ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2002, том 38, № 6, с. 849–851

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.977

О СУЩЕСТВОВАНИИ ОПТИМАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

© 2002 г. В. Г. Замураев

1. Рассмотрим метрическое пространство C_{ad} – множество допустимых управлений, гильбертово пространство*) F со скалярным произведением $[u,v]$ и нормой $|v|$, $|v|=[v,v]^{1/2}$ и семейство $\{F_c\}$, $c\in C_{\text{ad}}$, замкнутых подпространств пространства F. На пространстве F зададим линейный непрерывный функционал $l(v)$ и нелинейный оператор $W(v)$, отображающий F на F, имеющий на F непрерывный обратный оператор W^{-1} и такой, что

$$\forall c\in C_{\text{ad}}\quad v\in F_c \Leftrightarrow W(v)\in F_c. \tag{1}$$

Для каждого допустимого управления c рассмотрим нелинейное функциональное уравнение

$$u_c\in F_c,\quad [W(u_c),v]=l(v)\quad \forall v\in F_c. \tag{S_c1}$$

Пусть u_c^0 – решение уравнения (S_c1). Зададим функционал $J(c,v)$,

$$J: C_{\text{ad}}\times F\to R, \tag{2}$$

обозначим

$$j(c)\equiv J(c,u_c^0)\ \text{ на }\ C_{\text{ad}} \tag{3}$$

и рассмотрим задачу отыскания среди допустимых управлений управления, доставляющего минимальное значение функционалу $j(c)$ на C_{ad} (задача $(C1)$). Всякое решение c^* задачи $(C1)$: $c^*\in C_{\text{ad}}$, $j(c^*)=\min\limits_{C_{\text{ad}}} j(c)$ будем называть оптимальным управлением, а соответствующее этому управлению подпространство F_{c^*} пространства F – оптимальным пространством для функционального уравнения $[W(u),v]=l(v)$.

Исследуемая задача возникла как обобщение задачи построения оптимальной области, рассмотренной в [1, 2].

Пусть P_c – оператор ортогонального проектирования пространства F на подпространство F_c, а u^0 – решение уравнения

$$u\in F,\quad [W(u),v]=l(v)\quad \forall v\in F. \tag{$S1$}$$

Связь между решениями u^0 и u_c^0 уравнений $(S1)$ и (S_c1) соответственно устанавливает

Лемма. *Для любого допустимого управления* c $W(u_c^0)=P_cW(u^0)$.

Введем следующие условия:

1) C_{ad} – компакт;

2) из условий $c_n\in C_{\text{ad}}$, $c_n\to c\in C_{\text{ad}}$ (в C_{ad}), $v\in F$, $P_{c_n}v \underset{w}{\longrightarrow} \overline{v}$ (слабо в F) следует $\overline{v}=P_cv$;

3) существует постоянная k_J такая, что $J(c,v)\ge k_J$ $\forall c\in C_{\text{ad}}$, $\forall v\in F$, k_J не зависит от c, v; выполняется неравенство Липшица $|J(c,v_1)-J(c,v_2)|\le L_J|v_1-v_2|$ $\forall c\in C_{\text{ad}}$, $\forall v_1,v_2\in F$, где постоянная $L_J>0$, не зависит от c, v_1, v_2; из условия $c_n\in C_{\text{ad}}$, $c_n\to c\in C_{\text{ad}}$ следует $\lim\limits_{n\to\infty} J(c_n,v)=J(c,v)$ $\forall v\in F$.

Справедлива

Теорема 1. *При выполнении условий 1)–3) задача* $(C1)$ *имеет по крайней мере одно решение.*

2. Рассмотрим гильбертово пространство H со скалярным произведением (u,v) и нормой $\|v\|=(v,v)^{1/2}$. Зададим действующие в пространстве H нелинейный оператор N с линейной областью $D(N)$, $\overline{D(N)}=H$, $N(0)=0$, имеющий на $D(N)$ непрерывную (по x) производную Гато $N'(x)$, так что

$$H'(t)=(N'(x+ty)\varphi,\psi)\in C_t[0,1]\quad \forall x,y,\varphi,\psi\in D(N),$$

и замыкаемый в H дистрибутивный оператор B, $D(N)\subset D(B)$,

$$\overline{R_N(B)}=\overline{\{Bv|\ v\in D(N)\}}=H \tag{4}$$

*) Все рассматриваемые гильбертовы пространства предполагаются вещественными сепарабельными.

