УДК 517.977

В. Н. ЛАПТИНСКИЙ

ОПТИМАЛЬНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Рассмотрим линейную систему управления

$$\frac{dx}{dt}=A(t)x+Q(t)u, \tag{1}$$

где $(t, x, u)\in R\times R^n\times R^r$; $A(t)$, $Q(t)$ — непрерывные ω-периодические матрицы порядков $n\times n$, $n\times r$ соответственно.

В данной работе разработан конструктивный алгоритм оптимальной стабилизации системы (1) по отношению к квадратичному критерию качества

$$J=\int_0^\infty (x^{\mathrm{T}}Px+u^{\mathrm{T}}Ru)\,dt, \tag{2}$$

где $P=P^{\mathrm{T}}\geqslant 0$, $R=R^{\mathrm{T}}>0$; P, R — вещественные, непрерывные, ω-периодические матрицы; $(\cdot)^{\mathrm{T}}$ — операция транспонирования.

Основополагающие результаты в теории стабилизации получили В. И. Зубов [1], Р. Е. Калман [2], Н. Н. Красовский [3], А. М. Летов [4]. Эта задача является актуальной и с различных позиций рассматривалась многими авторами. Из работ, опубликованных в 80-е гг., укажем [5—10].

Известно [1], что для решения задачи оптимальной стабилизации системы (1) по отношению к функционалу (2) нужно найти определенное (стабилизирующее) решение матричного дифференциального уравнения Риккати

$$\frac{d\Theta}{dt}+\Theta A(t)+A^{\mathrm{T}}(t)\Theta+\Theta B(t)\Theta+P(t)=0, \tag{3}$$

где $B=-QR^{-1}Q^{\mathrm{T}}$.

Иными словами, эта задача равносильна существованию симметричной матрицы-функции $\check{\Theta}(t)\in C^1(R^+)$, являющейся ω-периодическим решением уравнения (3), обладающего тем свойством, что система

$$\frac{dx}{dt}=(A(t)+B(t)\check{\Theta}(t))x \tag{4}$$

асимптотически устойчива. При этом оптимальное управление определяется формулой $\check{u}=-R^{-1}Q^{\mathrm{T}}\check{\Theta}x$.

Для построения периодических решений уравнения (3) можно использовать известные методы построения периодических решений дифференциальных уравнений [1, 11—13]. Целесообразно использовать также алгоритмы, разработанные в работах [14, 15].

Рассмотрим один из алгоритмов, получаемых способом, используемым в работе [14].

Пусть $\Theta_0(t)$ — симметричная ω-периодическая $n\times n$-матрица класса $C^1(R^+)$. В уравнении (3) сделаем замену по формуле $\Theta=\Theta_0+K$. Тогда получим следующее уравнение для матрицы K:

$$\frac{dK}{dt}+KN_0+N_0^{\mathrm{T}}K+KBK+F=0, \tag{5}$$

где $N_0=A+B\Theta_0$, $F=d\Theta_0/dt+\Theta_0A+A^{\mathrm{T}}\Theta_0+\Theta_0B\Theta_0+P$.

Пусть матрицы

$$\int_0^\omega N_0(\tau)\,d\tau,\quad -\int_0^\omega N_0^{\mathrm{T}}(\tau)\,d\tau$$

не имеют общих характеристических чисел. Тогда линейный оператор

$\Phi X=X\tilde{N}_0+\tilde{N}_0^{\mathrm{T}}X$, где $\tilde{N}_0=\int_0^\omega N_0(\tau)\,d\tau$, обратим.

