1999. Т. 35, № 8. С. 1036 — 1045

УДК 517.925.52

К ТЕОРИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ПОЛУЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

В. Н. Лаптинский, В. Л. Титов

Введение. Математической теории колебаний периодического типа посвящена обширная литература. Наиболее полную информацию о периодических решениях систем дифференциальных уравнений дают конструктивные методы (см., например, работы [1 — 4] и приведенную в них библиографию).

В данной работе на основе подхода [5, 6] исследуется задача о периодических решениях полулинейных дифференциальных систем. Получены эффективно проверяемые условия существования и единственности, а также разработаны алгоритмы построения периодических решений указанных систем. Изучены вопросы сходимости, скорости сходимости алгоритмов и даны коэффициентные оценки точных решений.

Качественными методами аналогичные задачи исследовались в [7 — 9].

1. Существование периодических решений. Рассмотрим дифференциальную систему вида

$$dx/dt = A(t,x)x + f(t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1.1}$$

где $A(t,x) \in C_{tx}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$, $f(t) \in C(\mathbb{R})$, $A(t+\omega,x) = A(t,x)$, $f(t+\omega) = f(t)$. Предполагается, что матрица $A(t,x)$ удовлетворяет условию Липшица $\|A(t,x)-A(t,y)\| \le K\|x-y\|$, $x,y \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$, где K — положительная постоянная.

Задачу о периодических с периодом ω решениях системы (1.1) будем исследовать с помощью представления [5, 6]

$$x(t) = c + y(t), \tag{1.2}$$

где c — постоянный вектор, ω-периодический вектор $y(t)$ подчинен условиям

$$y(0) = y(\omega), \tag{1.3}$$

$$\int_0^\omega y(\tau)\,d\tau = 0. \tag{1.4}$$

Выведем систему векторных уравнений, эквивалентную задаче (1.1) — (1.4). Подставляя (1.2) в (1.1), получаем

$$dy/dt = A(t,c+y)(c+y) + f(t), \tag{1.5}$$

откуда в силу (1.3) имеем

$$\int_0^\omega [A(\tau,c+y)(c+y) + f(\tau)]\,d\tau = 0. \tag{1.6}$$

Соотношение (1.6) запишем в виде

$$\int_0^\omega A(\tau,0)\,d\tau\, c = -\int_0^\omega [A(\tau,c+y) - A(\tau,0)]\,d\tau\, c - \int_0^\omega [A(\tau,c+y)y + f(\tau)]\,d\tau. \tag{1.7}$$

Пусть выполнено условие

$$\det B(\omega,0)\neq 0, \tag{1.8}$$

где $B(\omega,0)=\int\limits_0^\omega A(\tau,0)\,d\tau$. Тогда из (1.7) получим

$$c=-B^{-1}(\omega,0)\int\limits_0^\omega\{[A(\tau,c+y)-A(\tau,0)]c+A(\tau,c+y)y+f(\tau)\}\,d\tau. \tag{1.9}$$

Обратимся к интегральному условию (1.4). Поскольку

$$\int\limits_0^\omega y(\tau)\,d\tau=\omega y(t)-\int\limits_0^t\tau\,dy(\tau)+\int\limits_t^\omega(\omega-\tau)\,dy(\tau),$$

то (1.4) примет вид

$$\omega y(t)-\int\limits_0^t\tau\frac{dy(\tau)}{d\tau}\,d\tau+\int\limits_t^\omega(\omega-\tau)\frac{dy(\tau)}{d\tau}\,d\tau=0.$$

Отсюда в силу (1.5) имеем

$$y(t)=\int\limits_0^\omega\varphi(t,\tau)[A(\tau,c+y)(c+y)+f(\tau)]\,d\tau, \tag{1.10}$$

где $\varphi(t,\tau)=\tau/\omega$ при $0\le\tau\le t\le\omega$ и $\tau/\omega-1$ при $0\le t<\tau\le\omega$.

Таким образом, неизвестные векторы c, y в представлении (1.2) ω-периодического решения $x(t)$ системы (1.1) удовлетворяют системе векторных уравнений (1.9), (1.10). Верно и обратное: всякое непрерывное решение системы уравнений (1.9), (1.10) является решением задачи (1.1) — (1.4), т.е. ω-периодическим решением системы (1.1) (берется ω-периодическое продолжение функции $x(t)$ на всю числовую ось).

Примем следующие обозначения: $D_\rho=\{t,x:\ -\infty<t<\infty,\ \|x\|\le\rho\}$, $\alpha_0=\max\limits_t\|A(t,0)\|$, $\gamma=\|B^{-1}(\omega,0)\|$, $h=\max\limits_t\|f(t)\|$, $\tilde\alpha_0=\max\limits_t\|A(t,0)-\overline{A(t,0)}\|$, $\varphi(\rho)=\beta_0\rho^2+\beta_1\rho+\beta_2$, $\beta_0=\gamma K\omega+K\omega/2$, $\beta_1=\gamma\tilde\alpha_0\omega+0{,}5\alpha_0\omega$, $\beta_2=\gamma\omega h+0{,}5\omega h$, $q=2\gamma K\omega\rho+K\omega\rho+0{,}5\alpha_0\omega+\gamma\tilde\alpha_0\omega$, $\|x\|_C=\max\limits_t\|x(t)\|$, где $\rho>0$, $t\in[0,\omega]$, тильда сверху означает усреднение по $t\in[0,\omega]$, $\|\cdot\|$ — мультипликативная норма векторов и матриц, например любая из норм [10, с. 20].

Для исследования разрешимости системы (1.9), (1.10) воспользуемся принципом сжатых отображений [11, с. 605].

Теорема 1.1. *Пусть выполнено условие (1.8), а также*

$$\varphi(\rho)\le\rho, \tag{1.11}$$

$$q<1. \tag{1.12}$$

Тогда в области D_ρ ω-периодическое решение системы (1.1) существует и единственно.

