ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2005, том 41, № 7, с. 994–996

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.927.4

К КОНСТРУКТИВНОМУ АНАЛИЗУ ДВУХТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА

© 2005 г. В. Н. Лаптинский, И. И. Маковецкий

Рассмотрим матричное дифференциальное уравнение

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X + XB(t) + F(t,X), \quad X \in \mathbb{R}^{n\times n}, \tag{1}$$

где $A, B \in \mathbb{C}(I, \mathbb{R}^{n\times n})$, $F \in \mathbb{C}(D_\rho, \mathbb{R}^{n\times n})$, $I = [0, \omega]$, $D_\rho = \{(t,X): \ t \in I, \ \|X\| \le \rho\}$; $\omega, \rho > 0$. Предполагаем, что функция $F(t,X)$ удовлетворяет в D_ρ относительно X условию Липшица с постоянной $L > 0$; $F(t,0) \not\equiv 0$. Это уравнение является обобщением уравнений Ляпунова и Риккати, играющих важную роль в теории и приложениях дифференциальных уравнений [1–5].

Будем исследовать двухточечную краевую задачу для уравнения (1) с условием

$$MX(0) + NX(\omega) = 0, \tag{2}$$

где M, N – вещественные $n \times n$-матрицы.

Задача (1), (2) мало изучена; для области $D = \{(t,X): \ t \in I, \ X \in \mathbb{R}^{n\times n}\}$ качественными методами она рассматривалась в работе [6]. С помощью конструктивных методов [7, гл. 2, 4] периодическая краевая задача для уравнений типа (1) рассматривалась в [8, 9].

В настоящей работе задача (1), (2) исследуется на основе конструктивного метода [7, гл. 1]. Примем следующие обозначения: $\lambda_1 = \max\limits_t \|U(t)\|$, $\lambda_2 = \max\limits_t \|U^{-1}(t)\|$, $\mu_1 = \max\limits_t \|V(t)\|$, $\mu_2 = \max\limits_t \|V^{-1}(t)\|$, $P = U^{-1}(\omega)N^{-1}M$, $Q = -V(\omega)$, $\gamma = \|\Phi^{-1}\|$, $m = \max\{\|P\|, \|Q\|\}$, $h = \max\limits_t \|F(t,0)\|$, $q = \gamma\lambda\mu m\omega L$, $p = \gamma\lambda\mu m\omega h$, $\|X\|_{\mathbb{C}} = \max\limits_t \|X(t)\|$, где $t \in I$, $\lambda = \lambda_1\lambda_2$, $\mu = \mu_1\mu_2$, Φ – линейный оператор, $\Phi X = PX - XQ$, $\|\cdot\|$ – мультипликативная норма матриц, например, любая из норм, приведенных в [10, с. 21], $\mathbb{C} = \mathbb{C}(I, \mathbb{R}^{n\times n})$ – банахово пространство непрерывных $n \times n$-матричных функций, $U(t)$, $V(t)$ – решения уравнений

$$\frac{dU}{dt} = A(t)U, \quad \frac{dV}{dt} = VB(t)$$

соответственно, при этом $U(0) = V(0) = E$, где E – единичная матрица.

Теорема. *Пусть выполнены следующие условия: 1)* $\det N \ne 0$; *2) матрицы P, Q не имеют общих характеристических чисел; 3) $q < 1$; 4) $p/(1-q) \le \rho$.*

Тогда в области D_ρ решение задачи (1), (2) существует и единственно; это решение представимо как предел равномерно сходящейся последовательности матричных функций, определяемых рекуррентным интегральным соотношением.

