ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2003, том 39, № 2, с. 281–283

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.925.52

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЯ ТИПА ЛЯПУНОВА

© 2003 г. Л. А. Данилович, В. Н. Лаптинский

Изучение периодических решений является актуальным, поскольку методология и методы их исследования составляют математическую основу теории колебаний. Математической теории колебаний посвящена обширная литература. Достаточно полную информацию о периодических решениях дифференциальных уравнений дают конструктивные методы (см., например, [1–4]).

Настоящая работа является продолжением [5]. На основе подхода [3, гл. 3] исследуется задача о периодических решениях периода ω дифференциального уравнения

$$dX/dt = \lambda A(t)X(K_0 + \lambda^2 K_1(t)) + F(t), \tag{1}$$

где $A(t)$, $K_1(t)$, $F(t)$ – непрерывные ω-периодические $(n\times n)$-матрицы, K_0 – постоянная матрица, λ – вещественный скалярный параметр.

Получены коэффициентные достаточные условия существования и единственности и разработан эффективный алгоритм построения ω-периодического решения уравнения (1) в вырожденном случае

$$\tilde{A}(\omega) \equiv \int_0^\omega A(\tau)d\tau = 0. \tag{2}$$

Примем следующие обозначения: $P(\tau) = \tilde{A}(\tau)A(\tau)$, $\alpha = \max_t \|A(t)\|$, $\gamma = \|\tilde{P}^{-1}(\omega)\|$, $\beta_0 = \|K_0\|$, $\beta_1 = \max_t \|K_1(t)\|$, $r = \|K_0^{-1}\|$, $\varepsilon = |\lambda|$, $q_1 = 3^{-1}\gamma\alpha^3\beta_0\omega^3 + \gamma\alpha\beta_1 r^2\omega$, $q_2 = 2^{-1}\gamma\alpha^2\beta_1 r\omega^2$, $q_3 = 3^{-1}\gamma\alpha^3\beta_1\omega^3$, $q(\varepsilon) = \varepsilon q_1 + \varepsilon^2 q_2 + \varepsilon^3 q_3$, $\|X\|_C = \max_t \|X(t)\|$, где $t \in [0,\omega]$, $\|\cdot\|$ – мультипликативная норма матриц, например, любая из норм, приведенных в [6, с. 21].

Теорема. *Пусть выполнено условие (2), а также условия*

$$\det K_0 \neq 0, \tag{3}$$

$$\det \tilde{P}(\omega) \neq 0, \tag{4}$$

$$0 < q(\varepsilon) < 1. \tag{5}$$

Тогда ω-периодическое решение уравнения (1) существует, единственно и представимо в виде

$$X(t,\lambda) = \lambda^{-2}X_{-2} + \lambda^{-1}X_{-1}(t) + \sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k X_k(t), \tag{6}$$

где ω-периодические матрицы $X_{i-2}(t)$, $i = 0,1,\ldots,$ определяются рекуррентным интегральным соотношением.

Доказательство. Согласно [6, с. 215], рассматриваемая задача эквивалентна ω-периодической краевой задаче для уравнения (1) с условием

$$X(0,\lambda) = X(\omega,\lambda). \tag{7}$$

Сначала получим матричное интегральное уравнение, эквивалентное задаче (1), (7). Пусть $X = X(t,\lambda)$ – решение этой задачи. Тогда из (1) на основании (7) имеем

$$\int_0^\omega [\lambda A(\tau)X(\tau,\lambda)(K_0 + \lambda^2 K_1(\tau)) + F(\tau)]d\tau = 0. \tag{8}$$

Используя (3), из (8) получим

$$\int\limits_0^\omega \boldsymbol{A}(\tau)\boldsymbol{X}(\tau,\lambda)d\tau = -\lambda^2\int\limits_0^\omega \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{X}(\tau,\lambda)\boldsymbol{K}_1(\tau)d\tau\boldsymbol{K}_0^{-1} - \frac{1}{\lambda}\int\limits_0^\omega \boldsymbol{F}(\tau)d\tau\boldsymbol{K}_0^{-1}. \tag{9}$$

