2000. Т. 36, № 9. С. 1289 — 1291

УДК 517.925.52

ОБ АНАЛИТИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ МАТРИЧНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА ЛЯПУНОВА

В. Н. Лаптинский, В. А. Ливинская

Рассмотрим матричное дифференциальное уравнение

$$d^2X/dt^2 = \lambda A(t)X + \lambda X B(t) + F(t), \tag{1}$$

где $A(t)$, $B(t)$, $F(t)$ — $(n\times n)$-матрицы, непрерывные и периодические с периодом ω, λ — скалярный параметр.

Уравнение (1) тесно связано с классическим уравнением Ляпунова [1, с. 175; 2], задача о периодических решениях которого исследовалась в работах [3, 4]. В настоящей работе на основе подхода [5] получены конструктивные достаточные условия существования и единственности и разработан эффективный алгоритм построения ω-периодического решения уравнения (1).

Заменим уравнение (1) эквивалентной системой

$$dX/dt = Y, \tag{2}$$

$$dY/dt = \lambda A(t)X + \lambda X B(t) + F(t). \tag{3}$$

Пусть система уравнений (2), (3) имеет ω-периодическое решение $X(t,\lambda)$, $Y(t,\lambda)$, которое, очевидно, удовлетворяет краевым условиям

$$X(0,\lambda) = X(\omega,\lambda), \tag{4}$$

$$Y(0,\lambda) = Y(\omega,\lambda). \tag{5}$$

Заметим, что, согласно [6, с. 215], задача об ω-периодических решениях системы (2), (3) эквивалентна задаче (2) — (5).

Из (2), (4) имеем

$$\int_0^\omega Y(\tau,\lambda)\,d\tau = 0. \tag{6}$$

Воспользуемся формулой

$$\int_0^\omega Y(\tau,\lambda)\,d\tau = \omega Y(t,\lambda) - \int_0^t \tau\dot Y(\tau,\lambda)\,d\tau + \int_t^\omega (\omega-\tau)\dot Y(\tau,\lambda)\,d\tau,$$

где $\dot Y(\tau,\lambda)\equiv dY(\tau,\lambda)/d\tau$. Тогда из (3), 6) получим матричное интегральное уравнение

$$Y(t,\lambda) = \int_0^\omega \varphi(t,\tau)[\lambda A(\tau)X(\tau,\lambda) + \lambda X(\tau,\lambda)B(\tau) + F(\tau)]\,d\tau, \tag{7}$$

где $\varphi(t,\tau)=\tau/\omega$ при $0\le\tau\le t\le\omega$ и $\varphi(t,\tau)=\tau/\omega-1$ при $0\le t<\tau\le\omega$. Из (3), (5) при $\lambda\ne 0$ имеем

$$\int_0^\omega [A(\tau)X(\tau,\lambda) + X(\tau,\lambda)B(\tau)]\,d\tau = -\lambda^{-1}\int_0^\omega F(\tau)\,d\tau. \tag{8}$$

Поскольку

$$\int_0^\omega A(\tau)X(\tau,\lambda)\,d\tau = \int_0^\omega A(\tau)\,d\tau X(t,\lambda) - \int_0^t\left(\int_0^\tau A(\sigma)\,d\sigma\right)\dot X(\tau,\lambda)\,d\tau + \int_t^\omega\left(\int_\tau^\omega A(\sigma)\,d\sigma\right)\dot X(\tau,\lambda)\,d\tau,$$

$$\int_0^\omega X(\tau,\lambda)B(\tau)\,d\tau = X(t,\lambda)\int_0^\omega B(\tau)\,d\tau - \int_0^t \dot X(\tau,\lambda)\left(\int_0^\tau B(\sigma)\,d\sigma\right)d\tau + \int_t^\omega \dot X(\tau,\lambda)\left(\int_\tau^\omega B(\sigma)\,d\sigma\right)d\tau,$$

то из (2), (8) получим матричное интегральное уравнение

$$MX(t,\lambda) - X(t,\lambda)N = \int_0^\omega [K_A(t,\tau)Y(\tau,\lambda) + Y(\tau,\lambda)K_B(t,\tau)]\,d\tau - \frac{1}{\lambda}\int_0^\omega F(\tau)\,d\tau, \tag{9}$$

$$M = \int_0^\omega A(\tau)\,d\tau, \quad N = -\int_0^\omega B(\tau)\,d\tau,$$

$$K_H(t,\tau) = \int_0^\tau H(\sigma)\,d\sigma, \quad 0 \le \tau \le t \le \omega, \quad K_H(t,\tau) = \int_\omega^\tau H(\sigma)\,d\sigma, \quad 0 \le t < \tau \le \omega.$$

