ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1976 МАТЕМАТИКА № 5 (168)

УДК 513.0

А. К. Лапковский, В. Н. Лаптинский

О ГОРИЗОНТАЛЬНЫХ ПУТЯХ И РАЗВЕРТКАХ В ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ

Рассмотрим ${}^1V_4$-пространство-время теории гравитации. Обозначим через $E({}^1V_4)$ главное расслоенное пространство ортонормированных реперов $\{z\}$ над ${}^1V_4$ с канонической проекцией h_E и структурной группой — группой Лоренца L. Расширение структурной группы L до группы Пуанкаре P вводит $\mathscr{E}({}^1V_4)$ — главное расслоенное многообразие, присоединенное к $E({}^1V_4)$.

1. Пусть в ${}^1V_4$ задан непрерывный кусочно дифференцируемый путь $x(\tau)$ отнесенный к параметру $\tau\,(0 \leqslant \tau \leqslant 1)$, а $\Sigma(\tau) = [x(\tau);\ z(\tau)]$ — соответствующий путь в пространстве $\mathscr{E}({}^1V_4)$. Любой горизонтальный путь $\widetilde{\Sigma}(\tau)$, являющийся подъемом пути $x(\tau)$, можно получить из пути $\Sigma(\tau)$ по правилу $\widetilde{\Sigma}(\tau) = \Sigma(\tau) H^{-1}(\tau)$, где $H(\tau)$ является (см. [1], с. 80) решением дифференциальной системы

$$H^{-1}dH/d\tau = \pi_\Sigma(d\Sigma/d\tau), \tag{1}$$

где $\pi_\Sigma(d\Sigma)$ есть значение формы аффинной связности π для вектора $d\Sigma$.

С помощью решения $H(\tau)$ можно развернуть путь $\Sigma(\tau)$ на аффинное касательное пространство T_{x_0} по правилу

$$\mathring{\Sigma}(\tau) = \Sigma(0)\,H(\tau),\quad \mathring{\Sigma} = [\mathring{x}(\tau);\ \mathring{z}(\tau)].$$

С путем $\mathring{\Sigma}(\tau)$ будем в дальнейшем связывать или наблюдателя, или частицу.

Если выбрать условия нормирования как $(e_\alpha,\ e_\beta) = \operatorname{diag}(c^2,\ -1,\ -1,\ -1)$, $\alpha,\ \beta = 0,\ 1,\ 2,\ 3$, то систему (1) можно представить в виде следующих соотношений:

$$\begin{gathered}\gamma\, c^2 d\mathring{t} - \gamma\,(\boldsymbol{v},\ d\mathring{\boldsymbol{x}}) = c^2\theta^0,\\ \gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2},\quad v = |\boldsymbol{v}| = \sqrt{(v^1)^2 + (v^2)^2 + (v^3)^2},\end{gathered} \tag{2}$$

$$d\mathring{\boldsymbol{x}} + \{-\gamma d\mathring{t} + (\gamma - 1)(\boldsymbol{v},\ d\mathring{\boldsymbol{x}})/v^2\}\,\boldsymbol{v} = D\vec{\theta}, \tag{3}$$

$$\gamma d\boldsymbol{v} + \gamma(\gamma - 1)\frac{dv}{v}\,\boldsymbol{v} = D(\vec{\Delta\omega}), \tag{4}$$

$$\begin{bmatrix} d\lambda_0 \\ d\lambda_1 \\ d\lambda_2 \\ d\lambda_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -\omega_2^3 - \delta\varphi^1 & \omega_1^3 - \delta\varphi^2 & -\omega_1^2 - \delta\varphi^3 \\ \omega_2^3 + \delta\varphi^1 & 0 & \omega_1^2 - \delta\varphi^3 & \omega_1^3 + \delta\varphi^2 \\ -\omega_1^3 + \delta\varphi^2 & -\omega_1^2 - \delta\varphi^3 & 0 & \omega_2^3 - \delta\varphi^1 \\ \omega_1^2 + \delta\varphi^3 & -\omega_1^3 - \delta\varphi^2 & -\omega_2^3 + \delta\varphi^1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} \tag{5}$$

Здесь 4-вектор $\{\overset{\circ}{t}, \overset{\circ}{\boldsymbol{x}}\}$, $\overset{\circ}{\boldsymbol{x}} = \{\overset{\circ}{x}{}^1, \overset{\circ}{x}{}^2, \overset{\circ}{x}{}^3\}$, характеризует трансляцию в T_{x_0}; 3-вектор $\boldsymbol{v} = c\ \mathrm{th}\, uu/u$, $u = \sqrt{(u^1)^2 + (u^2)^2 + (u^3)^2}$, задает гиперболическое вращение в T_{x_0}; параметры Родрига — Гамильтона $\{\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ определяют некоторый пространственный поворот D; дифференциальные формы θ^0, θ^a, ω_0^b, ω_2^3, $-\omega_1^3$, ω_1^2; $a, b = 1, 2, 3$, соответствуют матрице формы связности $\pi_\Sigma(d\Sigma)$; наконец, $\delta\varphi^a$ — компоненты вектора $\vec{\delta\varphi} = \dfrac{\gamma - 1}{v^2}\, d\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v}$. При этом векторы $D\vec{\theta}$, $D(\vec{\Delta\omega})$ получаются линейным преобразованием D из векторов $\vec{\theta} = \{\theta^1, \theta^2, \theta^3\}$, $\vec{\Delta\omega} = \{\omega_0^1, \omega_0^2, \omega_0^3\}$.