Используя методику, разработанную в [14], получим матричное интегральное уравнение

$$K(t)=\Phi^{-1}\Big\{\int_0^t[S(\tau)N_1(\tau)+N_1^{\mathrm{T}}(\tau)S(\tau)]\,d\tau-\int_t^\omega[S(\tau)N_2(\tau)+$$

$$+N_2^{\mathrm{T}}(\tau)S(\tau)]\,d\tau-\int_0^\omega[K(\tau)B(\tau)K(\tau)+F(\tau)]\,d\tau\Big\}, \tag{6}$$

эквивалентное задаче об ω-периодических решениях уравнения (3); здесь

$$N_1(\tau)=\int_0^\tau N_0(\sigma)\,d\sigma;\quad N_2(\tau)=\int_\tau^\omega N_0(\sigma)\,d\sigma;$$

$$S=-(KN_0+N_0^{\mathrm{T}}K+KBK+F).$$

Введем обозначения:

$\gamma=\|\Phi^{-1}\|;\ \alpha_0=\max\limits_t\|N_0(t)\|;\ \beta=\max\limits_t\|B(t)\|;\ h=\max\limits_t\|F(t)\|;$

$q=2\gamma\alpha_0(\alpha_0+\beta\rho)\omega^2+2\gamma\beta\rho\omega;\ \tilde{q}=(q-2\gamma\beta\rho\omega)/(1-2\gamma\beta\rho\omega);\ \rho>0,$

$\|X\|_C=\max\limits_t\|X(t)\|$ ($\|\cdot\|$ — евклидова норма векторов и матриц).

Лемма 1. *Пусть выполнены условия:*

1) матрицы $\tilde{N}_0$, $-\tilde{N}_0^{\text{т}}$ не имеют общих характеристических чисел;

2) для некоторого положительного числа ρ выполняются неравенства

$$\gamma\beta\omega(1+\alpha_0\omega)\rho^2+2\gamma\alpha_0^2\omega^2\rho+\gamma\alpha_0\omega^2h\leqslant\rho;\quad q<1;$$

3) существует ω-периодическая матрица $\Theta_0(t)=\Theta_0^{\text{т}}(t)$ класса $C^1(R^+)$, удовлетворяющая уравнению

$$\int\limits_0^\omega[\Theta(t)A(t)+A^{\text{т}}(t)\Theta(t)+\Theta(t)B(t)\Theta(t)+P(t)]dt=0.$$

Тогда в области $D=\{t,\ K: t\in R^+,\ \|K\|\leqslant\rho\}$ вещественное ω-периодическое решение уравнения (5) существует, единственно и может быть построено как предел равномерно сходящейся последовательности ω-периодических симметричных матричных функций, каждый член которой определяется рекуррентным соотношением.

Доказательство. Используя условие 1), получим интегральное уравнение (6).

С помощью принципа сжатых отображений нетрудно доказать, что при выполнении условий 2), 3) решение $K(t)$ уравнения (6) в области D существует, единственно и является пределом равномерно сходящейся последовательности $\{K_i(t)\}_{i=0}^\infty$ симметричных матриц-функций, построенных по алгоритму

$$K_m(t)=\Phi^{-1}\left\{\int\limits_0^t[S_{m-1}(\tau)N_1(\tau)+N_1^{\text{т}}(\tau)S_{m-1}(\tau)]d\tau-\int\limits_t^\omega[S_{m-1}(\tau)N_2(\tau)+\right.$$
$$\left.+N_2^{\text{т}}(\tau)S_{m-1}(\tau)]d\tau-\int\limits_0^\omega K_m(\tau)B(\tau)K_m(\tau)d\tau\right\},\qquad(7)$$

$$m=1,\ 2,\ \dots,$$

где $K_0=0$; $S_{m-1}=-(K_{m-1}N_0+N_0^{\text{т}}K_{m-1}+K_{m-1}BK_{m-1}+F)$.

Выполняя соответствующие оценки на основе формулы (7), можно показать, что быстрота сходимости алгоритма характеризуется неравенством

$$\|K-K_m\|_C\leqslant\frac{\tilde{q}^m}{1-\tilde{q}}\|K_1\|_C,\quad m=1,\ 2,\ \dots$$

Используя условие 3), можно показать ω-периодичность всех приближений, построенных по алгоритму (7). Лемма доказана.