такие, что на $D(N)$ при всяком x из $D(N)$ оператор $N'(x)$ является B-симметричным:

$$(N'(x)u, Bv) = (N'(x)v, Bu) \quad \forall x, u, v \in D(N),$$

оператор $N'(0)$ является B-положительно-определенным:

$$(N'(0)v, Bv) \geq k_{1NB}\|v\|^2 \quad \forall v \in D(N), \quad (N'(0)v, Bv) \geq k_{2NB}\|Bv\|^2 \quad \forall v \in D(N),$$

где положительные постоянные k_{1NB}, k_{2NB} не зависят от v, и выполнено условие

$$(N'(x)v, Bv) \geq k_{3NB}(N'(0)v, Bv) \quad \forall x, v \in D(N); \tag{5}$$

здесь положительная постоянная k_{3NB} не зависит от x, v.

При выполнении условий B-симметричности, B-положительной определенности оператора $N'(0)$ форма $(N'(0)u, Bv)$ и функционал $(N'(0)v, Bv)^{1/2}$ определяют новое скалярное произведение и норму на $D(N)$: $(N'(0)u, Bv) \equiv [u, v]$ на $D(N)$,

$$|v| \equiv [v, v]^{1/2} \quad \text{на} \quad D(N); \tag{6}$$

обобщенное пространство Фридрихса (“энергетическое” пространство) F для оператора N определяется как пополнение множества $D(N)$ в норме (6); если дополнительно выполнено условие (4), то имеет место вложение пространства F в H: $F \subset H$ в смысле однозначного отождествления множества F с подмножеством в пространстве H, $\|v\| \leq (k_{1NB})^{-1/2}|v|$ $\forall v \in F$; оператор B, являясь ограниченным линейным отображением плотного в F множества $D(N)$ в пространство H, допускает расширение по непрерывности до ограниченного оператора B_0, отображающего все пространство F в H, оператор $N'(0)$ может быть расширен до замкнутого B_0-симметричного, B_0-положительно-определенного обратимого на всем пространстве H оператора $N_0'(0)$.

Если, кроме того, имеет место (5), а также из условия $u_n \in D(N)$, $u_n \longrightarrow u$ (в F) следует $\lim\limits_{m,n\to\infty}(N(u_n) - N(u_m), B_0 v) = 0$ $\forall v \in F$, то оператор $(N_0'(0))^{-1}N$ может быть расширен до оператора W, отображающего пространство F на все F и имеющего на F непрерывный обратный оператор W^{-1}.

Пусть $R(N)$ – множество значений оператора N, $f \in R(N)$. Рассмотрим следующее операторное уравнение:

$$u \in D(N), \quad N(u) = f. \tag{$S2'$}$$

При выполнении всех перечисленных выше предположений уравнение $(S2')$ равносильно вариационному*) уравнению

$$u \in F, \quad [W(u), v] = (f, B_0 v) \quad \forall v \in F, \tag{$S2$}$$

которое имеет единственное решение при любом элементе $f \in H$, непрерывно зависящее от f и называемое обобщенным (слабым) решением уравнения $(S2')$ (вариационный метод решения нелинейных уравнений с непотенциальными операторами детально изложен в монографии [3]).

Пусть C_{ad} – метрическое пространство допустимых управлений, $\{F_c\}$, $c \in C_{\text{ad}}$, – семейство замкнутых подпространств пространства F.

Будем также предполагать, что для указанного выше расширения W оператора $(N_0'(0))^{-1}N$ выполнено условие (1).

Для каждого допустимого управления c рассмотрим нелинейное функциональное уравнение

$$u_c \in F_c, \quad [W(u_c), v] = (f, B_0 v) \quad \forall v \in F_c. \tag{S_c2}$$

Зададим функционал $J(c, v)$ формулой (2). Пусть u_c^0 – решение уравнения (S_c2). Рассмотрим задачу отыскания среди допустимых управлений управления, доставляющего минимальное значение функционалу $j(c)$, определяемому аналогично (3) на C_{ad} (задача $(C2)$). Эта задача, очевидно, является задачей вида $(C1)$, где W – указанное выше расширение оператора $(N_0'(0))^{-1}N$ на F, $l(v) \equiv (f, B_0 v)$ на F и, следовательно, для нее справедливы все приведенные в п. 1 результаты.

---

*) Элемент $u^0 \in F$ является решением уравнения $(S2) \Leftrightarrow u^0$ – критическая точка функционала $\int_0^1 [W(tv) - (N_0'(0))^{-1} f, v]\, dt$.

Непосредственно из теоремы 1 вытекает

Теорема 2. *При выполнении условий 1)–3) задача* $(C2)$ *имеет по крайней мере одно решение.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Begis D., Glowinski R.* // Applied Mathematics and Optimization. 1975. V. 2. № 2. P. 130–169.
2. *Авакян А.Э., Филиппов В.М.* // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28. № 12. С. 2123–2128.
3. *Филиппов В.М.* Вариационные принципы для непотенциальных операторов. М., 1985.

Могилевский государственный
технический университет

Поступила в редакцию
19.03.2001 г.