ИЮНЬ 1995 г., ТОМ 31, № 6

УДК 517.925.42

В. Н. ЛАПТИНСКИЙ, К. КЕНЖЕБАЕВ, В. В. ПУГИН

ОБ АНАЛИТИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ МАТРИЧНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В данной работе на основе подхода [1] изучена аналитическая структура ω-периодических решений матричного дифференциального уравнения вида

$$\frac{dX}{dt}=\lambda A(t)XK+F(t), \tag{1}$$

где $A(t)$, $F(t)$ — ω-периодические $(n\times n)$-матрицы класса C, K — постоянная $(n\times n)$-матрица, λ — скалярный параметр.

Аналогичная задача исследовалась в [1, 2].

Пусть $X(t,\lambda)$ — ω-периодическое решение уравнения (1). Очевидно, это решение удовлетворяет условию

$$X(0,\lambda)=X(\omega,\lambda). \tag{2}$$

На основании (1), (2) имеем

$$\lambda\int_0^\omega A(\tau)X(\tau,\lambda)d\tau K=-\int_0^\omega F(\tau)d\tau. \tag{3}$$

Обозначим $B(t)=\int_0^t A(\tau)d\tau$. Пусть выполнены условия

$$\det B(\omega)\neq 0,\ \det K\neq 0. \tag{4}$$

Тогда из (3) получим сначала

$$\int_0^\omega A(\tau)X(\tau,\lambda)d\tau=-\frac{1}{\lambda}\int_0^\omega F(\tau)d\tau K^{-1}, \tag{5}$$

затем, применив к уравнению (5) методику, развитую в [1], матричное интегральное уравнение

$$X(t,\lambda)=\lambda\int_0^\omega H(t,\tau)A(\tau)X(\tau,\lambda)d\tau K+P(t)+\frac{1}{\lambda}M, \tag{6}$$

где

$$H(t,\tau)=\begin{cases} B^{-1}(\omega)\int_0^\tau A(\sigma)d\sigma, & 0\leqslant\tau\leqslant t\leqslant\omega,\\ -B^{-1}(\omega)\int_\tau^\omega A(\sigma)d\sigma, & 0\leqslant t<\tau\leqslant\omega,\end{cases}$$

$$P(t)=\int_0^\omega H(t,\tau)F(\tau)d\tau,\ M=-B^{-1}(\omega)\int_0^\omega F(\tau)d\tau K^{-1}.$$

Верно и обратное: всякое непрерывное решение $X(t,\lambda)$ уравнения (6) является решением граничной задачи для уравнения (1) с условием (2). Тогда ω-периодическое продолжение матрицы-функции $X(t,\lambda)$ будет решением уравнения (1) при всех $t\in\mathbf{R}$.

Решение уравнения (6) будем искать в виде

$$X(t,\lambda)=\frac{1}{\lambda}X_{-1}(t)+\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k X_k(t), \tag{7}$$

где X_{i-1}, $i=0, 1, 2, \dots$, — ω-периодические матрицы-функции, подлежащие определению.

Для отыскания этих функций подставим (7) в уравнение (6) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях λ в обеих частях полученных соотношений, имеем

$$X_{-1}(t)=M,\ X_0(t)=P(t)+\int_0^{\omega} H(t,\tau)A(\tau)X_{-1}(\tau)d\tau K,$$
$$X_k(t)=\int_0^{\omega} H(t,\tau)A(\tau)X_{k-1}(\tau)d\tau K,\ k=1,2,\ldots \tag{8}$$

Докажем равномерную относительно $t\in\mathbf{R}$ сходимость ряда (7). Примем следующие обозначения: $\alpha=\max_t\|A(t)\|$, $\gamma=\|B^{-1}(\omega)\|$, $m=\|K\|$, $b=\max_t\|X_0(t)\|$, $\|X\|_C=\max_t\ \|X(t)\|$, где $t\in[0,\omega]$, $\|\cdot\|$ — мультипликативная норма матриц.

Из (8) имеем рекуррентные оценки

$$\|X_k(t)\|\leqslant\gamma m\alpha^2\Big(\int_0^t \tau\|X_{k-1}(\tau)\|d\tau+\int_t^{\omega}(\omega-\tau)\|X_{k-1}(\tau)\|d\tau\Big),\ k=1,2,\ldots \tag{9}$$

Используя (9), нетрудно показать, что ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k X_k(t) \tag{10}$$

мажорируется функциональным рядом

$$b\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k z_k(t), \tag{11}$$

где $\varepsilon=|\lambda|\gamma m\alpha^2$, $z_0=1$, $t\in[0,\omega]$, $z_{k+1}(t)=\int_0^t \tau z_k(\tau)d\tau+\int_t^{\omega}(\omega-\tau)z_k(\tau)d\tau$.

