ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2002, том 38, № 8, с. 1133–1134

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.925.52

К ТЕОРИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ МАТРИЧНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА ТИПА ЛЯПУНОВА*)

© 2002 г. **В. Н. Лаптинский, В. А. Ливинская**

Теории периодических решений систем дифференциальных уравнений посвящена обширная литература. Наиболее полную информацию о таких решениях дают конструктивные методы (см., например, [1–4]). В настоящей работе на основе подходов, использованных в работе [3], исследуется задача о периодических периода ω решениях дифференциального уравнения

$$d^2X/dt^2 = \lambda A(t)X + \lambda^2 XB(t) + F(t), \tag{1}$$

где $A(t)$, $B(t)$, $F(t)$ – класса C ω-периодические $(n\times n)$-матрицы, λ – вещественный скалярный параметр.

Исследование уравнения (1) представляет интерес для теории и приложений дифференциальных уравнений [5; 6; 7, с. 112]. Уравнение (1) тесно связано с классическим уравнением Ляпунова [8–11].

Основным приемом в методах регуляризации [3] является построение специальных интегральных уравнений, эквивалентных данной дифференциальной задаче. Указанные методы основаны на различных регуляризующих приемах.

В методе регуляризации типа Коши при получении эквивалентных интегральных уравнений используется решение задачи Коши для уравнения (1) с параметризованным начальным условием. В методе регуляризации типа Грина соответствующая методика основана на применении функций, аналогичных функциям краевых условий. В этом состоит различие между указанными методами. Вместе с тем между ними имеется связь, устанавливаемая, в частности, в данной работе.

Уравнение (1) заменим эквивалентной системой

$$dX/dt = Y, \quad dY/dt = \lambda A(t)X + \lambda^2 XB(t) + F(t). \tag{2}$$

Согласно [12, с. 215], задача об ω-периодических решениях системы (2), эквивалентна периодической краевой задаче с условиями

$$X(0,\lambda) = X(\omega,\lambda), \quad Y(0,\lambda) = Y(\omega,\lambda). \tag{3}$$

Введем следующие обозначения: $M = \int_0^\omega A(\tau)d\tau$, $\alpha = \max\limits_t \|A(t)\|$, $\beta = \max\limits_t \|B(t)\|$, $\gamma = \|M^{-1}\|$, $h = \max\limits_t \|F(t)\|$, $\|H\|_C = \max\limits_t \|H(t)\|$, $q_1 = 4^{-1}\gamma\alpha^2\omega^3 + \gamma\beta\omega$, $q_2 = 4^{-1}\gamma\alpha\beta\omega^3$, $\varepsilon = |\lambda|$, $q = \varepsilon q_1 + \varepsilon^2 q_2$, $p_1 = \alpha\omega/2$, $p_2 = \beta\omega/2$, где $t \in [0,\omega]$, $\|\cdot\|$ – мультипликативная норма матриц, например, любая из норм, приведенных в [12, с. 21], C – банахово пространство непрерывных (ω-периодических) $(n\times n)$-матриц.

На основе метода регуляризации типа Грина получена

Теорема. *Пусть выполнено условие* $\det M \neq 0$. *Тогда в области* $0 < |\lambda| < 2/(q_1 + (q_1^2 + 4q_2)^{1/2})$ *решение краевой задачи (2), (3) существует, единственно и представимо в виде*

$$X(t,\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{k-1} X_{k-1}(t), \quad Y(t,\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k Y_k(t),$$

где ω-периодические матрицы $X_{k-1}(t)$, $Y_k(t)$, $k = 0,1,\ldots$, определяются рекуррентными интегральными соотношениями: $X_{-1} = -M^{-1}\int_0^\omega F(\tau)d\tau$, $Y_0(t) = \int_0^\omega \varphi(t,\tau)[A(\tau)X_{-1} + F(\tau)]\,d\tau$, $X_k(t) = M^{-1}[\int_0^\omega K_A(t,\tau)Y_k(\tau)d\tau - \int_0^\omega X_{k-1}(\tau)B(\tau)\,d\tau]$, $Y_{k+1}(t) = \int_0^\omega \varphi(t,\tau)[A(\tau)X_k(\tau) + X_{k-1}(\tau)B(\tau)]\,d\tau$, $k = 0,1,\ldots$ *Здесь*

$$\varphi(t,\tau) = \begin{cases} \tau/\omega, & 0 \le \tau \le t \le \omega, \\ \tau/\omega - 1, & 0 \le t < \tau \le \omega, \end{cases} \quad K_A(t,\tau) = \begin{cases} \int\limits_0^\tau A(\sigma)d\sigma, & 0 \le \tau \le t \le \omega, \\ \int\limits_\omega^\tau A(\sigma)d\sigma, & 0 \le t < \tau \le \omega. \end{cases}$$

*) Рукопись полностью депонирована в ВИНИТИ 05.03.02. № 403-В2002.

Установлены следующие оценки нормы точного решения задачи (2), (3), а также оценки, характеризующие скорость сходимости данного алгоритма: $\|X(t,\lambda)\|_C \leq (1-q)^{-1}[\varepsilon^{-1}(1-\varepsilon q_1)\|X_{-1}\|_C + \|X_0\|_C]$, $\|Y(t,\lambda)\|_C \leq \|Y_0\|_C + \delta(1-q)^{-1}$, $\|X(t,\lambda) - \tilde{X}_m(t,\lambda)\|_C \leq \varepsilon^m(1-q)^{-1}[\varepsilon q_2\|X_{m-1}\|_C + q\|X_m\|_C]$, $\|Y(t,\lambda) - \tilde{Y}_m(t,\lambda)\|_C \leq \varepsilon^{m+1}\{p_2\|X_{m-1}\|_C + (p_1+p_2\varepsilon)(1-q)^{-1}(\varepsilon q_2\|X_{m-1}\|_C + \|X_m\|_C)\}$, $m = 0, 1, \ldots$, где $\delta = \varepsilon\{p_1(\varepsilon q_2\|X_{-1}\|_C + \|X_0\|_C) + p_2[(1-\varepsilon q_1)\|X_{-1}\|_C + \varepsilon\|X_0\|_C]\}$.

Аналогичные результаты получены с помощью метода регуляризации типа Коши.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гребеников Е.А., Рябов Ю.А* Конструктивные методы анализа нелинейных систем. М., 1979.
2. *Зубов В.И.* Теория колебаний. М., 1979.
3. *Лаптинский В.Н.* Конструктивный анализ управляемых колебательных систем. М., 1998.
4. *Самойленко А.М., Ронто Н.И.* Численно-аналитические методы исследования периодических решений. Киев, 1976.
5. *Далецкий Ю.Л., Крейн С.Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М., 1970.
6. *Кононенко В.И.* // Операторные методы в дифференциальных уравнениях. Воронеж, 1979. С. 45–48.
7. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Краткий курс теоретической физики. Ч. 1. М., 1969.
8. *Зубов В.И.* Лекции по теории управления. М., 1975.
9. *Параев Ю.И.* Уравнения Ляпунова и Риккати. Томск, 1989.
10. *Розо М.* Нелинейные колебания и теория устойчивости. М., 1971.
11. *Ройтенберг Я.Н.* Автоматическое управление. М., 1970.
12. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. М., 1967.

Институт прикладной оптики НАН Беларуси,
г. Могилев

Поступила в редакцию
12.02.2002 г.