Доказательство. Запишем систему уравнений (1.9), (1.10) в виде

$$c=-B^{-1}(\omega,0)\int\limits_0^\omega\{[A(\tau,c+y)-A(\tau,0)](c+y)+[A(\tau,0)-\overline{A(\tau,0)}]y+f(\tau)\}\,d\tau, \tag{1.13}$$

$$y(t)=\int\limits_0^\omega\varphi(t,\tau)\{[A(\tau,c+y)-A(\tau,0)](c+y)+A(\tau,0)(c+y)+f(\tau)\}\,d\tau \tag{1.14}$$

или в операторной форме

$$c=\Psi_1(c,y), \tag{1.15}$$

$$y = \Psi_2(c, y), \tag{1.16}$$

где через Ψ_1, Ψ_2 обозначены соответствующие интегральные операторы в (1.13), (1.14). Эти операторы действуют на множестве $\tilde{D} = \{c, y(t) \in \mathbb{R}^n : \ \|c\| \le \varphi_1(\rho), \ \|y\|_C \le \varphi_2(\rho)\}$, где $\varphi_1(\rho) = \gamma\omega(K\rho^2 + \tilde{\alpha}_0\rho + h)$, $\varphi_2(\rho) = 0{,}5(K\omega\rho^2 + \alpha_0\omega\rho + \omega h)$; $t \in [0, \omega]$.

Выполнив оценки по норме в (1.15) и (1.16), получим соответственно

$$\|\Psi_1(c, y)\| \le \gamma\omega[K(\|c\| + \|y\|_C)^2 + \tilde{\alpha}_0\|y\|_C + h] \le \varphi_1(\rho), \quad (c, y) \in \tilde{D}, \tag{1.17}$$

$$\|\Psi_2(c, y)\| \le \int_0^\omega |\varphi(t, \tau)| \, [\|A(\tau, c + y) - A(\tau, 0)\| \, \|c + y\| + \|A(\tau, 0)\| \, \|c + y\| + \|f(\tau)\|] \, d\tau \le$$

$$\le \max_{0 \le t \le \omega} \int_0^\omega |\varphi(t, \tau)| \, d\tau \{\max_{0 \le t \le \omega} \|A(t, c + y) - A(t, 0)\| \, \|c + y\|_C + \max_{0 \le t \le \omega} \|A(t, 0)\| \, \|c + y\|_C + \max_{0 \le t \le \omega} \|f(t)\|\}. \tag{1.18}$$

Поскольку $\int_0^\omega |\varphi(t, \tau)| \, d\tau = (2\omega)^{-1}[t^2 + (\omega - t)^2]$, то

$$\max_{0 \le t \le \omega} \int_0^\omega |\varphi(t, \tau)| \, d\tau = \omega/2, \tag{1.19}$$

и из (1.18) получаем, что

$$\|\Psi_2(c, y)\|_C \le (\omega/2)[K(\|c\| + \|y\|_C)^2 + \alpha_0(\|c\| + \|y\|_C) + h] \le \varphi_2(\rho). \tag{1.20}$$

Отсюда и из (1.17) следует, что операторы Ψ_1, Ψ_2 отображают множество $\tilde{D}$ в себя. Заметим, что $\varphi_1(\rho) + \varphi_2(\rho) = \varphi(\rho)$.

Далее из (1.13) имеем

$$\Psi_1(c, y) - \Psi_1(s, z) = -B^{-1}(\omega, 0) \int_0^\omega [A(\tau, c + y)c - A(\tau, s + z)s -$$

$$- A(\tau, 0)(c - s) + A(\tau, c + y)y - A(\tau, s + z)z] \, d\tau, \tag{1.21}$$

где $(c, y) \in \tilde{D}$, $(s, z) \in \tilde{D}$. Поскольку $A(\tau, c + y)c - A(\tau, s + z)s - A(\tau, 0)(c - s) = [A(\tau, c + y) - A(\tau, 0)](c - s) + [A(\tau, c + y) - A(\tau, s + z)]s$, $A(\tau, c + y)y - A(\tau, s + z)z = A(\tau, c + y)y - A(\tau, c + y)z + A(\tau, c + y)z - A(\tau, s + z)z = [A(\tau, c + y) - A(\tau, 0)](y - z) + [A(\tau, c + y) - A(\tau, s + z)]z + A(\tau, 0)(y - z)$, то из (1.21) следует соотношение

$$\Psi_1(c, y) - \Psi_1(s, z) = -B^{-1}(\omega, 0) \int_0^\omega \{[A(\tau, c + y) - A(\tau, 0)] \, [(c - s) + (y - z)] +$$

$$+ [A(\tau, c + y) - A(\tau, s + z)](s + z) + A(\tau, 0)(y - z)\} \, d\tau \tag{1.22}$$

или

$$\Psi_1(c, y) - \Psi_1(s, z) = -B^{-1}(\omega, 0) \int_0^\omega \{[A(\tau, c + y) - A(\tau, 0)] \, [(c - s) + (y - z)] +$$

$$+ [A(\tau, c + y) - A(\tau, s + z)](s + z) + [A(\tau, 0) - \overline{A(\tau, 0)}](y - z)\} \, d\tau. \tag{1.23}$$

Выполним оценки по норме в (1.23). Тогда получим

$$\|\Psi_1(c, y) - \Psi_1(s, z)\| \le \|B^{-1}(\omega, 0)\| \int_0^\omega \{\|A(\tau, c + y) - A(\tau, 0)\| \, (\|c - s\| + \|y - z\|) +$$

$$+\|A(\tau,c+y)-A(\tau,s+z)\|\,(\|s\|+\|z\|)+\|A(\tau,0)-\overline{A(\tau,0)}\|\,\|y-z\|\}\,d\tau\ \le$$
$$\le\ 2\gamma K\omega\rho(\|c-s\|+\|y-z\|_C)+\gamma\tilde{\alpha}_0\omega\|y-z\|_C,$$

откуда следует неравенство

$$\|\Psi_1(c,y)-\Psi_1(s,z)\|\le q_1(\|c-s\|+\|y-z\|_C),\tag{1.24}$$

где $q_1=2\gamma K\omega\rho+\gamma\tilde{\alpha}_0\omega$.