Оценим область существования стабилизирующего решения уравнения (3). Фундаментальную матрицу $X(t)$ системы $dx/dt=(A+B\Theta)x$ будем искать в виде [11]

$$X(t)=(E+Z(t))\exp(Wt),\qquad(8)$$

где E — единичная матрица; W — постоянная матрица; $Z(t)$ — ω-периодическая матрица-функция, подчиненная условию [16]

$$\int\limits_0^\omega Z(\tau)d\tau=0.\qquad(9)$$

Подставляя (8) в (4), получим дифференциальное уравнение для Z

$$\frac{dZ}{dt}=(A+B\Theta)(E+Z)-(E+Z)W. \tag{10}$$

К уравнению (10) присоединим ω-периодическое краевое условие

$$Z(\omega)=Z(0). \tag{11}$$

Пусть $Z(t)$ — решение задачи (10), (11), (9). Из условия периодичности $Z(t)$ имеем

$$W=\frac{1}{\omega}\int_0^\omega (A+B\Theta)(E+Z)\,d\tau. \tag{12}$$

Далее, используя методику, разработанную в [15], получим интегральное уравнение для матрицы $Z(t)$, удовлетворяющей уравнению (10) и граничному условию (9):

$$Z(t)=\int_0^\omega q(t,\tau)\left[(A+B\Theta)(E+Z)-(E+Z)W\right]d\tau, \tag{13}$$

где

$$q(t,\tau)=\begin{cases}1/2-(t-\tau)/\omega, & 0\leqslant\tau\leqslant t\leqslant\omega,\\ -1/2+(\tau-t)/\omega, & \omega\geqslant\tau>t\geqslant 0.\end{cases}$$

Поскольку

$$\int_0^\omega q(t,\tau)\,d\tau=0,$$

то уравнение (13) примет вид

$$Z(t)=\int_0^\omega q(t,\tau)\left[(A+B\Theta)(E+Z)-ZW\right]d\tau. \tag{14}$$

Верно и обратное: всякое непрерывное регулярное решение W, Z ($\det(E+Z(t))\neq 0$, $t\in[0,\omega]$) системы уравнений (12), (14) является решением задачи (10), (11), (9).

Интегральные уравнения, аналогичные (12), (13), доставляет изложенный в работе [16] способ отыскания замены (8) в линейной периодической системе.

Система уравнений (12), (14) эквивалентна следующей системе:

$$W=W_0+\frac{1}{\omega}\int_0^\omega (N_0-\bar{N}_0)Z\,d\tau+\frac{1}{\omega}\int_0^\omega B(\Theta-\Theta_0)(E+Z)\,d\tau, \tag{15}$$

$$Z(t)=\int_0^\omega q(t,\tau)\left[NZ-Z\overline{N(E+Z)}\right]d\tau+\int_0^\omega q(t,\tau)N\,d\tau, \tag{16}$$

где $W_0=\bar{N}_0$, $N=A+B\Theta$ (черта сверху обозначает усреднение по t).

Пусть собственные значения матрицы W_0 имеют отрицательные вещественные части, т. е. $\operatorname{Re}\lambda_j(W_0)<0$ ($j=1, 2, \ldots, n$).

Выберем число $\varepsilon_0>0$ столь малым, чтобы имело место неравенство $-a_0+\varepsilon_0<0$, где $a_0=-\max\limits_j \operatorname{Re}\lambda_j(W_0)$.

Поскольку (см., например, [17, с. 115]) $\|\exp(W_0t)\|\leqslant c\exp(-a_0+\varepsilon_0)t$, где $t\geqslant 0$, $c=c(\varepsilon_0)$ — некоторая положительная постоянная, то $\|\exp(Wt)\|\leqslant c\exp(-a_0+\varepsilon_0+c\|W-W_0\|)t$.

Отсюда следует, что $\operatorname{Re}\lambda_j(W)<0$ $(j=1, 2, \ldots, n)$ при выполнении неравенства

$$\|W-W_0\|<(a_0-\varepsilon_0)/c. \qquad (17)$$

Пусть в области $\{t, W, Z: 0\leqslant t\leqslant\omega,\ \|W-W_0\|<(a_0-\varepsilon_0)/c,\ \|Z\|<1\}$ система уравнений (15), (16) совместна и матрицы W, Z образуют ее решение.

