ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2002, том 38, № 7, с. 982–985

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.977

О СУЩЕСТВОВАНИИ ОПТИМАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

© 2002 г. В. Г. Замураев

1. Рассмотрим метрическое пространство $C_{\rm ad}$ – множество допустимых управлений, гильбертово пространство*) F со скалярным произведением $[u,v]$ и нормой $|v|$, $|v|=[v,v]^{1/2}$, и семейство $\{F_c\}$, $c\in C_{\rm ad}$, замкнутых подпространств пространства F. На пространстве F зададим линейный непрерывный функционал $l(v)$,

$$|l(v)|\le K_l|v| \quad \forall v\in F, \tag{1}$$

где положительная постоянная K_l не зависит от v. Для каждого допустимого управления c рассмотрим линейное функциональное уравнение

$$u_c\in F_c, \quad [u_c,v]=l(v) \quad \forall v\in F_c. \tag{S_c1}$$

Пусть u_c^0 – решение уравнения (S_c1). Зададим функционал $J(c,v)$:

$$J: C_{\rm ad}\times F\to R, \tag{2}$$

обозначим

$$j(c)\equiv J(c,u_c^0) \quad \text{на} \quad C_{\rm ad} \tag{3}$$

и рассмотрим задачу отыскания среди допустимых управлений управления, доставляющего минимальное значение функционалу $j(c)$ на $C_{\rm ad}$ (задача (C1)). Всякое решение c^* задачи (C1): $c^*\in C_{\rm ad}$, $j(c^*)=\min\limits_{C_{\rm ad}} j(c)$, будем называть оптимальным управлением, а соответствующее этому управлению подпространство F_{c^*} пространства F – оптимальным пространством для функционального уравнения $[u,v]=l(v)$.

Исследуемая задача возникла как обобщение задачи построения оптимальной области, рассмотренной в [1, 2].

Пусть P_c – оператор ортогонального проектирования пространства F на подпространство F_c (о проекторах в гильбертовом пространстве см., например, [3, с. 202–203, 231–236]), а u^0 – решение уравнения

$$u\in F, \quad [u,v]=l(v) \quad \forall v\in F. \tag{$S1$}$$

Связь между решениями u^0 и u_c^0 уравнений $(S1)$ и (S_c1) соответственно устанавливает

Лемма 1. *Для любого допустимого управления* c $u_c^0=P_cu^0$.

Доказательство. Используя свойства проектора, получаем $\forall c\in C_{\rm ad}$, $\forall v\in F_c$ $[P_cu^0,v]=[u^0,P_cv]=[u^0,v]=l(v)$. В совокупности с условием $P_cu^0\in F_c$, в силу единственности для любого допустимого управления c решения уравнения (S_c1) это означает, что $u_c^0=P_cu^0$ $\forall c\in C_{\rm ad}$. Лемма доказана.

Введем следующие условия:

1) $C_{\rm ad}$ – компакт;

2) из условий

$$c_n\in C_{\rm ad}, \quad c_n\to c\in C_{\rm ad} \quad (\text{в } C_{\rm ad}), \tag{4}$$

$$v\in F, \quad P_{c_n}v\underset{w}{\to}\bar v \quad (\text{слабо в } F) \tag{5}$$

следует $\bar v=P_cv$;

3) существует постоянная k_J такая, что $J(c,v)\ge k_J$ $\forall c\in C_{\rm ad}$, $\forall v\in F$, k_J не зависит от c, v; выполняется неравенство Липшица $|J(c,v_1)-J(c,v_2)|\le L_J|v_1-v_2|$ $\forall c\in C_{\rm ad}$, $\forall v_1,v_2\in F$, где постоянная $L_J>0$ не зависит от c, v_1, v_2; из условий (4) следует $\lim\limits_{n\to\infty} J(c_n,v)=J(c,v)$ $\forall v\in F$.

Покажем, что при выполнении условий 1)–3) задача (C1) имеет по крайней мере одно решение. Установим вначале некоторые вспомогательные результаты.

*) Все рассматриваемые гильбертовы пространства предполагаются вещественными сепарабельными.

Лемма 2. *При выполнении условия 2) из условий (4) и сходимости*

$$u^0_{c_n} \underset{w}{\to} \bar{u} \tag{6}$$

следует

$$u^0_{c_n} \to u^0_c \quad (\text{в} \ \ F). \tag{7}$$

Доказательство. Согласно лемме 1,

$$u^0_{c_n} = P_{c_n} u^0, \quad u^0_c = P_c u^0. \tag{8}$$

Условия (4), (6), равенства (8) и выполнение условия 2) влекут за собой

$$u^0_{c_n} \underset{w}{\to} u^0_c. \tag{9}$$

Далее, используя (8), (9) и свойства проектора, получаем

$$\lim_{n\to\infty} |u^0_{c_n}|^2 = \lim_{n\to\infty} [u^0_{c_n}, u^0_{c_n}] = \lim_{n\to\infty} [P_{c_n} u^0, P_{c_n} u^0] = \lim_{n\to\infty} [u^0, P_{c_n} u^0] = [u^0, u^0_c] =$$

$$= [u^0, P_c u^0] = [P_c u^0, P_c u^0] = |u^0_c|^2,$$

откуда

$$\lim_{n\to\infty} |u^0_{c_n}| = |u^0_c|. \tag{10}$$

Сильная сходимость (7) следует из (9) и (10). Лемма доказана.