Обратимся к уравнению (1.14). Имеем

$$\Psi_2(c,y)-\Psi_2(s,z)=\int\limits_0^\omega \varphi(t,\tau)[A(\tau,c+y)(c+y)-A(\tau,s+z)(s+z)]\,d\tau\ =$$

$$=\int\limits_0^\omega \varphi(t,\tau)\{A(\tau,c+y)[(c-s)+(y-z)]+[A(\tau,c+y)-A(\tau,s+z)](s+z)\}\,d\tau.\tag{1.25}$$

Из неравенства (1.25) получаем оценку

$$\|\Psi_2(c,y)-\Psi_2(s,z)\|\le\int\limits_0^\omega|\varphi(t,\tau)|\{\|A(\tau,c+y)\|(\|c-s\|+\|y-z\|)+K(\|s\|+\|z\|)(\|c-s\|+\|y-z\|)\}\,d\tau.\tag{1.26}$$

Поскольку $\|A(\tau,c+y)\|\le\|A(\tau,c+y)-A(\tau,0)\|+\|A(\tau,0)\|\le K(\|c\|+\|y\|_C)+\alpha_0\le K\rho+\alpha_0$, то из (1.26) с учетом (1.19) следует оценка

$$\|\Psi_2(c,y)-\Psi_2(s,z)\|_C\le q_2(\|c-s\|+\|y-z\|_C),\tag{1.27}$$

где $q_2=K\omega\rho+0{,}5\alpha_0\omega$.

Заметим, что $q_1+q_2=q$. Запишем (1.24), (1.27) в векторно-матричной форме

$$\tilde{u}\le Qu,\tag{1.28}$$

где $\tilde{u}=\begin{pmatrix}\|\tilde{c}-\tilde{s}\|\\ \|\tilde{y}-\tilde{z}\|_C\end{pmatrix}$, $u=\begin{pmatrix}\|c-s\|\\ \|y-z\|_C\end{pmatrix}$, $Q=\begin{pmatrix}q_1 & q_1\\ q_2 & q_2\end{pmatrix}$; $\tilde{c}=\Psi_1(c,y)$, $\tilde{y}=\Psi_2(c,y)$; $\tilde{s}=\Psi_1(s,z)$, $\tilde{z}=\Psi_2(s,z)$. Примем в (1.28) следующую норму векторов и матриц [10, с. 20]:

$$\|a\|_{\text{II}}=\sum_{k=1}^n|a_k|,\quad \|A\|_{\text{II}}=\max_m\sum_{k=1}^n|a_{km}|,\quad a=\operatorname{colon}(a_1,\dots,a_n),\quad A=(a_{km})_1^n.$$

Поскольку $\|Q\|_{\text{II}}=q_1+q_2=q(\rho)<1$, то спектр положительной матрицы Q расположен внутри единичного круга с центром в начале координат. Тогда, очевидно, матрица $\text{E}-Q$, где $\text{E}=\operatorname{diag}(1,1)$, положительно обратима, при этом $\det(\text{E}-Q)=1-q$.

Легко видеть также, что из (1.28) следует неравенство $\|\tilde{u}\|_{\text{II}}\le q\|u\|_{\text{II}}$.

Таким образом, на замкнутом множестве $\tilde{D}$ имеют место соотношения (1.17), (1.20), (1.24), (1.27), являющиеся условиями модификации [12] принципа Банаха — Каччиопполи сжатых отображений применительно к системе уравнений (1.13), (1.14). На основании сказанного заключаем, что решение $c=c^*$, $y=y^*(t)$ указанной системы существует и единственно, а это и означает, что в области D_ρ ω-периодическое решение системы (1.1) существует и единственно.

З а м е ч а н и е 1.1. Несложный анализ системы уравнений (1.13), (1.14) показывает, что классический метод последовательных приближений [11] не пригоден для построения ω-периодического решения системы (1.1), поскольку может приводить к появлению приближенных решений, не являющихся ω-периодическими функциями. Поэтому возникает необходимость в создании эффективных алгоритмов. В отличие от [7 — 9] подход [5, 6] дает эффективные алгоритмы построения периодических решений.

2. Итерационный алгоритм с неявной вычислительной схемой. Рассмотрим следующий алгоритм в дифференциальной форме:

$$dx_{k+1}/dt = A(t, x_k)x_k + f(t), \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.1}$$

В соответствии с (1.2) имеем представление

$$x_k = c_k + y_k, \tag{2.2}$$

подставляя которое в (2.1), получаем

$$dy_{k+1}/dt = A(t, c_k + y_k)(c_k + y_k) + f(t). \tag{2.3}$$

Используя условие (1.3), из (2.3) получим $\int\limits_0^\omega [A(\tau, c_k + y_k)(c_k + y_k) + f(\tau)]\,d\tau = 0$, откуда в силу (1.8) имеем

$$c_k = -B^{-1}(\omega, 0)\biggl\{\int\limits_0^\omega [A(\tau, c_k + y_k) - A(\tau, 0)]\,d\tau c_k + \int\limits_0^\omega [A(\tau, c_k + y_k)y_k + f(\tau)]\,d\tau\biggr\}. \tag{2.4}$$

Учитывая интегральное условие (1.4), на основании (2.3) находим, что

$$y_{k+1}(t) = \int\limits_0^\omega \varphi(t, \tau)[A(\tau, c_k + y_k)(c_k + y_k) + f(\tau)]\,d\tau. \tag{2.5}$$

Полагая в (2.4), (2.5) $y_0 = 0$, из (2.4) получим уравнение относительно c_0:

$$c_0 = -B^{-1}(\omega, 0)\biggl\{\int\limits_0^\omega [A(\tau, c_0) - A(\tau, 0)]\,d\tau c_0 + \int\limits_0^\omega f(\tau)\,d\tau\biggr\}. \tag{2.6}$$

При помощи метода математической индукции покажем, что (c_i, y_i), $i = 0, 1, 2, \ldots$, принадлежат множеству $\tilde{D}$.