Из уравнения (15) получим оценку

$$\|W-W_0\|\leqslant\tilde{\alpha}_0\|Z\|_C+\beta(1+\|Z\|_C)\|\Theta-\Theta_0\|_C,$$

где $\tilde{\alpha}_0=\max\limits_t\|N_0(t)-\bar{N}_0\|$.

Неравенство (17) заведомо будет выполняться, если $\tilde{\alpha}_0+2\beta\|\Theta-\Theta_0\|_C\leqslant(a_0-\varepsilon_0)/c$. Отсюда

$$\|\Theta-\Theta_0\|_C\leqslant(a_0-\varepsilon_0-\tilde{\alpha}_0c)/2\beta c. \qquad (18)$$

Здесь предполагается, что $\tilde{\alpha}_0<(a_0-\varepsilon_0)/c$.

С помощью принципа сжатых отображений можно показать, что при выполнении неравенства

$$\alpha\omega<1, \qquad (19)$$

где $\alpha=\max\limits_t\|N(t)\|$, решение системы (15), (16) в области $\{t, W, Z: 0\leqslant\leqslant t\leqslant\omega,\ \|W-W_0\|<\infty,\ \|Z\|\leqslant\alpha\omega\}$ существует и единственно.

Неравенство (19) заведомо будет выполняться, если $(\alpha_0+\beta\|\Theta-\Theta_0\|_C)\omega<1$. Отсюда имеем оценку

$$\|\Theta-\Theta_0\|_C<(1-\alpha_0\omega)/\beta\omega, \qquad (20)$$

если $\alpha_0\omega<1$.

Из неравенств (18), (20) находим оценку области существования стабилизирующего решения уравнения Риккати

$$\|\Theta-\Theta_0\|<\Delta=\min\{(a_0-\varepsilon_0-\tilde{\alpha}_0c)/2\beta c,\ (1-\alpha_0\omega)/\beta\omega\}.$$

Таким образом, справедлива следующая

Лемма 2. *Пусть выполняются условия:*

1) собственные значения матрицы W_0 имеют отрицательные вещественные части;

2) выполняется неравенство

$$\max\{\alpha_0\omega,\ \tilde{\alpha}_0c/(a_0-\varepsilon_0)\}<1. \qquad (21)$$

Тогда при $p<\Delta$ решение уравнения Риккати (если оно существует) является стабилизирующим.

Теорема. *Пусть подынтегральная квадратичная форма в функционале (2) неотрицательно определена ($P\geqslant0$, $R>0$), существует симметричная ω-периодическая матрица $\Theta_0\in C^1(R^+)$, для которой выполняется условие 3) леммы 1 и условия леммы 2. Пусть для некоторого положительного числа $\rho<\Delta$ выполняется условие 2 леммы 1.*

Тогда имеют место утверждения:

1) оптимальное стабилизирующее управление $\breve{u}(t, x)=-R^{-1}Q^{\mathrm{T}}\breve{\Theta}x$ существует для любого начального вектора x_0 и единственно;

2) матрица $\breve{\Theta}$ является пределом равномерно сходящейся последовательности ω-периодических симметричных матриц $\Theta_i=\Theta_0+K_i$, $i=0, 1, \ldots$, построенных по алгоритму (7);

3) последовательность $\{u_i(t, x)\}_{i=0}^{\infty}$ $(u_i=-R^{-1}Q^{\mathrm{T}}\Theta_ix)$ сходится к оптимальному управлению $\breve{u}(t, x)$ равномерно относительно $t\in R^+$ и в каждой ограниченной области изменения векторной величины x.

Доказательство. Используя условие 1) леммы 2, нетрудно показать, что оператор Φ обратим.

Согласно лемме 1, ω-периодическое решение $\breve{\Theta}(t)$ уравнения (3) в области D существует, единственно и может быть построено как предел равномерно сходящейся последовательности ω-периодических симметричных матричных функций $\Theta_i=\Theta_0+K_i$, $i=0, 1, \ldots$, где матрицы K_i определяются рекуррентным соотношением (7). Так как $\rho<\Delta$, то, согласно лемме 2, решение $\breve{\Theta}(t)$ является стабилизирующим.