Доказательство. Следуя подходу, изложенному в [7], на основании условий 1), 2) и [11, с. 207] нетрудно получить матричное интегральное уравнение, эквивалентное задаче (1), (2):

$$X(t) = U(t)\left\{\Phi^{-1}\left[P\int\limits_0^t U^{-1}(\tau)F(\tau, X(\tau))V^{-1}(\tau)\,d\tau + \int\limits_t^\omega U^{-1}(\tau)F(\tau,X(\tau))V^{-1}(\tau)\,d\tau Q\right]\right\}V(t). \tag{3}$$

Для исследования разрешимости уравнения (3) воспользуемся принципом Банаха–Каччиопполи [12, с. 605] сжимающих отображений. Запишем уравнение (3) в операторной форме

$$X = \mathcal{L}(X), \tag{4}$$

где через $\mathcal{L}$ обозначен соответствующий интегральный оператор в (3). Для произвольной матрицы $X(t)$, принадлежащей шару $\|X\|_{\mathbb{C}} \le \rho$, имеем

$$\|\mathcal{L}(X)\| \le \|U(t)\|\,\|\Phi^{-1}\|\left[\|P\|\int\limits_0^t \|U^{-1}(\tau)F(\tau,X(\tau))V^{-1}(\tau)\|\,d\tau + \right.$$

$$+ \int_t^\omega \|U^{-1}(\tau)F(\tau, X(\tau))V^{-1}(\tau)\| \, d\tau \|Q\| \Bigg] \|V(t)\|. \tag{5}$$

Поскольку $\|F(t, X)\| \leq L\|X\| + h$, то, продолжая оценки в (5), с учетом принятых обозначений получаем

$$\|\mathcal{L}(X)\| \leq \lambda_1\mu_1\gamma m\omega\lambda_2\mu_2(L\|X\|_{\mathbb{C}} + h) = \gamma\lambda\mu m\omega(L\|X\|_{\mathbb{C}} + h) \leq q\rho + p \leq q\rho + (1-q)\rho = \rho. \tag{6}$$

Отсюда следует оценка

$$\|\mathcal{L}(X)\|_{\mathbb{C}} \leq \rho. \tag{7}$$

Далее выясним вопрос о сжимаемости оператора $\mathcal{L}$ на шаре $\|X\|_{\mathbb{C}} \leq \rho$. Из (3) имеем для всех X, Y, таких, что $\|X\|_{\mathbb{C}}, \|Y\|_{\mathbb{C}} \leq \rho$:

$$\mathcal{L}(X) - \mathcal{L}(Y) = U(t)\Phi^{-1}\Bigg[P \int_0^t U^{-1}(\tau)(F(\tau, X(\tau)) - F(\tau, Y(\tau)))V^{-1}(\tau)\, d\tau +$$

$$+ \int_t^\omega U^{-1}(\tau)(F(\tau, X(\tau)) - F(\tau, Y(\tau)))V^{-1}(\tau)\, d\tau Q\Bigg] V(t).$$

Выполнив оценки по норме в последнем равенстве, получим неравенство

$$\|\mathcal{L}(X) - \mathcal{L}(Y)\| \leq \gamma\lambda\mu m\omega L\|X - Y\|_{\mathbb{C}} = q\|X - Y\|_{\mathbb{C}},$$

из которого вытекает неравенство

$$\|\mathcal{L}(X) - \mathcal{L}(Y)\|_{\mathbb{C}} \leq q\|X - Y\|_{\mathbb{C}}. \tag{8}$$

Соотношения (7), (8) являются условиями принципа Банаха–Каччиопполи применительно к уравнению (4). На основании этого принципа заключаем, что уравнение (3) однозначно разрешимо в области D_ρ. Стало быть, решение задачи (1), (2) существует и единственно в указанной области.

Для построения решения уравнения (3) воспользуемся классическим методом последовательных приближений (см., например, [12, с. 605]). Имеем

$$X_{k+1}(t) = U(t)\Phi^{-1}\Bigg[P \int_0^t U^{-1}(\tau)F(\tau, X_k(\tau))V^{-1}(\tau)\, d\tau +$$

$$+ \int_t^\omega U^{-1}(\tau)F(\tau, X_k(\tau))V^{-1}(\tau)\, d\tau Q\Bigg] V(t), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{9}$$

где $X_0(t)$ – произвольная матрица класса $\mathbb{C}(I, \mathbb{R}^{n\times n})$, принадлежащая шару $\|X_0\|_{\mathbb{C}} \leq \rho$. Тогда, согласно неравенству (7), $\|X_i\|_{\mathbb{C}} \leq \rho$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Это нетрудно доказать индукцией по k на основании условий 3), 4).

С помощью несложных выкладок можно показать (не используя свойства функции Грина), что все приближения, построенные согласно алгоритму (9), удовлетворяют краевому условию (2).