Из условий (1.11), (1.12) следуют соотношения $\gamma K\omega\rho^2 + \gamma\omega h \leq \varphi_1(\rho)$, $2\gamma K\omega\rho < q < 1$, на основании которых с помощью принципа сжатых отображений нетрудно доказать, что решение уравнения (2.6) в области $\|c\| \leq \varphi_1(\rho)$ существует и единственно.

Полагая в (2.5) $k = 0$ и производя оценки по норме в полученном выражении, имеем

$$\|y_1\|_C \leq 0{,}5K\omega\rho^2 + 0{,}5\alpha_0\omega\rho + 0{,}5\omega h = \varphi_2(\rho). \tag{2.7}$$

Для удобства выполнения оценок запишем (2.4), (2.5) соответственно в виде

$$c_k = -B^{-1}(\omega, 0)\int\limits_0^\omega \{[A(\tau, c_k + y_k) - A(\tau, 0)](c_k + y_k) + A(\tau, 0)y_k + f(\tau)\}\,d\tau, \tag{2.8}$$

$$y_{k+1}(t) = \int\limits_0^\omega \varphi(t, \tau)\{[A(\tau, c_k + y_k) - A(\tau, 0)](c_k + y_k) + A(\tau, 0)(c_k + y_k) + f(\tau)\}\,d\tau. \tag{2.9}$$

Оценим c_{k+1}, y_{k+1}, используя индукцию по k. Пусть векторы c_1, c_2, $\ldots$, c_k принадлежат шару $\|c\| \leq \varphi_1(\rho)$, а векторы $y_1(t)$, $y_2(t)$, $\ldots$, $y_k(t)$ — шару $\|y\|_C \leq \varphi_2(\rho)$.

Из (2.9) получим последовательно следующие оценки: $\|y_{k+1}\|_C \leq (\omega/2)(K(\|c_k\| + \|y_k\|_C)^2 + \alpha_0(\|c_k\| + \|y_k\|_C) + h) \leq (\omega/2)(K(\varphi_1(\rho) + \varphi_2(\rho))^2 + \alpha_0(\varphi_1(\rho) + \varphi_2(\rho)) + h) \leq \varphi_2(\rho)$. Уравнение для c_{k+1}, согласно (2.8), имеет вид

$$c_{k+1} = -B^{-1}(\omega, 0)\int\limits_0^\omega \{[A(\tau, c_{k+1} + y_{k+1}) - A(\tau, 0)](c_{k+1} + y_{k+1}) + A(\tau, 0)y_{k+1} + f(\tau)\}\,d\tau. \tag{2.10}$$

На основании условий (1.11), (1.12) с помощью принципа сжатых отображений нетрудно доказать, что решение уравнения (2.10) в области $\|c\| \leq \varphi_1(\rho)$ существует и единственно.

Таким образом, справедлива оценка $\|c_{k+1}\| \leq \varphi_1(\rho)$.

По индукции заключаем, что $(c_m, y_m(t))$ принадлежат множеству $\tilde{D}$ для всех $m = 1, 2, \ldots$

Изучим вопрос сходимости последовательности $\{c_k, y_k(t)\}_0^\infty$. Из (2.9) имеем

$$y_{k+1}(t) - y_k(t) = \int_0^\omega \varphi(t,\tau)[A(\tau, c_k + y_k)(c_k + y_k) - A(\tau, c_{k-1} + y_{k-1})(c_{k-1} + y_{k-1})]\, d\tau \tag{2.11}$$

или

$$y_{k+1}(t) - y_k(t) = \int_0^\omega \varphi(t,\tau)\{[A(\tau, c_k + y_k) - A(\tau, c_{k-1} + y_{k-1})](c_k + y_k) +$$

$$+ A(\tau, c_{k-1} + y_{k-1})[(c_k - c_{k-1}) + (y_k - y_{k-1})]\}\, d\tau. \tag{2.12}$$

Выполним оценки по норме в (2.12):

$$\|y_{k+1} - y_k\|_C \leq (\omega/2)(K\rho(\|c_k - c_{k-1}\| + \|y_k - y_{k-1}\|_C) + \max_{0\leq t\leq\omega} \|A(t, c_{k-1} + y_{k-1})\|\,(\|c_k - c_{k-1}\| +$$

$$+ \|y_k - y_{k-1}\|_C)) \leq (\omega/2)(\max_{0\leq t\leq\omega} \|A(t, c_{k-1} + y_{k-1})\| + K\rho)(\|c_k - c_{k-1}\| + \|y_k - y_{k-1}\|_C). \tag{2.13}$$

Поскольку

$$\begin{gathered}\|A(t, c_{k-1} + y_{k-1})\| \leq \|A(t, c_{k-1} + y_{k-1}) - A(t,0)\| + \|A(t,0)\|,\\ \|A(t, c_{k-1} + y_{k-1}) - A(t,0)\| \leq K(\|c_{k-1}\| + \|y_{k-1}\|_C) \leq K\rho,\end{gathered} \tag{2.14}$$

то

$$\|A(t, c_{k-1} + y_{k-1})\| \leq K\rho + \alpha_0. \tag{2.15}$$

Тогда из (2.13) следует рекуррентная оценка

$$\|y_{k+1} - y_k\|_C \leq (\omega/2)(2K\rho + \alpha_0)(\|c_k - c_{k-1}\| + \|y_k - y_{k-1}\|_C). \tag{2.16}$$

Далее из (2.8) имеем

$$c_k - c_{k-1} = -B^{-1}(\omega, 0)\int_0^\omega \{[A(\tau, c_k + y_k) - A(\tau, 0)](c_k + y_k) -$$

$$- [A(\tau, c_{k-1} + y_{k-1}) - A(\tau,0)](c_{k-1} + y_{k-1}) + A(\tau, 0)(y_k - y_{k-1})\}\, d\tau$$

