2000. Т. 36, № 2. С. 276 — 278

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.925.52

ОБ ОДНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ПЕРИОДИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОГО МАТРИЧНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Л. А. Данилович, В. Н. Лаптинский

Теории периодических решений дифференциальных уравнений посвящена обширная литература. Достаточно полную информацию о таких решениях дают конструктивные методы (см., например, [1 — 3]).

В настоящей работе на основе подхода [4] исследуется задача о периодических периода ω решениях дифференциального уравнения

$$dX/dt = \lambda A(t)X(K_0 + \lambda K_1(t)) + F(t), \tag{1}$$

где $A(t)$, $K_1(t)$, $F(t)$ — ω-периодические $(n \times n)$-матрицы класса $\mathbb{C}$, K_0 — постоянная матрица, λ — скалярный параметр.

В случае, когда $K_1(t) \equiv 0$, эта задача рассматривалась в [5]. Исследование уравнений типа (1) представляет интерес как для теории дифференциальных уравнений [5, 6], так и в связи с рядом конкретных задач [7, с. 81; 8].

Цель настоящей работы — построение разложения ω-периодического решения в ряд по степеням λ в одном невырожденном случае.

Пусть $X = X(t,\lambda)$ — ω-периодическое решение уравнения (1). Это решение удовлетворяет краевому условию

$$X(0,\lambda) = X(\omega,\lambda). \tag{2}$$

Из (1), (2) имеем

$$\int_0^\omega [\lambda A(\tau)X(\tau,\lambda)(K_0 + \lambda K_1(\tau)) + F(\tau)]\,d\tau = 0. \tag{3}$$

Пусть выполнено условие

$$\det K_0 \neq 0. \tag{4}$$

Тогда равенство (3) при $\lambda \neq 0$ можно записать в виде

$$\int_0^\omega A(\tau)X(\tau,\lambda)\,d\tau = -\lambda \int_0^\omega A(\tau)X(\tau,\lambda)K_1(\tau)\,d\tau\, K_0^{-1} - \frac{1}{\lambda}\int_0^\omega F(\tau)\,d\tau\, K_0^{-1}. \tag{5}$$

Далее воспользуемся формулой

$$\int_0^\omega A(\tau)X(\tau,\lambda)\,d\tau = B(\omega)X(t,\lambda) - \int_0^t B_1(\tau)\dot{X}(\tau,\lambda)\,d\tau + \int_t^\omega B_2(\tau)\dot{X}(\tau,\lambda)\,d\tau,$$

где $B_1(\tau) = \int_0^\tau A(\sigma)\,d\sigma$, $B_2(\tau) = \int_\tau^\omega A(\sigma)\,d\sigma$, $B(\omega) = B_1(\omega)$, $\dot{X}(\tau,\lambda) = dX(\tau,\lambda)/d\tau$. Тогда из (1), (5), предполагая, что

$$\det B(\omega) \neq 0, \tag{6}$$

получаем матричное интегральное уравнение

$$X(t,\lambda) = \lambda \int_0^\omega H(t,\tau)A(\tau)X(\tau,\lambda)(K_0 + \lambda K_1(\tau))\,d\tau - \lambda B^{-1}(\omega)\int_0^\omega A(\tau)X(\tau,\lambda)K_1(\tau)\,d\tau\, K_0^{-1} + P(t) + \frac{1}{\lambda}M, \tag{7}$$

где

$$H(t,\tau) = \begin{cases} B^{-1}(\omega)B_1(\tau), & 0 \le \tau \le t \le \omega, \\ -B^{-1}(\omega)B_2(\tau), & 0 \le t < \tau \le \omega, \end{cases}$$

$$P(t)=\int\limits_0^\omega H(t,\tau)F(\tau)\,d\tau,\quad M=-B^{-1}(\omega)\int\limits_0^\omega F(\tau)\,d\tau\,K_0^{-1}.$$

Верно и обратное: всякое непрерывное решение $X(t,\lambda)$ уравнения (7) является решением задачи (1), (2). Тогда ω-периодическое продолжение матрицы-функции $X(t,\lambda)$ на всю числовую ось будет решением уравнения (1) при всех $t\in R$.

Решение уравнения (7) отыскиваем в виде

$$X(t,\lambda)=\frac{1}{\lambda}X_{-1}(t)+\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k X_k(t), \tag{8}$$

где $X_{i-1}(t)$, $i=0,1,\ldots,$ — ω-периодические матричные функции, подлежащие определению.

Для нахождения этих функций подставим (8) в (7) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях λ в обеих частях полученных соотношений. Тогда получим

$$X_{-1}(t)\equiv M,$$

$$X_0(t)=\int\limits_0^\omega H(t,\tau)[A(\tau)X_{-1}K_0+F(\tau)]\,d\tau-B^{-1}(\omega)\int\limits_0^\omega A(\tau)X_{-1}K_1(\tau)\,d\tau\,K_0^{-1},$$

$$X_k(t)=\int\limits_0^\omega H(t,\tau)A(\tau)[X_{k-1}(\tau)K_0+X_{k-2}(\tau)K_1(\tau)]\,d\tau-B^{-1}(\omega)\int\limits_0^\omega A(\tau)X_{k-1}(\tau)K_1(\tau)\,d\tau\,K_0^{-1},\quad k=1,2,\ldots \tag{9}$$

Докажем сходимость ряда (8), равномерную относительно $t\in R$. Примем следующие обозначения: $\gamma=\|B^{-1}(\omega)\|$, $\alpha=\max\limits_t\|A(t)\|$, $\beta_0=\|K_0\|$, $\beta_1=\max\limits_t\|K_1(t)\|$, $r=\|K_0^{-1}\|$, $q_1=(1/2)\gamma\alpha^2\beta_0\omega^2+\gamma\alpha\beta_1 r\omega$, $q_2=(1/2)\gamma\alpha^2\beta_1\omega^2$, $\varepsilon=|\lambda|$, $\|X\|_C=\max\limits_t\|X(t)\|$, где $t\in[0,\omega]$, $\|\cdot\|$ — мультипликативная норма матриц.

