УДК 517.925.42

В. Н. ЛАПТИНСКИЙ

О ПОСТРОЕНИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Заметка посвящена дальнейшему развитию предложенного в [1] подхода к построению периодических решений дифференциальных уравнений. Получена модификация указанного подхода, позволяющая расширить (по крайней мере в линейном случае) область применимости соответствующих алгоритмов.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{dx}{dt} = A(t)\,x + f(t), \quad x \in R^n, \tag{1}$$

где $A(t)$ и $f(t)$ непрерывны и периодичны с периодом $\omega > 0$.

Пусть $x(t)$ — ω-периодическое решение уравнения (1). Ищем его в виде

$$x(t) = y(t) + c, \tag{2}$$

где $y(t)$ — ω-периодическая вектор-функция, удовлетворяющая условию

$$\int\limits_0^{\omega} y(\tau)\,d\tau = 0, \tag{3}$$

c — постоянная векторная величина размерности n.

Известно (см. [2]), что всякая непрерывная (кусочно-непрерывная) ω-периодическая функция допускает единственное обладающее свойством (3) представление в виде (2).

Подставляя решение (2) в уравнение (1), получим дифференциальное уравнение для y

$$\frac{dy}{dt} = A(t)\,y + A(t)\,c + f(t). \tag{4}$$

Далее, применяя методику из работы [3], выведем интегральное уравнение для ω-периодической вектор-функции $y(t)$, удовлетворяющей уравнению (4) и граничному условию (3):

$$y(t)=\frac{1}{\omega}\int_0^t \tau A(\tau)\,y(\tau)\,d\tau-\frac{1}{\omega}\int_t^\omega(\omega-\tau)\,A(\tau)\,y(\tau)\,d\tau+H(t)\,c+\varphi(t), \tag{5}$$

где

$$H(t)=\frac{1}{\omega}\int_0^t \tau A(\tau)\,d\tau-\frac{1}{\omega}\int_t^\omega(\omega-\tau)\,A(\tau)\,d\tau,$$

$$\varphi(t)=\frac{1}{\omega}\int_0^t \tau f(\tau)\,d\tau-\frac{1}{\omega}\int_t^\omega(\omega-\tau)\,f(\tau)\,d\tau.$$

Так как $y(t)$ ω-периодична, то

$$\int_0^\omega A(\tau)\,y(\tau)\,d\tau+B(\omega)\,c+\int_0^\omega f(\tau)\,d\tau=0, \tag{6}$$

где $B(\omega)=\int_0^\omega A(\tau)\,d\tau$.

Таким образом, неизвестные y и c удовлетворяют соотношениям (5), (6). Нетрудно показать обратное: если величины $y(t)$, c являются решением системы (5), (6), то функция $x(t)$, полученная по формуле (2), есть ω-периодическое решение уравнения (1), причем $y(t)$ подчиняется граничному условию (3).

Если $\det B(\omega)\neq 0$, система (5), (6) приводится к виду

$$y(t)=\frac{1}{\omega}\int_0^t \tau A(\tau)\,y(\tau)\,d\tau-\frac{1}{\omega}\int_t^\omega(\omega-\tau)\,A(\tau)\,y(\tau)\,d\tau-$$

$$-H(t)\,B^{-1}(\omega)\int_0^\omega A(\tau)\,y(\tau)\,d\tau+g(t), \tag{7}$$

$$c=-B^{-1}(\omega)\int_0^\omega A(\tau)\,y(\tau)\,d\tau-B^{-1}(\omega)\int_0^\omega f(\tau)\,d\tau, \tag{8}$$

где $g(t)=\varphi(t)-H(t)\,B^{-1}(\omega)\int_0^\omega f(\tau)\,d\tau$.

Как видно, процесс нахождения величин y, c оказался довольно простым, по крайней мере с формальной точки зрения: по найденной из уравнения (7) функции $y(t)$ постоянную c находим по формуле (8).

Чтобы получить условия разрешимости уравнения (7), запишем его в виде

$$y(t)=\int_0^\omega K(t,\,\tau)\,y(\tau)\,d\tau+g(t), \tag{9}$$

где

$$K(t,\,\tau)=\begin{cases}\left[\dfrac{\tau}{\omega}E-H(t)\,B^{-1}(\omega)\right]A(\tau), & 0\leqslant\tau\leqslant t\leqslant\omega,\\[2ex] \left[\left(\dfrac{\tau}{\omega}-1\right)E-H(t)\,B^{-1}(\omega)\right]A(\tau), & \omega\geqslant\tau>t\geqslant 0\end{cases}$$

(здесь E — единичная матрица).

Несложные выкладки показывают, что из соотношения

$$\gamma\alpha^2\omega^2<3 \tag{10}$$

следует оценка $\max\limits_{0\leqslant t\leqslant\omega}\int_0^\omega\|K(t,\,\tau)\|\,d\tau<1$, а тогда, согласно работе [4], решение уравнения (9) существует и единственно; здесь $\alpha=\max\limits_{0\leqslant t\leqslant\omega}\|A(t)\|$, $\gamma=\|B^{-1}(\omega)\|$.

Таким образом, нами получена

Теорема. *При выполнении условий* $\det B(\omega)\neq 0$, $\gamma\alpha^2\omega^2<3$ *ω-периодическое решение уравнения (1) существует и единственно.*

Этот результат эффективнее соответствующего результата из [3], там получено условие $\gamma\alpha^2\omega^2<2$ (при $A=\mathrm{const}$ оно имеет вид $\alpha\omega<2$). Следует отметить, что и условие (10) допускает улучшение, если $A=\mathrm{const}$, а именно вместо него можно взять следующее: $\alpha\omega<4$.