Таким образом, уравнение Риккати (3) имеет вещественное ω-периодическое решение, заданное в виде такой симметричной $n\times n$-матрицы $\breve{\Theta}(t)$, что управление $\breve{u}=-R^{-1}Q^{\mathrm{T}}\breve{\Theta}x$ является стабилизирующим.

Из теоремы Зубова [1] следует, что оптимальное стабилизирующее управление для системы (1) существует для любого начального вектора x_0 и определяется формулой $\breve{u}=-R^{-1}Q^{\mathrm{T}}\breve{\Theta}x$.

Используя оценку для $\|\breve{K}-K_m\|_C$, $m=1, 2, \ldots$, нетрудно доказать равномерную сходимость последовательности $u_0(t, x)$, $u_1(t, x)$, ... Теорема доказана.

Замечание 1. Пусть в лемме 2 вместо (21) выполняется неравенство

$$\max\{\alpha_0\omega,\ \tilde{\alpha}_0\alpha_0\omega c/(a_0-\varepsilon_0)\}<1.$$

Тогда оценка области существования стабилизирующего решения уравнения Риккати (3) может быть несколько улучшена на основе соотношений

$$\|W-W_0\|\leqslant\tilde{\alpha}_0 a\omega+\beta(1+a\omega)\|\Theta-\Theta_0\|_C<(a_0-\varepsilon_0)/c,\quad a=\alpha_0+\beta\|\Theta-\Theta_0\|_C.$$

Однако в этом случае получим довольно громоздкое выражение для Δ.

Изучим вопрос построения матриц $W(\breve{\Theta})$, $Z(\breve{\Theta})$ в представлении (8) фундаментальной матрицы $X(t)$ оптимальной системы (4).

Пусть выполнены условия теоремы, доказанной выше. Для построения матриц $W(\Theta_i)$, $Z(\Theta_i)$, $i=0, 1, \ldots$, целесообразно использовать следующий алгоритм:

$$W_{k-1}(\Theta_i)=\frac{1}{\omega}\int_0^\omega (A+B\Theta_i)(E+Z_{k-1}(\Theta_i))\,d\tau,$$

$$Z_k(\Theta_i)=\int_0^\omega q(t,\tau)\left[(A+B\Theta_i)(E+Z_{k-1}(\Theta_i))-\right.$$

$$\left.-Z_{k-1}(\Theta_i)W_{k-1}(\Theta_i)\right],\quad k=1, 2, \ldots, \tag{22}$$

где $Z_0(\Theta_i)=0$.

Можно показать, что быстрота сходимости алгоритма (22) характеризуется неравенствами

$$\|W(\Theta_i)-W_k(\Theta_i)\|\leqslant\alpha_i\frac{\varphi_i^k}{1-\varphi_i}\|Z_1(\Theta_i)\|_C,$$

$$\|Z(\Theta_i)-Z_k(\Theta_i)\|_C\leqslant\frac{\varphi_i^k}{1-\varphi_i}\|Z_1(\Theta_i)\|_C,\quad k=1, 2, \ldots, \tag{23}$$

где

$$\alpha_i=\max_t\|A(t)+B(t)\Theta_i(t)\|,\quad \varphi_i=\alpha_i\omega(1+\alpha_i\omega)/2.$$

Очевидно, выполняются неравенства

$$\alpha_i\leqslant\tilde{\alpha},\quad i=0, 1, \ldots, \tag{24}$$

где $\tilde{\alpha}=\alpha_0+\beta\rho$.

Исходя из системы уравнений (12), (14) и используя неравенства (24), получим

$$\|W(\breve{\Theta})-W(\Theta_i)\|\leqslant\frac{\beta(1+\tilde{\alpha}\omega)(2-\tilde{\varphi})}{2(1-\tilde{\varphi})}\|\breve{\Theta}-\Theta_i\|_C,$$

$$\|Z(\check{\Theta}) - Z(\Theta_i)\|_C \leqslant \frac{\beta\omega(1+\tilde{\tilde{\alpha}}\omega)^2}{4(1-\tilde{\varphi})} \|\check{\Theta} - \Theta_i\|_C, \tag{25}$$

где $\tilde{\varphi} = \tilde{\alpha}\omega(1+\tilde{\alpha}\omega)/2$.

