ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ОКТЯБРЬ 1975 г., ТОМ XI, № 10

УДК 517.926.45

О ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В. Н. ЛАПТИНСКИЙ

В предлагаемой заметке на основе параметрических функций от матриц [1—3] получены некоторые условия существования матрицы Грина краевой задачи Флоке. Из этих результатов вытекает эффективный признак асимптотической устойчивости систем с периодическими коэффициентами, а также алгоритм нахождения периодического решения неоднородных систем.

Теория Флоке позволяет применить методы краевых задач к изучению асимптотического поведения решений уравнения

$$dx/dt = A(t)\,x, \quad x \in R^n, \quad A(t): R^n \to R^n, \tag{1}$$

с ω-периодической непрерывной коэффициентной матрицей $A(t)$, $\omega > 0$.

Применение параметрических функций от матриц в теории и приложениях линейных дифференциальных систем является эффективным, при этом экспоненциальная функция наиболее характерна для таких систем (см. [4—19]).

Указанную выше задачу будем решать на основе этой функции.

Сначала введем норму матрицы, например, так: $\|S\| = \max\limits_i \sum\limits_{k=1}^{n} |s_{ik}|$ и рассмотрим краевую задачу для уравнения (1) с условием

$$Vx(0) = x(\omega), \tag{2}$$

где V — некоторая матрица.

Эту задачу целесообразно называть задачей Флоке. Изучением такого типа задач занимались многие авторы (см., например, [20]) (там же имеется подробная библиография).

Лемма. *Пусть*

$$\det [V - \exp B(\omega)] \neq 0, \qquad \omega\delta k \exp(4\beta) < 2,$$

где

$$\delta = \max \{\|[V - \exp B(\omega)]^{-1} V\|, \quad \|[V - \exp B(\omega)]^{-1} \exp B(\omega)\|\},$$

$$B(t) = \int_0^t A(\tau)\,d\tau, \quad \|B(t)\| \leqslant \beta, \quad \|AB - BA\| \leqslant k; \quad \beta,\ k = \mathrm{const}, \quad t \in [0,\ \omega].$$

Тогда матрица Грина задачи (1), (2) существует.

Доказательство. С помощью вспомогательной задачи

$$dy/dt = \left(\int_0^1 \exp(\mu B)\,A \exp(-\mu B)\,d\mu\right) y, \tag{3}$$

$$Vy(0) = y(\omega), \tag{4}$$

исходная задача сведется к эквивалентному интегральному уравнению

$$x(t) = \int_0^\omega K(t,\ \tau)\,x(\tau)\,d\tau, \tag{5}$$

где, как следует из [18],

$$K(t,\ \tau) = \begin{cases} \exp[B(t)]\,[V - \exp B(\omega)]^{-1} VQ(\tau) \exp[-B(\tau)], & 0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant \omega, \\ \exp[B(t)]\,[V - \exp B(\omega)]^{-1} \exp B(\omega)\,Q(\tau) \exp[-B(\tau)], & \omega \geqslant \tau > t \geqslant 0, \end{cases}$$

$$Q = \int_0^1 \mu \exp(-\mu B)[A, B]\exp(\mu B)\,d\mu, \qquad [A, B] = AB - BA.$$

Для матрицы Q имеет место следующая оценка (более точная приведена в [18]): $\|Q(t)\| \leqslant \frac{1}{2} k \exp(2\beta)$, $t \in [0, \omega]$. Теперь нетрудно получить оценку ядра $K(t, \tau)$:

$$\|K(t, \tau)\| \leqslant \frac{1}{2} \delta k \exp(4\beta), \; t, \; \tau \in [0, \omega],$$

а вместе с тем убедиться в существовании у уравнения (5) только тривиального решения.

Следствие 1. *Пусть выполнены условия* $\det V \neq 0$, $s = \|V^{-1}\exp B(\omega)\| < 1$, $\omega\gamma k \exp(4\beta) < 2$, *где* $\gamma = 1/(1-s)$. *Тогда матрица Грина задачи (1), (2) существует.*

Следствие 2. *Пусть* $r = \|\exp[-B(\omega)]V\| < 1$, *причем* $\omega\mu k \exp(4\beta) < 2$, *где* $\mu = 1/(1-r)$. *Тогда матрица Грина задачи (1), (2) существует.*