Лемма 3. *При выполнении условия 3) из условий (4), (7) следует*

$$\lim_{n\to\infty} j(c_n) = j(c). \tag{11}$$

Доказательство. Соотношения

$$|J(c_n, u^0_{c_n}) - J(c, u^0_c)| = |J(c_n, u^0_{c_n}) - J(c_n, u^0_c) + J(c_n, u^0_c) - J(c, u^0_c)| \le$$

$$\le |J(c_n, u^0_{c_n}) - J(c_n, u^0_c)| + |J(c_n, u^0_c) - J(c, u^0_c)|,$$

условия (4), (7), выполнение условия 3) и (3) влекут за собой (11). Лемма доказана.

Сформулируем и докажем теперь основное утверждение настоящей работы – теорему существования решения рассматриваемой задачи оптимизации.

Теорема 1. *При выполнении условий 1)–3) задача (C1) имеет по крайней мере одно решение.*

Доказательство. Пусть выполнены условия 1)–3). Функционал $j(c)$ ограничен снизу на множестве C_{ad}; значит, существует последовательность допустимых управлений (c_n), минимизирующая этот функционал на C_{ad}:

$$\lim_{n\to\infty} j(c_n) = \inf_{C_{\text{ad}}} j(c). \tag{12}$$

Метрическое пространство C_{ad} – компакт, следовательно, последовательность (c_n) содержит подпоследовательность (которую снова обозначим через (c_n)), сходящуюся в C_{ad} к некоторому допустимому управлению c^*. Рассмотрим последовательность $(u^0_{c_n})$, соответствующую сходящейся последовательности (c_n).

В уравнении $(S_{c_n}1)$ положим $u_{c_n} = v = u^0_{c_n}$. Из полученного равенства и (1) имеем $|u^0_{c_n}|^2 = l(u^0_{c_n}) = |l(u^0_{c_n})| \le K_l |u^0_{c_n}|$, откуда $|u^0_{c_n}| \le K_l \ \ \forall n$. Из последнего неравенства в силу слабой компактности замкнутого шара в гильбертовом пространстве F следует, что из последовательности $(u^0_{c_n})$ можно выделить подпоследовательность (которую опять обозначим через $(u^0_{c_n})$), слабо сходящуюся в F к некоторому элементу $\bar{u}$.

Таким образом, учитывая, что всякая подпоследовательность сходящейся последовательности (c_n) сходится к тому же пределу, имеем

$$c_n \to c^* \in C_{\text{ad}} \tag{13}$$

и сходимость (6). Тогда, согласно лемме 2,

$$u^0_{c_n} \to u^0_{c^*}. \tag{14}$$

Учитывая (12), тот факт, что всякая подпоследовательность минимизирующей последовательности (c_n) также будет минимизирующей последовательностью для функционала $j(c)$ на C_{ad}, (13), (14) и выполнение условия 3), по лемме 3 находим, что $\inf\limits_{C_{\text{ad}}} j(c) = \lim\limits_{n\to\infty} j(c_n) = j(c^*)$. В совокупности с условием $c^* \in C_{\text{ad}}$ это означает, что c^* – оптимальное управление. Теорема доказана.

Замечание. Если из условий (4), (5) следует $\bar{v} \in F_c$ и из условий (4) следует $P_{c_n}v \underset{w}{\to} v \;\; \forall v \in F_c$, то будет выполнено условие 2).

Действительно, в этом случае из условий (4) и (5) следует, что $\forall w \in F \;\; [\bar{v}, w] = [P_c\bar{v}, w] = [\bar{v}, P_c w] = \lim\limits_{n\to\infty}[P_{c_n}v, P_c w] = \lim\limits_{n\to\infty}[v, P_{c_n}P_c w] = [v, P_c w] = [P_c v, w]$, откуда $\bar{v} = P_c v$.

2. Рассмотрим гильбертово пространство H со скалярным произведением (u, v) и нормой $\|v\| = (v, v)^{1/2}$. Зададим действующие в пространстве H дистрибутивный оператор A с областью $D(A)$, $\overline{D(A)} = H$, и замыкаемый дистрибутивный оператор B, $D(A) \subset D(B)$,

$$\overline{R_A(B)} = \overline{\{Bv|\; v \in D(A)\}} = H \tag{15}$$

такие, что на $D(A)$ оператор A является B-симметричным: $(Au, Bv) = (Av, Bu) \;\; \forall u, v \in D(A)$ и B-положительно-определенным: $(Av, Bv) \ge k_{1AB}\|v\|^2 \;\; \forall v \in D(A)$, $(Av, Bv) \ge k_{2AB}\|Bv\|^2 \;\; \forall v \in D(A)$, где положительные постоянные k_{1AB}, k_{2AB} не зависят от v. Напомним, что оператор B называется замыкаемым в H, если из условий $v_n \in D(B)$, $v_n \to 0$, $Bv_n \to v$ следует $v = 0$.