На основе оценок (23), (25) и оценки для $\|\check{K} - K_m\|_C$, $m = 1, 2, \ldots$, имеем

$$\|W(\check{\Theta}) - W_k(\Theta_m)\| \leqslant \frac{\beta(1+\tilde{\alpha}\omega)(2-\tilde{\varphi})\|K_1\|_C}{2(1-\tilde{\varphi})(1-\tilde{q})} \tilde{q}^m + \frac{\tilde{\alpha}\|Z_1(\Theta_m)\|_C}{1-\tilde{\varphi}} \tilde{\varphi}^k,$$

$$\|Z(\check{\Theta}) - Z_k(\Theta_m)\|_C \leqslant \frac{\beta\omega(1+\tilde{\alpha}\omega)^2\|K_1\|_C}{4(1-\tilde{\varphi})(1-\tilde{q})} \tilde{q}^m + \frac{\|Z_1(\Theta_m)\|_C}{1-\tilde{\varphi}} \tilde{\varphi}^k, \tag{26}$$

$$k, \ m = 1, 2, \ldots$$

Таким образом, при выполнении условий теоремы решение $W(\check{\Theta})$, $Z(\check{\Theta})$ системы уравнений (12), (14) может быть построено как предел равномерно сходящейся последовательности $\{W_j(\Theta_i), \ Z_j(\Theta_i)\}_{i,j=0}^{\infty}$, каждый член которой определяется рекуррентным соотношением (22), в котором матрицы Θ_i строятся по алгоритму (7). Быстрота сходимости приближений характеризуется неравенствами (26).

Для иллюстрации полученных результатов рассмотрим задачу оптимальной стабилизации системы управления, описываемой скалярным дифференциальным уравнением

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon(1+\cos 2\pi t)x + u$$

по отношению к критерию качества

$$J = \int_0^\infty (3\varepsilon^2 x^2 + u^2)\, dt,$$

где ε — положительная постоянная величина.

Уравнение Риккати (3) принимает здесь вид

$$\frac{d\Theta}{dt} + 2\varepsilon(1+\cos 2\pi t)\Theta - \Theta^2 + 3\varepsilon^2 = 0. \tag{27}$$

Уравнение

$$\int_0^1 [2\varepsilon(1+\cos 2\pi t)\Theta - \Theta^2 + 3\varepsilon^2]\, dt = 0$$

имеет положительное решение $\Theta_0 = 3\varepsilon$.

Применительно к уравнению (27) алгоритм (7) имеет вид

$$K_m(t) = \int_0^t \left(\tau - \frac{1}{4\pi}\sin 2\pi\tau\right) S_{m-1}(\tau)\, d\tau -$$

$$-\int_t^1 \left(1 - \tau + \frac{1}{4\pi}\sin 2\pi\tau\right) S_{m-1}(\tau)\, d\tau - \frac{1}{4\varepsilon}\int_0^1 K_m^2(\tau)\, d\tau,$$

где

$$S_{m-1}(t) = 2\varepsilon(2-\cos 2\pi t) K_{m-1}(t) + K_{m-1}^2(t) - 6\varepsilon^2 \cos 2\pi t.$$

В рассматриваемом примере имеем

$$a_0=2\varepsilon;\ \varepsilon_0=0;\ c=1;\ \alpha_0=3\varepsilon;\ \tilde{\alpha}_0=\varepsilon;\ \beta=1,\ \gamma=\frac{1}{4\varepsilon},\ h=6\varepsilon^2.$$

Согласно теореме, уравнение (27) будет иметь единственное в области значений $|\Theta-3\varepsilon|<\varepsilon/3<\Delta$, $\Delta=\varepsilon/2$, стабилизирующее решение $\check{\Theta}(t)=\check{\Theta}(t+1)$, если $\varepsilon\leqslant 0{,}05$; при этом $\tilde{q}=6\varepsilon$, $\tilde{\varphi}=\frac{5}{3}\left(1+\frac{10}{3}\varepsilon\right)\varepsilon$.