или

$$c_k - c_{k-1} = -B^{-1}(\omega, 0)\int_0^\omega \{[A(\tau, c_k + y_k) - A(\tau, 0)]\,[(c_k - c_{k-1}) + (y_k - y_{k-1})] +$$

$$+ [A(\tau, c_k + y_k) - A(\tau, c_{k-1} + y_{k-1})](c_{k-1} + y_{k-1}) + (A(\tau,0) - \overline{A(\tau,0)})(y_k - y_{k-1})\}\, d\tau. \tag{2.17}$$

Выполнив оценки по норме в (2.17), получим

$$\|c_k - c_{k-1}\| \leq \gamma\omega(\max_{0\leq t\leq\omega} \|A(t, c_k + y_k) - A(t,0)\|\,(\|c_k - c_{k-1}\| + \|y_k - y_{k-1}\|_C) + \max_{0\leq t\leq\omega} \|A(t, c_k + y_k) -$$

$$- A(t, c_{k-1} + y_{k-1})\|\,(\|c_{k-1}\| + \|y_{k-1}\|_C) + \max_{0\leq t\leq\omega} \|A(t,0) - \overline{A(t,0)}\|\,\|y_k - y_{k-1}\|_C). \tag{2.18}$$

Используя соотношения (2.14), (2.15), из (2.18) находим, что $\|c_k - c_{k-1}\| \leq 2\gamma K\omega\rho\|c_k - c_{k-1}\| + \gamma\omega(2K\rho + \tilde{\alpha}_0)\|y_k - y_{k-1}\|_C$, откуда, поскольку $2\gamma K\omega\rho < 1$, имеем рекуррентную оценку

$$\|c_k - c_{k-1}\| \leq \gamma\omega(2K\rho + \tilde{\alpha}_0)(1 - 2\gamma K\omega\rho)^{-1}\|y_k - y_{k-1}\|_C, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{2.19}$$

с учетом которой из (2.16) получаем

$\|y_{k+1}-y_k\|_C \le (\omega/2)(2K\rho+\alpha_0)[\gamma\omega(2K\rho+\tilde{\alpha}_0)(1-2\gamma K\omega\rho)^{-1}+1]\,\|y_k-y_{k-1}\|_C = \tilde{q}\|y_k-y_{k-1}\|_C,$

где $\tilde{q}=0{,}5(1+\gamma\omega\tilde{\alpha}_0)(2K\rho+\alpha_0)\omega(1-2\gamma K\omega\rho)^{-1}$, т.е. $\|y_{k+1}-y_k\|_C \le \tilde{q}\|y_k-y_{k-1}\|_C$, $k=1,2,\ldots$

Используя последние оценки, можно показать, что $\|y_{k+1}-y_k\|_C$ оценивается неравенством

$$\|y_{k+1}-y_k\|_C \le \tilde{q}^k\|y_1-y_0\|_C = \tilde{q}^k\|y_1\|_C, \quad k=1,2,\ldots \tag{2.20}$$

Далее из (2.19) находим, что

$$\|c_k-c_{k-1}\| \le H\tilde{q}^{k-1}\|y_1-y_0\|_C, \quad k=1,2,\ldots, \tag{2.21}$$

где $H=\gamma\omega(2K\rho+\tilde{\alpha}_0)/(1-2\gamma K\omega\rho)$. Оценим $\tilde{q}$. Имеем

$$\tilde{q}=\frac{K\omega\rho+0{,}5\alpha_0\omega}{1-2\gamma K\omega\rho}+\frac{\gamma\tilde{\alpha}_0\omega(K\omega\rho+0{,}5\alpha_0\omega)}{1-2\gamma K\omega\rho}<\frac{K\omega\rho+0{,}5\alpha_0\omega+\gamma\tilde{\alpha}_0\omega}{1-2\gamma K\omega\rho}=\frac{q-2\gamma K\omega\rho}{1-2\gamma K\omega\rho}<q<1.$$

В силу оценок (2.20), (2.21) нетрудно доказать, что построенная, согласно алгоритму (2.4), (2.5), последовательность $\{c_k, y_k(t)\}_0^\infty$ сходится равномерно относительно $t\in\mathbb{R}$ к решению $c^*, y^*(t)$ системы уравнений (1.13), (1.14). Очевидно, $(c^*, y^*(t))\in\tilde{D}$.

Согласно (1.2), (2.2), имеем $x^*-x_k=c^*+y^*-(c_k+y_k)=(c^*-c_k)+(y^*-y_k)$, откуда находим, что

$$\|x^*-x_k\|_C \le \|c^*-c_k\|+\|y^*-y_k\|_C, \tag{2.22}$$

переходя к пределу при $k\to\infty$, получаем из (2.22) $\lim\limits_{k\to\infty}\|x^*-x_k\|_C=0$, т.е. $\lim\limits_{k\to\infty}x_k=x^*$.

Итак, доказано, что процесс ω-периодических последовательных приближений, полученных согласно алгоритму (2.4), (2.5), сходится к c^*, $y^*(t)$ на основании (1.11), (1.12).

Теперь найдем неравенства, оценивающие скорость сходимости последовательности $\{c_k, y_k(t)\}$ к решению c^*, $y^*(t)$.

На основании (2.20) получим

$$\|y^*-y_k\|_C \le (\tilde{q}^k/(1-\tilde{q}))\|y_1\|_C, \quad k=0,1,2,\ldots \tag{2.23}$$

Аналогично, используя (2.21), можно вывести оценку

$$\|c^*-c_k\| \le (H\tilde{q}^k/(1-\tilde{q}))\|y_1\|_C, \quad k=0,1,2,\ldots \tag{2.24}$$

Далее из (2.22) на основании (2.23), (2.24) имеем неравенство

$$\|x^*-x_k\|_C \le ((1+H)\tilde{q}^k/(1-\tilde{q}))\|y_1\|_C, \quad k=0,1,2,\ldots, \tag{2.25}$$

характеризующее быстроту сходимости последовательности $\{x_k\}$ к решению x^*.