Предположим, что матрицы M, N не имеют общих характеристических чисел. Тогда, согласно [7, с. 207], оператор Φ, $\Phi X = MX - XN$, обратим, поэтому уравнение (9) можно записать в виде

$$X(t,\lambda) = \Phi^{-1}\int_0^\omega [K_A(t,\tau)Y(\tau,\lambda) + Y(\tau,\lambda)K_B(t,\tau)]\,d\tau - \lambda^{-1}\Phi^{-1}\int_0^\omega F(\tau)\,d\tau. \tag{10}$$

Верно и обратное: всякое непрерывное решение $X(t,\lambda)$, $Y(t,\lambda)$ системы интегральных уравнений (7), (10) является решением задачи (2) — (5).

Решение системы уравнений (7), (10) будем искать в следующем виде:

$$X(t,\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{k-1}X_{k-1}(t), \quad Y(t,\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k Y_k(t), \tag{11}$$

где $X_{k-1}(t)$, $Y_k(t)$ $(k = 0, 1, \ldots)$ — ω-периодические матрицы, подлежащие определению. Подставляя ряды (11) в уравнения (7), (10) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ, получаем

$$X_{-1} = -\Phi^{-1}\int_0^\omega F(\tau)\,d\tau, \quad Y_0(t) = \int_0^\omega \varphi(t,\tau)[A(\tau)X_{-1} + X_{-1}B(\tau) + F(\tau)]\,d\tau,$$

$$X_k(t) = \Phi^{-1}\int_0^\omega [K_A(t,\tau)Y_k(\tau) + Y_k(\tau)K_B(t,\tau)]\,d\tau, \quad Y_{k+1}(t) = \int_0^\omega \varphi(t,\tau)[A(\tau)X_k(\tau) + X_k(\tau)B(\tau)]\,d\tau, \quad k = 0, 1, \ldots \tag{12}$$

Докажем равномерную по $t \in R$ сходимость рядов (11). Обозначим: $\alpha = \max_t \|A(t)\|$, $\beta = \max_t \|B(t)\|$, $\gamma = \|\Phi^{-1}\|$, $h = \max_t \|F(t)\|$, $\|H\|_C = \max_t \|H(t)\|$, $q = (1/4)\gamma(\alpha+\beta)^2\omega^3$, $a = (1/2)\gamma(\alpha+\beta)\omega^2$, где $t \in [0,\omega]$, $\|\cdot\|$ — мультипликативная норма матриц.

Выполнив оценки по норме в (12), получим $\|X_k\|_C \le (1/2)\gamma(\alpha+\beta)\omega^2\|Y_k\|_C$, $\|Y_{k+1}\|_C \le (1/2)(\alpha+\beta)\omega\|X_k\|_C$, $k = 0, 1, \ldots$ Отсюда находим рекуррентные оценки: $\|Y_{k+1}\|_C \le q\|Y_k\|_C$, $\|X_{k+1}\|_C \le q\|X_k\|_C$, $k = 0, 1, \ldots$, из которых нетрудно получить явные оценки

$$\|X_k\|_C \le q^k\|X_0\|_C, \quad \|Y_k\|_C \le q^k\|Y_0\|_C, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{13}$$

Поскольку $\|X_0\|_C \le a\|Y_0\|_C$, то имеет место оценка $\|X_k\|_C \le aq^k\|Y_0\|_C$, $k = 0, 1, \ldots$ Далее нетрудно доказать, что при выполнении условия $0 < |\lambda|q < 1$ ряды (11) сходятся равномерно относительно $t \in \mathbb{R}$, при этом

$$\|X(t,\lambda)\|_C \le \frac{\|X_{-1}\|_C}{|\lambda|} + \frac{\|X_0\|_C}{1-|\lambda|q} \le \frac{\|X_{-1}\|_C}{|\lambda|} + \frac{a\|Y_0\|_C}{1-|\lambda|q}, \quad \|Y(t,\lambda)\|_C \le \frac{\|Y_0\|_C}{1-|\lambda|q}. \tag{14}$$

Согласно [8, с. 160], заключаем, что так как ряды (11) сходятся равномерно, то их суммы $X(t,\lambda)$, $Y(t,\lambda)$ представляют собой решение системы уравнений (7), (10).