При выполнении условий B-симметричности, B-положительной определенности оператора A форма (Au, Bv) и функционал $(Av, Bv)^{1/2}$ определяют новое скалярное произведение и норму на $D(A)$: $(Au, Bv) \equiv [u, v]$ на $D(A)$,

$$|v| \equiv [v, v]^{1/2} \quad \text{на} \quad D(A); \tag{16}$$

обобщенное пространство Фридрихса ("энергетическое" пространство) H_{AB} для оператора A определяется как пополнение множества $D(A)$ в норме (16); если дополнительно выполнено условие (15), то имеет место вложение пространства H_{AB} в H: $H_{AB} \subset H$ в смысле однозначного отождествления множества H_{AB} с подмножеством в пространстве H, $\|v\| \le k_{1AB}^{-1/2}|v| \;\; \forall v \in H_{AB}$, а оператор B, являясь ограниченным линейным отображением плотного в H_{AB} множества $D(A)$ в пространство H, допускает расширение по непрерывности до ограниченного оператора B_0, отображающего все H_{AB} в H.

Пусть $R(A)$ – множество значений оператора A, $f \in R(A)$. Рассмотрим операторное уравнение

$$u \in D(A), \quad Au = f. \tag{$S2$)$'$}$$

При выполнении всех перечисленных выше предположений уравнение $(S2)'$ равносильно вариационному уравнению

$$u \in H_{AB}, \quad [u, v] = (f, B_0 v) \quad \forall v \in H_{AB}, \tag{$S2$}$$

которое имеет единственное решение при любом элементе $f \in H$, непрерывно зависящее от f, называемое обобщенным решением уравнения $(S2)'$. Задача отыскания обобщенного решения уравнения $(S2)'$ равносильна вариационной задаче минимизации на пространстве H_{AB} функционала $\Phi(v) \equiv |v|^2 - 2(f, B_0 v)$ на H_{AB}. Отметим, что класс B-симметричных, B-положительно-определенных операторов A достаточно широк: оператор A $(\overline{R(A)} = H)$ является B-симметричным, B-положительно-определенным при некотором вспомогательном операторе $B \Leftrightarrow A$ имеет на $R(A)$ ограниченный в H обратный оператор A^{-1}. (Вариационный метод решения линейных уравнений с непотенциальными операторами детально изложен в монографии [4].)

Пусть C_{ad} – метрическое пространство допустимых управлений, $\{H_{ABc}\}$, $c \in C_{\text{ad}}$, – семейство замкнутых подпространств пространства H_{AB}. Для каждого допустимого управления c рассмотрим линейное функциональное уравнение

$$u_c \in H_{ABc}, \quad [u_c, v] = (f, B_0 v) \quad \forall v \in H_{ABc}. \tag{S_c2}$$

Зададим функционал $J(c, v)$ формулой (2). Пусть u_c^0 – решение уравнения (S_c2). Рассмотрим задачу отыскания среди допустимых управлений управления, доставляющего минимальное значение функционалу $j(c)$, определяемому аналогично (3) на C_{ad} (задача (C2)). Эта задача, очевидно, является задачей вида (C1) при $F = H_{AB}$, $l(v) \equiv (f, B_0 v)$ на H_{AB}: $|(f, B_0 v)| \le \|f\|\,\|B_0 v\| \le \|f\| k_{2AB}^{-1/2}|v|$, и, следовательно, для нее справедливы все полученные в п. 1 результаты.

Непосредственно из теоремы 1 вытекает

Теорема 2. *Если действующий в гильбертовом пространстве H дистрибутивный оператор A с плотной в H областью $D(A)$ является B-симметричным, B-положительно-определенным при некотором вспомогательном операторе B $(D(A) \subset D(B),\ \overline{R_A(B)} = H)$ и выполнены условия 1)–3), где F – обобщенное пространство Фридрихса H_{AB} для оператора A, то существует по крайней мере одно решение задачи (С2).*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Begis D., Glowinski R.* // Applied Mathematics and Optimization. 1975. V. 2. № 2. P. 130–169.
2. *Авакян А.Э., Филиппов В.М.* // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28. № 12. С. 2123–2128.
3. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. М., 1977.
4. *Филиппов В.М.* Вариационные принципы для непотенциальных операторов. М., 1985.

Могилевский государственный
технический университет

Поступила в редакцию
19.03.2001 г.