Далее воспользуемся следующей формулой: $\int_0^\omega \boldsymbol{A}(\tau)\boldsymbol{X}(\tau,\lambda)d\tau = \tilde{\boldsymbol{A}}(\omega)\boldsymbol{X}(\omega,\lambda) - \int_0^\omega \tilde{\boldsymbol{A}}(\tau)\dot{\boldsymbol{X}}(\tau,\lambda)d\tau$, $\dot{\boldsymbol{X}}(\tau,\lambda) = d\boldsymbol{X}(\tau,\lambda)/d\tau$. Тогда из (9) с учетом (1)–(3) получим

$$\int\limits_0^\omega \boldsymbol{P}(\tau)\boldsymbol{X}(\tau,\lambda)d\tau = -\lambda^2\int\limits_0^\omega \boldsymbol{P}(\tau)\boldsymbol{X}(\tau,\lambda)\boldsymbol{K}_1(\tau)d\tau\boldsymbol{K}_0^{-1} + \lambda\int\limits_0^\omega \boldsymbol{A}(\tau)\boldsymbol{X}(\tau,\lambda)\boldsymbol{K}_1(\tau)d\tau K_0^{-2} +$$

$$+\frac{1}{\lambda^2}\int\limits_0^\omega \boldsymbol{F}(\tau)d\tau\boldsymbol{K}_0^{-2} - \frac{1}{\lambda}\int\limits_0^\omega \tilde{\boldsymbol{A}}(\tau)\boldsymbol{F}(\tau)d\tau\boldsymbol{K}_0^{-1}. \tag{10}$$

В (10) воспользуемся формулой

$$\int\limits_0^\omega \boldsymbol{P}(\tau)\boldsymbol{X}(\tau,\lambda)d\tau = \tilde{\boldsymbol{P}}(\omega)\boldsymbol{X}(t,\lambda) - \int\limits_0^t \tilde{\boldsymbol{P}}(\tau)\dot{\boldsymbol{X}}(\tau,\lambda)d\tau + \int\limits_t^\omega [\tilde{\boldsymbol{P}}(\omega) - \tilde{\boldsymbol{P}}(\tau)]\dot{\boldsymbol{X}}(\tau,\lambda)d\tau. \tag{11}$$

Используя (4), (11), из (10) в силу (1) получим

$$\boldsymbol{X}(t,\lambda) = \int\limits_0^\omega \boldsymbol{K}(t,\tau)[\lambda\boldsymbol{A}(\tau)\boldsymbol{X}(\tau,\lambda)(\boldsymbol{K}_0+\lambda^2\boldsymbol{K}_1(\tau))+\boldsymbol{F}(\tau)]d\tau+\tilde{\boldsymbol{P}}^{-1}(\omega)\Bigg\{-\lambda^2\int\limits_0^\omega \boldsymbol{P}(\tau)\boldsymbol{X}(\tau,\lambda)\boldsymbol{K}_1(\tau)d\tau\boldsymbol{K}_0^{-1} +$$

$$+\lambda\int\limits_0^\omega \boldsymbol{A}(\tau)\boldsymbol{X}(\tau,\lambda)\boldsymbol{K}_1(\tau)d\tau\boldsymbol{K}_0^{-2} + \frac{1}{\lambda^2}\int\limits_0^\omega \boldsymbol{F}(\tau)d\tau\boldsymbol{K}_0^{-2} - \frac{1}{\lambda}\int\limits_0^\omega \tilde{\boldsymbol{A}}(\tau)\boldsymbol{F}(\tau)d\tau\boldsymbol{K}_0^{-1}\Bigg\}, \tag{12}$$

где $K(t,\tau) = \tilde{\boldsymbol{P}}^{-1}(\omega)\tilde{\boldsymbol{P}}(\tau) + \boldsymbol{E}\,\mathrm{sign}\min\{0,t-\tau\}$, $\tau,t\in[0,\omega]$. Матричное интегральное уравнение (12) эквивалентно задаче (1), (7).