Замечание 1. Результаты леммы можно несколько улучшить, если воспользоваться следующей оценкой для матрицы монодромии $X(\omega)$:

$$\|X(\omega)\| \leqslant \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \|P_{k-1}(\omega)\|\right),$$

где

$$P_{r+1}(t) = \int_0^t [A(\tau), P_r(\tau)]\,d\tau, \qquad r = 0, 1, 2, \ldots, \; P_0(t) = \int_0^t A(\tau)\,d\tau.$$

Теорема. *Пусть* $\nu = \|\exp B(\omega)\| < 1$, $\omega\sigma k \exp(4\beta) < 2$, *где* $\sigma = 1/(1-\nu)$. *Тогда уравнение (1) асимптотически устойчиво.*

В самом деле, согласно следствию 1 доказанной леммы, краевая задача (1), (2), в которой $V = \rho E$, ρ — комплексный параметр, E — единичная, имеет при указанных условиях и $|\rho| \geqslant 1$ лишь тривиальное решение. Значит, по теореме Флоке (см., например, [21, стр. 186]), уравнение (1) асимптотически устойчиво.

Рассмотрим теперь задачу

$$dx/dt = \varepsilon A(t)x + f(t), \tag{6}$$

$$x(0, \varepsilon) = x(\omega, \varepsilon), \tag{7}$$

где $f(t)$ — непрерывная вектор-функция, $f(t+\omega) \equiv f(t)$, ε — скалярный параметр, $\varepsilon > 0$.

Эту задачу при $\det B(\omega) \neq 0$ и малых ε сведем к интегральному уравнению

$$x(t, \varepsilon) = \int_0^\omega K(t, \tau, \varepsilon)x(\tau, \varepsilon)\,d\tau + \int_0^\omega G(t, \tau, \varepsilon)f(\tau)\,d\tau, \tag{8}$$

где G — матрица Грина задачи (3), (4) с параметром ε при $A(t)$ и $V = E$.

Единственное решение уравнения (8) можно искать приближенно, например, классическим методом последовательных приближений, при этом точное решение получим на первом шаге, если $[A, B] = 0$. Скорость сходимости выясняется стандартными приемами.

Замечание 2. В работе [18] по вине автора в формулировке теорем 3.2—3.4 во всех вторых условиях под знаком нормы опущен множитель $\exp(-B)$. В выкладках к теореме 3.2 этот множитель также утерян в последней формуле и допущена опечатка в расстановке пределов интегрирования.

Литература

1. Лаптинский В. Н. ДАН БССР, **13**, № 11, 1969.
2. Лаптинский В. Н. ДАН БССР, **14**, № 12, 1970.
3. Лаптинский В. Н. Дифференц. уравнения, **6**, № 3, 1970.
4. Magnus W. Commun. Pure and Applied Mathem., 7, 649, 1954.
5. Fer F. Bull. classe sci Acad. roy. Belgique, 44, № 55, 1958.
6. Швингер Ю. Квантовая электродинамика. В сб.: «Новейшее развитие квантовой электродинамики». М., ИЛ, 1954.
7. Kuo-Tsai Chen. Annals of Mathem., 65, № 1, 1957.
8. Wichman E. H. Journal of Mathem. Phys., 2, № 6, 1961.
9. Murrai F. J. Journal of Mathem. Phys., 3, № 3, 1962.
10. Weiss G. H., Maradudin A. A. Journal of Mathem. Phys., 3, № 4, 1962.
11. Wei J., Norman E. Journal of Mathem. Phys., 4, № 4, 1963.

12. Wei J. Journal of Mathem. Phys., 4, № 10, 1963.
13. Robinson D. W. Helvetica Physica Acta, 36, № 2, 1963.
14. Snider R. F. Journal of Mathem. Phys., 5, № 11, 1964.
15. Martin J. F. Journal of differential Eq., 4, № 2, 1968.
16. Lutzky M. Journal of Mathem. Phys., 9, № 7, 1968.
17. Bialynicki-Birula I., Mielnik B., Plebanski J. Annals of Physics, 51, № 1, 1969.
18. Лаптинский В. Н. Дифференц. уравнения, 6, № 5, 1970.
19. Лаптинский В. Н. Дифференц. уравнения 8, № 2, 1972.
20. Зубов В. М. Весці АН БССР, сер. фіз.-матэм. навук, № 3, 1971.
21. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. М., «Наука», 1967.

Поступила в редакцию
28 сентября 1972 г.

Могилевский машиностроительный институт