Используя неравенство (8), получаем рекуррентную оценку

$$\|X_{m+1} - X_m\|_{\mathbb{C}} \leq q\|X_m - X_{m-1}\|_{\mathbb{C}}, \quad m = 1, 2, \ldots \tag{10}$$

На основании условий 3), 4) последовательность $\{X_k(t)\}_0^\infty$ сходится равномерно по $t \in I$ к решению $X(t) \in D_\rho$ уравнения (3). С помощью оценки (10) нетрудно получить оценку, характеризующую скорость сходимости алгоритма (9):

$$\|X_k - X\|_{\mathbb{C}} \leq q^k\|X_1 - X_0\|_{\mathbb{C}}/(1-q), \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

полагая в которой $k = 0$, $X_0 = 0$, имеем

$$\|X\|_{\mathbb{C}} \leq \|X_1\|_{\mathbb{C}}/(1-q). \tag{11}$$

Выведем явную оценку для нормы $\|X\|_{\mathbb{C}}$. Положив $k = 0$, $X_0 = 0$ в равенстве (9) и выполнив последовательно оценки по норме в полученном равенстве, имеем

$$\|X_1(t)\| \le \|U(t)\|\,\|\Phi^{-1}\|\left[\|P\|\int\limits_0^t \|U^{-1}(\tau)F(\tau,0)V^{-1}(\tau)\|\,d\tau + \int\limits_t^\omega \|U^{-1}(\tau)F(\tau,0)V^{-1}(\tau)\|\,d\tau\|Q\|\right]\|V(t)\| \le$$

$$\le \lambda_1\mu_1\gamma m\int\limits_0^\omega \|U^{-1}(\tau)F(\tau,0)V^{-1}(\tau)\|\,d\tau \le \gamma\lambda m\mu\omega h = p.$$

Отсюда следует оценка $\|X_1\|_{\mathbb{C}} \le p$, используя которую, из оценки (11) получаем $\|X\|_{\mathbb{C}} \le p/(1-q) \le \rho$. Далее найдем оценку для нормы $\|X\|_{\mathbb{C}}$ на основании уравнения (3), рассматривая его как тождество для решения $X = X(t)$. Проводя оценки по норме в (3), с учетом (6) последовательно получаем $\|X\|_{\mathbb{C}} \le q\|X\|_{\mathbb{C}} + p$. Отсюда с учетом условия 3) имеем

$$\|X\|_{\mathbb{C}} \le p/(1-q). \tag{12}$$

Легко видеть, что оценка (11) предпочтительнее оценки (12).

Замечание. При дополнительных предположениях о характеристических числах матриц P, Q для оператора Φ^{-1} имеют место различные явные представления (см., например, [13, 14]), на основе которых для $\|\Phi^{-1}\|$ можно получить конструктивные оценки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Зубов В.И.* Лекции по теории управления. М., 1975.
2. *Параев Ю.И.* Уравнения Ляпунова и Риккати. Томск, 1989.
3. *Розо М.* Нелинейные колебания и теория устойчивости. М., 1971.
4. *Ройтенберг Я.Н.* Автоматическое управление. М., 1970.
5. *Калоджеро Ф.* Метод фазовых функций в теории потенциального рассеяния. М., 1972.
6. *Murty K.N., Howell G.W., Sivasundaram S.* // J. of math. anal. and applic. 1992. V. 167. P. 505–515.
7. *Лаптинский В.Н.* Конструктивный анализ управляемых колебательных систем. Минск, 1998.
8. *Елисеенко М.Н., Лаптинский В.Н., Подолян С.В.* // Тр. III конф. “Дифференциальные уравнения и применения”. Руссе, 1987. Ч. 1. С. 123–126.
9. *Лаптинский В.Н.* // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 1997. № 4. С. 14–18.
10. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. М., 1967.
11. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М., 1967.
12. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. М., 1977.
13. *Абдикасова П.А., Валеев К.Г.* // Мат. физика. 1976. Вып. 19. С. 3–10.
14. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. М., 1969.

Институт прикладной оптики НАН Беларуси,
г. Могилев

Поступила в редакцию
25.11.2003 г.