Решение уравнения (12) будем искать в виде (6). Подставляя (6) в (12) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ, получим

$$\boldsymbol{X}_{-2} = \tilde{\boldsymbol{P}}^{-1}(\omega)\int\limits_0^\omega \boldsymbol{F}(\tau)d\tau\boldsymbol{K}_0^{-2},$$

$$\boldsymbol{X}_{-1}(t) = \int\limits_0^\omega \boldsymbol{K}(t,\tau)\boldsymbol{A}(\tau)\boldsymbol{X}_{-2}d\tau\boldsymbol{K}_0 + \tilde{\boldsymbol{P}}^{-1}(\omega)\int\limits_0^\omega \boldsymbol{A}(\tau)\boldsymbol{X}_{-2}\boldsymbol{K}_1(\tau)d\tau\boldsymbol{K}_0^{-2} - \tilde{\boldsymbol{P}}^{-1}(\omega)\int\limits_0^\omega \tilde{\boldsymbol{A}}(\tau)\boldsymbol{F}(\tau)d\tau\boldsymbol{K}_0^{-1},$$

$$\boldsymbol{X}_0(t) = \int\limits_0^\omega \boldsymbol{K}(t,\tau)(\boldsymbol{A}(\tau)\boldsymbol{X}_{-1}(\tau)\boldsymbol{K}_0 + \boldsymbol{F}(\tau))d\tau -$$

$$-\tilde{\boldsymbol{P}}^{-1}(\omega)\int\limits_0^\omega \boldsymbol{P}(\tau)\boldsymbol{X}_{-2}\boldsymbol{K}_1(\tau)d\tau\boldsymbol{K}_0^{-1} + \tilde{\boldsymbol{P}}^{-1}(\omega)\int\limits_0^\omega \boldsymbol{A}(\tau)\boldsymbol{X}_{-1}(\tau)\boldsymbol{K}_1(\tau)d\tau\boldsymbol{K}_0^{-2},$$

$$\boldsymbol{X}_k(t) = \int\limits_0^\omega \boldsymbol{K}(t,\tau)\boldsymbol{A}(\tau)(\boldsymbol{X}_{k-1}(\tau)\boldsymbol{K}_0 + \boldsymbol{X}_{k-3}(\tau)\boldsymbol{K}_1(\tau))d\tau -$$

$$-\tilde{\boldsymbol{P}}^{-1}(\omega)\int\limits_0^\omega \boldsymbol{P}(\tau)\boldsymbol{X}_{k-2}(\tau)\boldsymbol{K}_1(\tau)d\tau\boldsymbol{K}_0^{-1} + \tilde{\boldsymbol{P}}^{-1}(\omega)\int\limits_0^\omega \boldsymbol{A}(\tau)\boldsymbol{X}_{k-1}(\tau)\boldsymbol{K}_1(\tau)d\tau\boldsymbol{K}_0^{-2}, \quad k=1,2,\ldots \tag{13}$$

Докажем равномерную по $t \in \boldsymbol{R}$ сходимость ряда (6). Поскольку $\|\tilde{\boldsymbol{A}}(\tau)\| \leq \alpha\tau$, то $\|\tilde{\boldsymbol{P}}(\tau)\| \leq \leq \alpha^2\tau^2/2$, $\|\tilde{\boldsymbol{P}}(\omega) - \tilde{\boldsymbol{P}}(\tau)\| \leq \alpha^2(\omega^2 - \tau^2)/2$. Тогда $\max\limits_{0 \leq t \leq \omega} \int_0^\omega \|\boldsymbol{K}(t,\tau)\| d\tau \leq 3^{-1}\gamma\alpha^2\omega^3$. Выполним оценки по норме в (13):

$$\|\boldsymbol{X}_k(t)\| \leq \int\limits_0^\omega \|\boldsymbol{K}(t,\tau)\| \|\boldsymbol{A}(\tau)\| (\|\boldsymbol{X}_{k-1}(\tau)\| \|\boldsymbol{K}_0\| + \|\boldsymbol{X}_{k-3}(\tau)\| \|\boldsymbol{K}_1(\tau)\|) d\tau +$$

$$+\|\tilde{\boldsymbol{P}}^{-1}(\omega)\| \int\limits_0^\omega \|\boldsymbol{P}(\tau)\| \|\boldsymbol{X}_{k-2}(\tau)\| \|\boldsymbol{K}_1(\tau)\| d\tau \|\boldsymbol{K}_0^{-1}\| + \|\tilde{\boldsymbol{P}}^{-1}(\omega)\| \int\limits_0^\omega \|\boldsymbol{A}(\tau)\| \|\boldsymbol{X}_{k-1}(\tau)\| \|\boldsymbol{K}_1(\tau)\| d\tau \|\boldsymbol{K}_0^{-2}\| \leq$$