3. Итерационный алгоритм с явной вычислительной схемой. Алгоритм, изложенный в п. 2, неудобен тем, что на каждом итерационном шаге приходится решать уравнение относительно c_k, $k=1,2,\ldots$

Здесь будет дан алгоритм, основанный на явной вычислительной схеме построения ω-периодических последовательных приближений и позволяющий существенно упростить процедуру получения приближенных решений системы уравнений (1.9), (1.10).

Для уравнения (1.1) запишем алгоритм в дифференциальной форме

$$dx_{k+1}/dt = A(t,0)x_k+[A(t,x_{k-1})-A(t,0)]x_{k-1}+f(t), \quad k=1,2,\ldots \tag{3.1}$$

Отсюда, используя представление (2.2), имеем

$$dy_{k+1}/dt = A(t,0)(c_k+y_k)+[A(t,c_{k-1}+y_{k-1})-A(t,0)](c_{k-1}+y_{k-1})+f(t), \quad k=1,2,\ldots \tag{3.2}$$

Выполнив выкладки, аналогичные изложенным в п. 2, получим

$$c_k = -B^{-1}(\omega,0)\int_0^{\omega}\{(A(\tau,0)-\overline{A(\tau,0)})y_k+[A(\tau,c_{k-1}+y_{k-1})-A(\tau,0)](c_{k-1}+y_{k-1})+f(\tau)\}\,d\tau, \quad (3.3)$$

$$y_{k+1}(t) = \int_0^{\omega}\varphi(t,\tau)\{A(\tau,0)(c_k+y_k)+[A(\tau,c_{k-1}+y_{k-1})-A(\tau,0)](c_{k-1}+y_{k-1})+f(\tau)\}\,d\tau, \quad (3.4)$$

где $k=1,2,\ldots,\ c_0=0,\ y_0=0,\ y_1=0.$

При помощи метода математической индукции покажем, что все приближения, определяемые алгоритмом (3.3), (3.4), принадлежат области $\tilde{D}$.

Из (3.3) при $k=1$ имеем

$$c_1 = -B^{-1}(\omega,0)\int_0^{\omega} f(\tau)\,d\tau. \quad (3.5)$$

В результате элементарных выкладок получаем, что $\|c_1\| \le \gamma\omega h \le \varphi_1(\rho)$.

Пусть векторы $c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_k$ принадлежат шару $\|c\| \le \varphi_1(\rho)$, а векторы $y_1(t),\ y_2(t),\ \ldots$ $\ldots,\ y_k(t)$ — шару $\|y\|_C \le \varphi_2(\rho)$.

Выполнив последовательно оценки по норме в (3.3), находим

$$\|c_k\| \le \|B^{-1}(\omega,0)\|\int_0^{\omega}\{\|A(\tau,0)-\overline{A(\tau,0)}\|\,\|y_k\|+\|A(\tau,c_{k-1}+y_{k-1})-A(\tau,0)\|\,(\|c_{k-1}\|+\|y_{k-1}\|)+$$

$$+\|f(\tau)\|\}\,d\tau \le \gamma\omega\{\max_{0\le t\le\omega}\|A(t,0)-\overline{A(t,0)}\|\,\|y_k\|_C+\max_{0\le t\le\omega}\|A(t,c_{k-1}+y_{k-1})-$$

$$-A(t,0)\|\,(\|c_{k-1}\|+\|y_{k-1}\|_C)+\max_{0\le t\le\omega}\|f(t)\|\} \le \gamma\omega\{\tilde{\alpha}_0\|y_k\|_C+K(\|c_{k-1}\|+\|y_{k-1}\|_C)^2+h\} \le$$

$$\le \gamma\omega\{\tilde{\alpha}_0\varphi_2(\rho)+K(\varphi_1(\rho)+\varphi_2(\rho))^2+h\} \le \gamma K\omega\rho^2+\gamma\tilde{\alpha}_0\omega\rho+\gamma\omega h=\varphi_1(\rho).$$

Исходя из (3.4), имеем

$$\|y_{k+1}(t)\| \le \int_0^{\omega}|\varphi(t,\tau)|\{\|A(\tau,0)\|(\|c_k\|+\|y_k\|)+\|A(\tau,c_{k-1}+y_{k-1})-A(\tau,0)\|\,(\|c_{k-1}\|+\|y_{k-1}\|)+$$

$$+\|f(\tau)\|\}\,d\tau \le (\omega/2)\{\max_{0\le t\le\omega}\|A(t,0)\|(\|c_k\|+\|y_k\|_C)+\max_{0\le t\le\omega}\|A(t,c_{k-1}+y_{k-1})-A(t,0)\|\,(\|c_{k-1}\|+$$

$$+\|y_{k-1}\|_C)+\max_{0\le t\le\omega}\|f(t)\|\} \le (\omega/2)\{\alpha_0(\varphi_1(\rho)+\varphi_2(\rho))+K(\varphi_1(\rho)+\varphi_2(\rho))^2+h\} \le$$

$$\le 0{,}5(K\omega\rho^2+\alpha_0\omega\rho+\omega h)=\varphi_2(\rho).$$

По индукции заключаем, что $(c_m, y_m(t))$ принадлежат множеству $\tilde{D}$ для всех $m=1,2,\ldots$

Исследование вопроса сходимости, скорости сходимости алгоритма (3.3), (3.4) проводится аналогично соответствующим выкладкам из п. 2.

