omega, 1) \int_0^1 \tilde{U}_m^{-1}(\omega, \mu) R_m(\omega, \mu) U(\omega, \mu)\, d\mu\right] x_0 = 0. \tag{12}$$

Так как матрица $\rho E - \tilde{U}_m(\omega, 1)$ обратима при $|\rho| \geqslant 1$, то из (12) следует

$$\left[E - (\rho E - \tilde{U}_m(\omega, 1))^{-1} \tilde{U}_m(\omega, 1) \int_0^1 \tilde{U}_m^{-1}(\omega, \mu) R_m(\omega, \mu) U(\omega, \mu)\, d\mu\right] x_0 = 0$$

или

$$\left[E - \left(E - \frac{\tilde{U}_m(\omega, 1)}{\rho}\right)^{-1} \frac{\tilde{U}_m(\omega, 1)}{\rho} \int_0^1 \tilde{U}_m^{-1}(\omega, \mu) R_m(\omega, \mu) U(\omega, \mu)\, d\mu\right] x_0 = 0.$$

Учитывая приведенные выше оценки, получим

$$\left\| \int_0^1 \tilde{U}_m^{-1}(\omega, \mu) R_m(\omega, \mu) U(\omega, \mu)\, d\mu \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \exp\left(2 \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k+1} \| P_k(\omega) \|\right) \int_0^1 \| R_m(\omega, \mu) \| \exp\left(\int_0^\mu \| R_m(\omega, \nu) \| \, d\nu\right) d\mu =$$

$$= \exp\left(2 \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k+1} \| P_k(\omega) \|\right) \left(\exp\left(\int_0^1 \| R_m(\omega, \mu) \| \, d\mu\right) - 1\right) \leqslant$$

$$\leqslant \exp\left(2 \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k+1} \| P_k(\omega) \|\right) \left(\exp\left(\frac{1}{m+2} e^{2\alpha\omega} \int_0^\omega \| [A, P_m] \| \, dt\right) - 1\right).$$

А теперь нетрудно получить требуемое.

Доказанная теорема позволяет получать коэффициентные признаки асимптотической устойчивости уравнения (1). Например условия, приведенные в каждом из п. 1°, 2°, доставляют такие признаки:

1°. $\sigma = \| \exp P_0(\omega) \| < 1$,

$$\exp\left(\frac{1}{2} e^{2\alpha\omega} \int_0^\omega \| [A, P_0] \| \, dt\right) < \frac{1-\sigma}{\sigma} \exp(-2 \| P_0(\omega) \|) + 1.$$

2°. $P_0(\omega) = 0, \quad \sigma = \| \exp \frac{1}{2} P_1(\omega) \| < 1$,

$$\exp\left(\frac{1}{3} e^{2\alpha\omega} \int_0^\omega \| [A, P_1] \| \, dt\right) < \frac{1-\sigma}{\sigma} \exp(-\| P_1(\omega) \|) + 1.$$

Разумеется, в случаях интегрируемости в конечном виде уравнения $\partial\tilde{U}_m/\partial\lambda = \tilde{P}_m(\omega, \lambda)\tilde{U}_m$ наша теорема доставляет другие признаки асимптотической устойчивости уравнения (1). Отметим еще, что на основе рассмотрения уравнения (5) можно получить критерий ω-периодичности матрицы $U(t, \lambda)$, а также достаточный признак ω-периодичности $X(t)$.

Замечание. Рассмотрим уравнение $\frac{dx}{dt} = A(t, \lambda)x$, в котором $A(t, \lambda)$ непрерывна по совокупности переменных $t, \lambda \in D\{t, \lambda: t, \lambda \in I_T \times I_\Lambda\}$, $I_T = [0, T]$, $I_\Lambda = [0, \Lambda]$, и непрерывно дифференцируема по λ.

Если $A(t, \lambda_0) = 0$, $\lambda_0 \in I_\Lambda$, то матрица $P(t, t_0, \lambda)$, $P(t_0, t_0, \lambda) = 0$, $t_0 \in I_T$, в уравнении (5) определится по изложенной выше схеме из условия

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial A}{\partial \lambda} + [A, P].$$

Тогда на основе уравнения (5) можно строить представления матрицы $U(t, t_0; \lambda, \lambda_0)$ мультипликативными интегралами по параметру, например,

$$U(t, t_0; \lambda, \lambda_0) = \widehat{\iint\limits_{I_t \times I_\lambda}} \left[E + \frac{\partial A}{\partial \lambda} dt\, d\lambda\right],$$

$$U(t, t_0; \lambda, \lambda_0) = \widehat{\iint\limits_{I_t \times I_\lambda}} \exp\left(\frac{\partial A}{\partial \lambda} dt\, d\lambda\right),$$

где $I_t = [t_0, t]$, $I\lambda = [\lambda_0, \lambda]$.

Можно показать также, что матрицы $U(t_2, t_1; \lambda_1, \lambda_0)$, $U(t_1, t_0; \lambda_2, \lambda_1)$, $t_i, \lambda_i \in D$, $i = 0, 1, 2$, коммутируют.

Автор выражает благодарность участникам Минского городского семинара, руководимого проф. Ю. С. Богдановым, за полезное обсуждение результатов этой заметки.

Литература

1. Еругин Н. П. Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Минск, Изд-во АН БССР, 1963.

2. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М., «Наука», 1970.

Поступила в редакцию
23 апреля 1975 г.

Могилевский филиал
Института физики АН БССР