$$\leq 3^{-1}\gamma\alpha^3\omega^3(\beta_0\|\boldsymbol{X}_{k-1}\|_C + \beta_1\|\boldsymbol{X}_{k-3}\|_C) + 2^{-1}\gamma r\alpha^2\omega^2\beta_1\|\boldsymbol{X}_{k-2}\|_C + \gamma\alpha\omega\beta_1 r^2\|\boldsymbol{X}_{k-1}\|_C =$$

$$= (3^{-1}\gamma\alpha^3\beta_0\omega^3 + \gamma\alpha\beta_1 r^2\omega)\|\boldsymbol{X}_{k-1}\|_C + 2^{-1}\gamma\alpha^2\beta_1\omega^2 r\|\boldsymbol{X}_{k-2}\|_C + 3^{-1}\gamma\alpha^3\beta_1\omega^3\|\boldsymbol{X}_{k-3}\|_C =$$

$$= q_1\|\boldsymbol{X}_{k-1}\|_C + q_2\|\boldsymbol{X}_{k-2}\|_C + q_3\|\boldsymbol{X}_{k-3}\|_C.$$

Отсюда следует рекуррентная оценка

$$\|\boldsymbol{X}_k\|_C \leq q_1\|\boldsymbol{X}_{k-1}\|_C + q_2\|\boldsymbol{X}_{k-2}\|_C + q_3\|\boldsymbol{X}_{k-3}\|_C, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{14}$$

На основании оценки (14) с помощью приемов, используемых в [3], можно доказать, что ряд (6) сходится равномерно относительно $t \in \boldsymbol{R}$ в λ-области, определяемой условием (5). Тогда, согласно [7, с. 160], сумма $\boldsymbol{X}(t,\lambda)$ этого ряда представляет собой решение уравнения (12). Единственность решения $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}(t,\lambda)$ нетрудно доказать методом от противного, используя условие (5).

Используя оценку (14), имеем следующие оценки:

$$\|\boldsymbol{X}(t,\lambda)\|_C \leq [\varepsilon^{-1}(1 - \varepsilon q_1)\|\boldsymbol{X}_{-1}\|_C + \varepsilon^{-2}(1 - \varepsilon q_1 - \varepsilon^2 q_2)\|\boldsymbol{X}_{-2}\|_C]/(1 - q(\varepsilon)),$$

$$\|\boldsymbol{X}(t,\lambda - \tilde{\boldsymbol{X}}_m(t,\lambda)\|_C \leq \varepsilon^m[\varepsilon q_3\|\boldsymbol{X}_{m-2}\|_C + \varepsilon(q_2 + \varepsilon q_3)\|\boldsymbol{X}_{m-1}\|_C + q(\varepsilon)\|\boldsymbol{X}_m\|_C]/(1 - q(\varepsilon)), \quad m = 0, 1, \ldots,$$

где $\tilde{\boldsymbol{X}}_m(t,\lambda) = \sum_{k=-2}^m \lambda^k \boldsymbol{X}_k(t)$, $\boldsymbol{X}_{-2}(t) \equiv \boldsymbol{X}_{-2}$.

Замечание. Параметр λ в уравнении (1) может быть комплексным. Тогда по изложенной методике получим комплекснозначное ω-периодическое решение $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}(t,\lambda)$ этого уравнения в предположениях доказанной теоремы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гребеников Е.А., Рябов Ю.А.* Конструктивные методы анализа нелинейных систем. М., 1979.
2. *Зубов В.И.* Теория колебаний. М., 1979.
3. *Лаптинский В.Н.* Конструктивный анализ управляемых колебательных систем. Минск, 1998.
4. *Самойленко А.М., Ронто Н.И.* Численно-аналитические методы исследования периодических решений. Киев, 1976.
5. *Данилович Л.А., Лаптинский В.Н.* // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36. № 2. С. 276–278.
6. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. М., 1967.
7. *Рисс Ф., Секефальви-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу. М., 1954.

Институт прикладной оптики НАН Беларуси,
г. Могилев

Поступила в редакцию
22.04.2002 г.