На основании (3.3) имеем

$$c_{k+1}-c_k = -B^{-1}(\omega,0)\int_0^{\omega}\{(A(\tau,0)-\overline{A(\tau,0)})(y_{k+1}-y_k)+[A(\tau,c_k+y_k)-A(\tau,0)]\,[(c_k-c_{k-1})+$$

$$+(y_k-y_{k-1})]+[A(\tau,c_k+y_k)-A(\tau,c_{k-1}+y_{k-1})]\,(c_{k-1}+y_{k-1})\}\,d\tau, \quad (3.6)$$

откуда

$$\|c_{k+1}-c_k\| \le \|B^{-1}(\omega,0)\|\int_0^{\omega}\{\|A(\tau,0)-\overline{A(\tau,0)}\|\,\|y_{k+1}-y_k\|+\|A(\tau,c_k+y_k)-A(\tau,0)\|\,(\|c_k-c_{k-1}\|+$$

$$+\|y_k - y_{k-1}\|) + \|A(\tau, c_k + y_k) - A(\tau, c_{k-1} + y_{k-1})\| \, \|c_{k-1} + y_{k-1}\|\} \, d\tau \le$$

$$\le \gamma\omega\{\max_{0\le t\le\omega} \|A(t,0) - \overline{A(t,0)}\| \, \|y_{k+1} - y_k\|_C + \max_{0\le t\le\omega} \|A(t, c_k + y_k) - A(t,0)\| \, (\|c_k - c_{k-1}\| + \|y_k - y_{k-1}\|_C) +$$

$$+ \max_{0\le t\le\omega} \|A(t, c_k + y_k) - A(t, c_{k-1} + y_{k-1})\| \, (\|c_{k-1}\| + \|y_{k-1}\|_C)\} \le$$

$$\le \gamma\omega\{\tilde{\alpha}_0 \|y_{k+1} - y_k\|_C + 2K\rho(\|c_k - c_{k-1}\| + \|y_k - y_{k-1}\|_C)\},$$

т.е. получено рекуррентное неравенство

$$\|c_{k+1} - c_k\| \le \gamma\tilde{\alpha}_0\omega\|y_{k+1} - y_k\|_C + 2\gamma K\omega\rho(\|c_k - c_{k-1}\| + \|y_k - y_{k-1}\|_C). \tag{3.7}$$

Далее из (3.4) имеем

$$y_{k+1}(t) - y_k(t) = \int_0^\omega \varphi(t,\tau)\{A(\tau,0)[(c_k - c_{k-1}) + (y_k - y_{k-1})] + [A(\tau, c_{k-1} + y_{k-1}) - A(\tau,0)] \, [(c_{k-1} - c_{k-2}) +$$

$$+ (y_{k-1} - y_{k-2})] + [A(\tau, c_{k-1} + y_{k-1}) - A(\tau, c_{k-2} + y_{k-2})] \, (c_{k-2} + y_{k-2})\} \, d\tau. \tag{3.8}$$

Проводя выкладки, аналогичные приведенным в п. 2, получаем

$$\|y_{k+1}(t) - y_k(t)\| \le \max_{0\le t\le\omega} \int_0^\omega |\varphi(t,\tau)| \, d\tau \{\max_{0\le t\le\omega} \|A(t,0)\| \, (\|c_k - c_{k-1}\| + \|y_k - y_{k-1}\|_C) +$$

$$+ \max_{0\le t\le\omega} \|A(t, c_{k-1} + y_{k-1}) - A(t,0)\| \, (\|c_{k-1} - c_{k-2}\| + \|y_{k-1} - y_{k-2}\|_C) +$$

$$+ \max_{0\le t\le\omega} \|A(t, c_{k-1} + y_{k-1}) - A(t, c_{k-2} + y_{k-2})\| \, (\|c_{k-2}\| + \|y_{k-2}\|_C)\}.$$

Отсюда следует рекуррентное неравенство

$$\|y_{k+1} - y_k\|_C \le 0{,}5\alpha_0\omega(\|c_k - c_{k-1}\| + \|y_k - y_{k-1}\|_C) + K\omega\rho(\|c_{k-1} - c_{k-2}\| + \|y_{k-1} - y_{k-2}\|_C), \tag{3.9}$$

учитывая которое, находим, что

$$\|c_{k+1} - c_k\| \le 2\gamma K\omega\rho(\|c_k - c_{k-1}\| + \|y_k - y_{k-1}\|_C) + \gamma\tilde{\alpha}_0\omega\{0{,}5\alpha_0\omega(\|c_k - c_{k-1}\| + \|y_k - y_{k-1}\|_C) +$$

$$+ K\omega\rho(\|c_{k-1} - c_{k-2}\| + \|y_{k-1} - y_{k-2}\|_C)\} = (2\gamma K\omega\rho + \gamma\tilde{\alpha}_0\omega \cdot 0{,}5\alpha_0\omega)(\|c_k - c_{k-1}\| + \|y_k - y_{k-1}\|_C) +$$

$$+ \gamma\tilde{\alpha}_0\omega \, K\omega\rho(\|c_{k-1} - c_{k-2}\| + \|y_{k-1} - y_{k-2}\|_C).$$

Таким образом, справедлива формула

$$\|c_{k+1} - c_k\| \le (2\gamma K\omega\rho + \gamma\tilde{\alpha}_0\omega \cdot 0{,}5\alpha_0\omega)(\|c_k - c_{k-1}\| + \|y_k - y_{k-1}\|_C) +$$

$$+ \gamma\tilde{\alpha}_0\omega \, K\omega\rho(\|c_{k-1} - c_{k-2}\| + \|y_{k-1} - y_{k-2}\|_C). \tag{3.10}$$

Рекуррентные оценки (3.9), (3.10) следует дополнить оценками для $\|c_2 - c_1\|$, $\|y_2 - y_1\|_C$. Из (3.4) при $k = 1$ имеем

$$y_2(t) = \int_0^\omega \varphi(t,\tau)\{A(\tau,0)c_1 + f(\tau)\} \, d\tau, \tag{3.11}$$

откуда, оценивая по норме, получаем $\|y_2(t)\|_C \le (\omega/2)(\alpha_0\|c_1\| + h) \le 0{,}5\alpha_0\omega\rho + 0{,}5\omega h \le \varphi_2(\rho) \le \le \rho$. Далее из (3.3) следует

$$c_2 - c_1 = -B^{-1}(\omega,0)\int_0^\omega \{A(\tau,0)y_2 + [A(\tau,c_1) - A(\tau,0)]c_1\} \, d\tau. \tag{3.12}$$

Отсюда в результате несложных выкладок находим, что $\|c_2 - c_1\| \leq \gamma\omega(\alpha_0\|y_2\|_C + K\|c_1\|^2) \leq$ $\leq \gamma\omega\rho(\alpha_0 + K\rho)$.