С помощью несложных вычислений находим

$$\Theta_1(t)=3\varepsilon-\delta\varepsilon^3-\frac{3\varepsilon^2}{\pi}\sin 2\pi t,$$

причем

$$\max_t|\check{\Theta}(t)-\Theta_1(t)|\leqslant\frac{6}{1-6\varepsilon}\left(\frac{3}{\pi}+\delta\varepsilon\right)\varepsilon^3,$$

где $\delta=9/\pi(4\pi+\sqrt{16\pi^2-18\varepsilon^2})$.

Применяя алгоритм (22), получим

$$W_1(\Theta_1)=-2\varepsilon+\delta\varepsilon^3,\quad Z_1(\Theta_1)=\frac{\varepsilon}{2\pi}\sin 2\pi t-\frac{3\varepsilon^2}{2\pi^2}\cos 2\pi t.$$

Воспользовавшись неравенствами (26), получим соотношения

$$|W(\check{\Theta})-W_1(\Theta_1)|\leqslant c_1(\varepsilon)\varepsilon^3,\quad \max_t|Z(\check{\Theta})-Z_1(\Theta_1)|\leqslant c_2(\varepsilon)\varepsilon^2,$$

где $c_1(\varepsilon)$, $c_2(\varepsilon)$ — положительные постоянные.

Замечание 2. Условия теоремы могут быть ослаблены. В действительности утверждение теоремы остается в силе и без традиционного предположения о неотрицательности квадратичной формы функционала, так как для доказательства эквивалентности существования оптимального стабилизирующего управления и стабилизирующего решения уравнения Риккати требуется лишь выполнение условия стабилизируемости системы (1) (при $R>0$) [1, 6, 10]. Вопрос о роли условия знакопостоянства квадратичной формы функционала подробно рассмотрен в работах [6, 10].

Автор выражает глубокую благодарность С. С. Войтенко, дополнившему данную работу замечанием 2.

Литература

1. Зубов В. И. Теория оптимального управления. Л., 1966.
2. Калман Р. Е., Арбиб М., Фалб П. Очерки по математической теории систем. М., 1971.
3. Красовский Н. Н. Теория управления движением. Линейные системы. М., 1968.
4. Летов А. М. Динамика полета и управление. М., 1969.
5. Забелло Л. Е. // Докл. АН БССР. 1980. Т. 24, № 6. С. 497—499.
6. Смирнов Е. Я. Некоторые задачи математической теории управления. Л., 1981.
7. Черменский А. Г. // Докл. V Нац. конгр. «Теория и прилож. мех. Варна, 1985». Кн. 2. София, 1985. С. 98—103.
8. Kano H., Nishimura T. // IEEE Trans. Autom. Contr. 1985. Vol. 30, N 1. P. 1129—1131.
9. Kabamba B. T. // Proc. 24-th IEEE Conf. Decis and Contr. Vol. 1. New York, 1985. P. 177—178.
10. Vojtenko S. S. // Kybernetika. 1987. Vol. 23, N 1. P. 32—43.
11. Еругин Н. П. Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. Минск, 1979.
12. Гребеников Е. А., Рябов Ю. А. Конструктивный анализ нелинейных систем. М., 1979.

13. Самойленко А. М., Ронто Н. И. Численно-аналитические методы исследования периодических решений. Киев, 1976.

14. Лаптинский В. Н. // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19, № 8. С. 1335—1343.

15. Лаптинский В. Н. // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21, № 11. С. 1899—1904.

16. Валеев К. Г., Жаутыков О. А. Бесконечные системы дифференциальных уравнений. Алма-Ата, 1974.

17. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. М., 1967.

Могилевское отделение Института физики АН БССР

Поступила в редакцию 3 ноября 1987 г.