С помощью приемов, используемых в работе [3], можно доказать, что ряд (11) сходится равномерно относительно $t\in[0,\omega]$ в окрестности

$$|\lambda|<\mu/\gamma m\alpha^2\omega^2, \tag{12}$$

где μ — корень уравнения $\varphi\int_0^1 \tau\exp[\varphi\tau(\tau-1)]d\tau-1=0$ (с точностью до 0,001 $\mu=3{,}416$). При этом сумма $z(t,\lambda)$ ряда (11) находится по формуле $z(t,\lambda)=(b/(1-\beta(\lambda)))\times\exp[|\lambda|\gamma m\alpha^2 t(t-\omega)]$, где $\beta(\lambda)=r\int_0^1\tau\exp[r\tau(\tau-1)]d\tau$; здесь $r=|\lambda|\gamma m\alpha^2\omega^2$.

При указанных в (12) значениях λ ряд (10) сходится равномерно относительно $t\in\mathbf{R}$. Для функции $Y(t,\lambda)=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k X_k(t)$ имеет место оценка $\|Y(t,\lambda)\|\leqslant z(t,\lambda)$.

Таким образом, в проколотой окрестности

$$0<|\lambda|<\mu/\gamma m\alpha^2\omega^2 \tag{13}$$

решение уравнения (6) представимо рядом (7), сходящимся равномерно относительно $t\in\mathbf{R}$.

Теперь легко видеть, что справедлива

Теорема. *Пусть выполнены условия (4). Тогда в области (13) ω-периодическое решение уравнения (1) существует и единственно. Это решение представимо в виде (7) и имеет место оценка* $\|X(t,\lambda)\|\leqslant(1/|\lambda|)\|M\|+z(t,\lambda)$.

Далее выведем аналогичные оценки для равномерной нормы. Из (8) следует, что

$$\|X_k(t)\|_C\leqslant q\|X_{k-1}(t)\|_C,\ k=1,2,\ldots, \tag{14}$$

где $q=0{,}5\gamma m\alpha^2\omega^2$.

На основании рекуррентных неравенств (14) имеем оценку $\|X_k(t)\|_C\leqslant q^k\|X_0(t)\|_C$, $k=1,2,\ldots$, используя которую нетрудно получить характеризующее быстроту сходимости алгоритма (8) неравенство $\|X-\tilde X_m\|_C\leqslant(\|X_0\|_C/(1-|\lambda|q))(|\lambda|q)^{m+1}$. Здесь $\tilde X_m=\frac{1}{\lambda}X_{-1}+\sum_{k=0}^{m}\lambda^k X_k(t)$, $m=0,1,\ldots$

Аналогично можно получить оценку $\|X(t,\lambda)\|_C\leqslant(1/|\lambda|)\|X_{-1}\|+\|X_0\|_C/(1-|\lambda|q)$.

З а м е ч а н и е 1. Рассмотрим задачу (1), (2) с точки зрения теории возмущений. Пусть $\int\limits_0^{\omega} F(\tau)d\tau=0$. Тогда задача (1), (2) разрешима при $\lambda=0$, и мы приходим к заключению, что при выполнении условий (4) все значения λ такие, что $|\lambda|<\mu/\gamma m\alpha^2\omega^2$, регулярны [4, с. 167] и для них ряд (10) дает единственное ω-периодическое решение уравнения (1). При $\lambda\to 0$ получим функцию

$$X_0(t)=B^{-1}(\omega)\Big(\int\limits_0^t\Big(\int\limits_0^{\tau} A(\sigma)d\sigma\Big) F(\tau)d\tau-\int\limits_t^{\omega}\Big(\int\limits_{\tau}^{\omega} A(\sigma)d\sigma\Big) F(\tau)d\tau\Big),$$

дающую ω-периодическое решение невозмущенного уравнения $dX/dt=F(t)$.

З а м е ч а н и е 2. Несложный анализ процедуры получения уравнения (6) показывает, что используемый в данной работе подход применим для исследования периодических решений уравнения (1) в вырожденных случаях [1].

Литература

1. Л а п т и н с к и й В. Н. // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19, № 8. С. 1335—1343.

2. Е л и с е е н к о М. Н., Л а п т и н с к и й В. Н., П о д о л я н С. В. // Тр. III междунар. конф. «Дифференциальные уравнения и применения». Болгария. Руссе, 1987. Ч. 1. С. 123—126.

3. С а м о й л е н к о А. М., Л а п т и н с к и й В. Н. // Докл. АН УССР. Сер. А. 1982. № 1. С. 29—31.

4. Р и с с Ф., С е к е ф а л ь в и-Н а д ь Б. Лекции по функциональному анализу. М., 1967.

Институт прикладной оптики
АН Беларуси

Поступила в редакцию
28 января 1994 г.