Запишем теперь рекуррентные формулы (3.9), (3.10) в векторно-матричной форме

$$\delta_k \leq \mathrm{M}\delta_{k-1} + \mathrm{N}\delta_{k-2}, \quad k = 2, 3, \ldots, \tag{3.13}$$

где $\delta_i = (\|c_{i+1} - c_i\|, \|y_{i+1} - y_i\|_C)^{\mathrm{T}}$, $i = 0, 1, 2, \ldots$,

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 2\gamma K\omega\rho + 0{,}5\gamma\alpha_0\tilde{\alpha}_0\omega^2 & 2\gamma K\omega\rho + 0{,}5\gamma\alpha_0\tilde{\alpha}_0\omega^2 \\ \alpha_0\omega/2 & \alpha_0\omega/2 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{N} = \begin{pmatrix} \gamma K\tilde{\alpha}_0\omega^2\rho & \gamma K\tilde{\alpha}_0\omega^2\rho \\ K\omega\rho & K\omega\rho \end{pmatrix}.$$

Оценим спектр матрицы $\mathrm{M} + \mathrm{N}$. Имеем $\|\mathrm{M} + \mathrm{N}\|_{\mathrm{II}} \leq \|\mathrm{M}\|_{\mathrm{II}} + \|\mathrm{N}\|_{\mathrm{II}} = 2\gamma K\omega\rho + 0{,}5\gamma\alpha_0\tilde{\alpha}_0\omega^2 +$ $+ 0{,}5\alpha_0\omega + \gamma K\tilde{\alpha}_0\omega^2\rho + K\omega\rho = 2\gamma K\omega\rho + K\omega\rho + 0{,}5\alpha_0\omega + \gamma\tilde{\alpha}_0\omega \cdot 0{,}5\alpha_0\omega + \gamma\tilde{\alpha}_0\omega K\omega\rho < 2\gamma K\omega\rho +$ $+ K\omega\rho + 0{,}5\alpha_0\omega + \gamma\tilde{\alpha}_0\omega = q < 1$.

Очевидно, спектр положительной матрицы $\mathrm{M} + \mathrm{N}$ расположен внутри единичного круга. Далее нетрудно показать, что последовательность $\{c_k, y_k(t)\}_0^\infty$ равномерно сходится к решению c^*, $y^*(t)$ системы уравнений (1.19), (1.10), при этом

$$R_k \leq (\mathrm{E} - \mathrm{M} - \mathrm{N})^{-1}(\delta_k + \mathrm{N}\delta_{k-1}), \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{3.14}$$

где $R_k = (\|c^* - c_k\|, \|y^* - y_k\|_C)^{\mathrm{T}}$, E — единичная матрица второго порядка.

Аналогично можно получить оценку для $\|\delta_k\|_{\mathrm{II}}$. Из (3.13) имеем

$$\varepsilon_k \leq \tilde{q}_1\varepsilon_{k-1} + \tilde{q}_2\varepsilon_{k-2}, \tag{3.15}$$

где $\tilde{q}_1 = \|\mathrm{M}\|_{\mathrm{II}}$, $\tilde{q}_2 = \|\mathrm{N}\|_{\mathrm{II}}$, $\varepsilon_i = \|\delta_i\|_{\mathrm{II}}$. Так как $\tilde{q}_1 + \tilde{q}_2 < q < 1$, то из (3.15) находим, что

$$\|R_k\|_{\mathrm{II}} \leq (\varepsilon_k + \tilde{q}_2\varepsilon_{k-1})/(1 - \tilde{q}_1 - \tilde{q}_2), \quad k = 1, 2, \ldots \tag{3.16}$$

Отсюда в силу (3.15) имеем $\|R_k\|_{\mathrm{II}} \leq ((\tilde{q}_1 + \tilde{q}_2)\varepsilon_{k-1} + \tilde{q}_2\varepsilon_{k-2})/(1 - \tilde{q}_1 - \tilde{q}_2)$, $k = 2, 3, \ldots$, $\|R_1\|_{\mathrm{II}} \leq$ $\leq (\varepsilon_1 + \tilde{q}_2\varepsilon_0)/(1 - \tilde{q}_1 - \tilde{q}_2)$. Очевидно, что оценка (3.16) более удобна для практического применения, чем (3.14).

Литература

1. *Гребеников Е. А., Рябов Ю. А.* Конструктивные методы анализа нелинейных систем. М., 1979.
2. *Зубов В. И.* Теория колебаний. М., 1979.
3. *Малкин И. Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М., 1956.
4. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Численно-аналитические методы исследования периодических решений. Киев, 1976.
5. *Лаптинский В. Н.* // Дифференц. уравнения. 1984. Т. 20, № 3. С. 536 — 539.
6. *Лаптинский В. Н.* // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21, № 11. С. 1899 — 1904.
7. *Saito Seiji, Yamamoto Minoru.* // Proceedings of Japan Academy. 1987. A. Vol. 63, N 3. P. 62 — 65.
8. *Saito Seiji, Yamamoto Minoru.* // Proceedings of Japan Academy. 1987. A. Vol. 63, N 10. P. 382 — 385.
9. *Anichini Giuseppe, Conti Giuseppe.* // Nonlinearity. 1988. Vol. 1, N 4. P. 531 — 540.
10. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. М., 1967.
11. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. М., 1977.
12. *Забрейко П. П., Савченко Т. В.* // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30, № 3. С. 381 — 392.

Институт прикладной оптики НАН Беларуси

Поступила в редакцию 18 апреля 1997 г.