Выполнив оценки по норме в (9), получим

$$\|X_k(t)\|\le\gamma\alpha^2\left[\int\limits_0^t\tau(\beta_0\|X_{k-1}(\tau)\|+\beta_1\|X_{k-2}(\tau)\|)\,d\tau+\int\limits_t^\omega(\omega-\tau)(\beta_0\|X_{k-1}(\tau)\|+\beta_1\|X_{k-2}(\tau)\|)\,d\tau\right]+$$

$$+\gamma\alpha\beta_1 r\int\limits_0^\omega\|X_{k-1}(\tau)\|\,d\tau\le(1/2)\gamma\alpha^2\omega^2(\beta_0\|X_{k-1}\|_C+\beta_1\|X_{k-2}\|_C)+\gamma\alpha\beta_1 r\omega\|X_{k-1}\|_C=q_1\|X_{k-1}\|_C+q_2\|X_{k-2}\|_C.$$

Отсюда следует рекуррентная оценка

$$\|X_k\|_C\le q_1\|X_{k-1}\|_C+q_2\|X_{k-2}\|_C,\quad k=1,2,\ldots \tag{10}$$

Далее с помощью приемов, используемых в [4], нетрудно доказать, что при выполнении условия

$$0<\varepsilon q_1+\varepsilon^2q_2<1 \tag{11}$$

ряд (8) сходится равномерно относительно $t\in R$, при этом

$$\|X(t,\lambda)\|_C\le(1/(1-q(\varepsilon)))[\varepsilon^{-1}(1-\varepsilon q_1)\|X_{-1}\|_C+\|X_0\|_C], \tag{12}$$

где $q(\varepsilon)=\varepsilon q_1+\varepsilon^2q_2$.

Согласно [9, с. 160], заключаем: так как ряд (8) сходится равномерно, то его сумма представляет собой решение уравнения (7).

Используя (10), можно получить неравенство $\|X-\tilde X_m\|_C\le(\varepsilon^m/(1-q(\varepsilon)))[\varepsilon q_2\|X_{m-1}\|_C+q(\varepsilon)\|X_m\|_C]$, $m=0,1,\ldots,$ характеризующее скорость сходимости алгоритма (9). Здесь $\tilde X_m=(1/\lambda)X_{-1}+\sum\limits_{k=0}^{m}\lambda^kX_k(t)$.

Теперь легко видеть, что справедливы следующие утверждения.

Теорема. *При выполнении условий (4), (6), (11) ω-периодическое решение уравнения (1) существует и единственно. Это решение представимо в виде (8) и имеет место оценка (12).*

Следствие. *Пусть выполнены условия (4), (6). Тогда в области $0<|\lambda|<2/(q_1+\sqrt{q_1^2+4q_2})\equiv\lambda_0$ ω-периодическое решение уравнения (1) существует и единственно.*

Замечание. Рассмотрим задачу (1), (2) с точки зрения теории возмущений.

Пусть $\int\limits_0^\omega F(\tau)\,d\tau=0$. Тогда задача (1), (2) разрешима при $\lambda=0$, и мы приходим к заключению, что при выполнении условий (4), (6) все значения λ такие, что $|\lambda|<\lambda_0$, регулярны [9, с. 167], и для них ряд $X(t,\lambda)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\lambda^kX_k(t)$ представляет собой расширенное ω-периодическое решение уравнения (1). При $\lambda\to 0$

получим функцию $X_0(t) = \int\limits_0^\omega H(t,\tau)F(\tau)\,d\tau$, дающую ω-периодическое решение невозмущенного уравнения $dX/dt = F(t)$.

Следует отметить, что функция $X_0(t)$ удовлетворяет интегральному условию $\int\limits_0^\omega A(\tau)X_0(\tau)\,d\tau = 0$, что согласуется с [1, с. 290].

Литература

1. *Гребеников Е. А., Рябов Ю. А.* Конструктивные методы анализа нелинейных систем. М., 1979.
2. *Зубов В. И.* Теория колебаний. М., 1979.
3. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Численно-аналитические методы исследования периодических решений. Киев, 1976.
4. *Лаптинский В. Н.* // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19, № 8. С. 1335 — 1343.
5. *Лаптинский В. Н., Кенжебаев К., Пугин В. В.* // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31, № 6. С. 1087 — 1089.
6. *Деревенский В. П.* // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31, № 11. С. 1925 — 1926.
7. *Зубов В. И.* Лекции по теории управления. М., 1975.
8. *Ларин В. Б.* // Докл. РАН. 1993. Т. 328, № 1. С. 19 — 21.
9. *Рисс Ф., Секефальви-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу. М., 1954.

Институт прикладной оптики НАН Беларуси,
Могилевский машиностроительный институт

Поступила в редакцию
26 июня 1998 г.