Единственность полученного периодического решения нетрудно доказать методом от противного с учетом условия $0 < |\lambda|q < 1$. Из приведенных рассуждений вытекает

Теорема. *Пусть матрицы M, N не имеют общих характеристических чисел. Тогда в области $0 < |\lambda| < 1/q$ ω-периодическое решение системы уравнений (2), (3) существует, единственно и представимо в виде (11), при этом имеют место оценки (14).*

Получим оценки, характеризующие скорость сходимости алгоритма (12). Из (11) имеем

$$X(t,\lambda) - \widetilde{X}_m(t,\lambda) = \lambda^{m+1}X_{m+1}(t) + \lambda^{m+2}X_{m+2}(t) + \ldots, \tag{15}$$

$$Y(t,\lambda) - \widetilde{Y}_m(t,\lambda) = \lambda^{m+1}Y_{m+1}(t) + \lambda^{m+2}Y_{m+2}(t) + \ldots, \tag{16}$$

$$\widetilde{X}_m(t,\lambda) = \frac{1}{\lambda}X_{-1} + \sum_{k=0}^{m}\lambda^k X_k(t), \quad \widetilde{Y}_m(t,\lambda) = \sum_{k=0}^{m}\lambda^k Y_k(t), \quad m = 0, 1, \ldots$$

Выполнив с учетом оценки (13) оценки по норме в (15), (16), получим соответственно $\|X(t,\lambda)-\widetilde{X}_m(t,\lambda)\|_C \le \le |\lambda|^{m+1}q^{m+1}(1-|\lambda|q)^{-1}\|X_0\|_C$, $\|Y(t,\lambda)-\widetilde{Y}_m(t,\lambda)\|_C \le |\lambda|^{m+1}q^{m+1}(1-|\lambda|q)^{-1}\|Y_0\|_C$. Поскольку $\|X_{-1}\| \le \gamma\omega h$, $\|Y_0\|_C \le (\omega h/2)[(\alpha+\beta)\gamma\omega+1]$, то отсюда выводим следующие оценки: $\|X(t,\lambda)-\widetilde{X}_m(t,\lambda)\|_C \le \mu\widetilde{q}^{m+1}/(1-\widetilde{q})$, $\|Y(t,\lambda)-\widetilde{Y}_m(t,\lambda)\|_C \le \nu\widetilde{q}^{m+1}/(1-\widetilde{q})$, где $\varepsilon = |\lambda|$, $\widetilde{q} = \varepsilon q$, $\mu = (1/4)\gamma(\alpha+\beta)\omega^3 h[(\alpha+\beta)\gamma\omega+1]$, $\nu = = (1/2)\omega h[(\alpha+\beta)\gamma\omega+1]$.

Замечание. Постоянную величину γ или ее оценку нетрудно получить с помощью формул, приведенных в [9; 10, с. 259].

Литература

1. *Зубов В. И.* Лекции по теории управления. М., 1975.
2. *Параев Ю. И.* Уравнения Ляпунова и Риккати. Томск, 1989.
3. *Елисеенко М. Н., Лаптинский В. Н., Подолян С. В.* // Тр. третьей конф. “Дифференциальные уравнения и применения”. Болгария. Руссе, 1987. Ч. 1. С. 123 — 126.
4. *Забрейко П. П., Лаптинский В. Н., Подолян С. В.* Некоторые аналитические методы отыскания периодических решений матричных дифференциальных уравнений. Могилев, 1994. (Препринт / Ин-т прикл. оптики АНБ: 2).
5. *Лаптинский В. Н.* // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19, № 8. С. 335 — 343.
6. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. М., 1967.
7. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М., 1967.
8. *Рисс Ф., Секефальви-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу. М., 1954.
9. *Абдикасова П. А., Валеев К. Г.* // Мат. физика. 1976. Вып. 19, № 6. С. 3 — 10.
10. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. М., 1976.

Институт прикладной оптики НАН Беларуси,
г. Могилев

Поступила в редакцию
15 февраля 1999 г.