Для построения величин y, c можно применить методику, разработанную в [1], для чего в уравнение (1) следует ввести скалярный параметр $\lambda\neq 0$ следующим образом: $\dfrac{dx}{dt}=\lambda A(t)x+f(t)$. Тогда решение уравнения (9) (с параметром λ) ищем в виде ряда $y(t,\lambda)=y_0(t)+\lambda y_1(t)+\dots$, а постоянную $c(\lambda)$ находим из (8) в виде $c(\lambda)=\dfrac{1}{\lambda}c_{-1}+c_0+\lambda c_1+\dots$

Замечание 1. Пусть $\det B(\omega)=0$. В этом случае (и в других аналогичных ситуациях) к определяющему уравнению (6) сначала применяем методику, изложенную в [3], а затем рассматриваем соответствующую систему для определения y, c.

Замечание 2. Предложенный здесь способ исследования периодических решений распространяется и на нелинейные уравнения вида $dx/dt=f(t,x)$, $x\in R^n$, при тех же исходных предположениях относительно правой части, что и в работе [3].

В этом случае соответствующая система для нахождения величин y, c имеет вид

$$y(t)=\frac{1}{\omega}\int_0^t \tau f(\tau,\ y(\tau)+c)\,d\tau-\frac{1}{\omega}\int_t^\omega(\omega-\tau)f(\tau,\ y(\tau)+c)\,d\tau,\quad \int_0^\omega f(\tau,\ y(\tau)+c)d\tau=0.$$

Получена система связанных уравнений относительно y и c. Для выяснения условий ее разрешимости можно применить методику из [3], опираясь на принципы неподвижной точки.

Замечание 3. Естественным обобщением представления (2) является следующее: $x(t)=T_m(t)+y(t)$, где $T_m(t)=c+\sum_{k=1}^m a_k\cos kt+b_k\sin kt$. Здесь и всюду ниже полагаем (для упрощения записей) $\omega=2\pi$. Очевидно, это не нарушит общности изложения.

Постоянные c, a_k, b_k и 2π-периодическую функцию $y(t)$ (остаточный член ряда Фурье для $x(t)$) находим из системы типа (5), (6). Выводим ее, исходя из интегрального уравнения для $y(t)$ (в задаче Коши), с учетом граничных условий

$$\int_0^{2\pi} y(\tau)d\tau=0,\ y(2\pi)=y(0),$$

$$\int_0^{2\pi} y(\tau)\cos k\tau d\tau=0,\ \int_0^{2\pi} y(\tau)\sin k\tau d\tau=0,\ k=1,\ 2,\ \dots,\ m.$$

Эта система имеет вид

$$[A]_0c+[A\cos t]_0a_1+[A\sin t]_0b_1+\dots+[A\cos mt]_0a_m+[A\sin mt]_0b_m+[Ay]_0+[f]_0=0,$$

$$[A]_{c_1}c+[A\cos t]_{c_1}a_1+([A\sin t]_{c_1}-E)b_1+\dots+[A\cos mt]_{c_1}a_m+$$
$$+[A\sin mt]_{c_1}b_m+[Ay]_{c_1}+[f]_{c_1}=0,$$

$$[A]_{s_1}c+([A\cos t]_{s_1}+E)a_1+[A\sin t]_{s_1}b_1+\dots+[A\cos mt]_{s_1}a_m+$$
$$+[A\sin mt]_{s_1}b_m+[Ay]_{s_1}+[f]_{s_1}=0,$$

. . . .

$$[A]_{c_m}c+[A\cos t]_{c_m}a_1+[A\sin t]_{c_m}b_1+\dots+[A\cos mt]_{c_m}a_m+$$
$$+([A\sin mt]_{c_m}-mE)b_m+[Ay]_{c_m}+[f]_{c_m}=0,$$

$$[A]_{s_m}c+[A\cos t]_{s_m}a_1+[A\sin t]_{s_m}b_1+\dots+([A\cos mt]_{s_m}+mE)a_m+$$
$$+[A\sin mt]_{s_m}b_m+[Ay]_{s_m}+[f]_{s_m}=0,$$

$$y(t)=\frac{1}{2\pi}\int_0^t\tau(A(\tau)y(\tau)+h(\tau))\,d\tau-\frac{1}{2\pi}\int_t^{2\pi}(2\pi-\tau)(A(\tau)y(\tau)+h(\tau))\,d\tau,$$

где

$$[\psi(t)]_{c_k} = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \psi(t)\cos ktdt,\ [\psi(t)]_{s_k} = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \psi(t)\sin ktdt,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ m,$$

$$[\psi(t)]_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \psi(t)\,dt,\ h(t) = A(t)\,T_m(t) + f(t) - dT_m(t)/dt.$$

Литература

1. Лаптинский В. Н.— Весцi АН БССР. Сер. фiз.-мат. навук, 1978, № 3, с. 113—116.
2. Еругин Н. П. Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений.— Минск: Изд-во АН БССР, 1963.— 272 с.
3. Лаптинский В. Н.— Весцi АН БССР. Сер. фiз.-мат. навук, 1980, № 2, с. 6—12.
4. Красносельский М. А. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений.— М.: ГИТТЛ, 1956.— 392 с.

Могилевское отделение
Института физики АН БССР

Поступила в редакцию
22 марта 1982 г.