2. Соотношения (2) — (5) позволяют придать форме θ^0 и векторнозначным формам $\vec{\theta}$, $\vec{\Delta\omega}$, $\vec{\Delta\Omega} = \{\omega_2^3, -\omega_1^3, \omega_1^2\}$ определенный кинематический смысл.

I. По своей физической природе выделяются пути, соответствующие временноподобным мировым линиям. Фиксируем один из них — $x(\tau)$. Выбирая вектор e_0 касательным к $x(\tau)$, имеем $\vec{\theta} = 0$. Тогда $\theta^0 = d\overset{\circ}{t}\left(1 - \dfrac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}$, а значит θ^0 есть интервал собственного времени на развертке $\overset{\circ}{x}(\tau)$.

II. В общем случае из (2), (3) получаем

$$\frac{D\vec{\theta}}{\theta^0} = \left[\frac{d\overset{\circ}{\boldsymbol{x}}}{d\overset{\circ}{t}} + \left\{-\gamma + \frac{(\gamma-1)}{v^2}\left(\boldsymbol{v}, \frac{d\overset{\circ}{\boldsymbol{x}}}{d\overset{\circ}{t}}\right)\right\}\boldsymbol{v}\right] \Big/ \left\{\gamma - \gamma\left(\boldsymbol{v}, \frac{d\overset{\circ}{\boldsymbol{x}}}{d\overset{\circ}{t}}\right)\Big/ c^2\right\}. \tag{6}$$

Значит, величину $D\vec{\theta}/\theta^0$ можно интерпретировать как скорость частицы, движущейся по развернутому пути $\overset{\circ}{x}(\tau)$ в системе, имеющей скорость $\boldsymbol{v}$.

III. Для истолкования формы $\vec{\Delta\omega}$ рассмотрим инерциальную, мгновенно сопутствующую наблюдателю $\overset{\circ}{x}$ систему $\overset{*}{\Sigma}_{\overset{\circ}{x}}$ и такую же систему $\overset{*}{\Sigma}_{\overset{\circ}{x}+d\overset{\circ}{x}}$ для положения $\overset{\circ}{x} + d\overset{\circ}{x}$. Системы $\overset{*}{\Sigma}_{\overset{\circ}{x}}$, $\overset{*}{\Sigma}_{\overset{\circ}{x}+d\overset{\circ}{x}}$ имеют относительно $\overset{\circ}{\Sigma}(0)$ скорости соответственно $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{v} + d\boldsymbol{v}$. Тогда из (4) следует, что векторнозначная форма $D(\Delta\omega)$ определяет скорость системы $\overset{*}{\Sigma}_{\overset{\circ}{x}+d\overset{\circ}{x}}$ относительно $\overset{*}{\Sigma}_{\overset{\circ}{x}}$. Величина отношения $D(\Delta\omega/\theta^0)$ означает ускорение частицы $\overset{\circ}{x}(\tau)$ в собственной системе отсчета.

IV. Трудности релятивистского вращения вызваны тем (см. [2], § 13), что физический смысл угловой скорости становится менее отчетливым: в нее „запутывается" орбитальная скорость частицы посредством прецессии Томаса. Угловая скорость последней (с точки зрения неподвижного наблюдателя $\overset{\circ}{\Sigma}(0)$) равна $\vec{\delta\varphi}/d\overset{\circ}{t}$ (см. [3], с. 297). Уравнения (5) как раз и дают ту зависимость, которая существует между инфинитезимальным вектором углового вращения $\vec{\delta\varphi}$ прецессии Томаса, бесконечно малым 3-вращением D (с параметрами $d\lambda_0, \ldots, d\lambda_3$) и результирующим пространственным вращением галилеевой системы отсчета (г. с. о.) $\overset{\circ}{\Sigma}_{\overset{\circ}{x}+d\overset{\circ}{x}}$ относительно $\overset{\circ}{\Sigma}_{\overset{\circ}{x}}$, задаваемым аксиальным вектором $\Delta\overline{\Omega}$.

Отметим, что рассмотренный в этом пункте вопрос для случая СТО изучен в [9].

3. Если развертываемый путь $\Sigma_{x(\tau)}$ таков, что г. с. о. $\overset{\circ}{\Sigma}_{\overset{\circ}{x}(\tau)}$ движется относительно $\overset{\circ}{\Sigma}(0)$ с некоторой скоростью $\boldsymbol{v}$ без дополнительных поворотов декартовых триад, то в (3), (4) следует считать D тождественным. Если к тому же метрика G — поля пространства гравитации ${}^1V_4$, ортогональная, т. е. $\theta^0 = c\sqrt{g_{00}}dx^0$, $\theta^a/dx^a = \sqrt{-g_{aa}}$, $a = 1, 2, 3$, то формулы (2), (3) приводят к специальным дифференциальным преобразованиям, рассмотренным впервые в [4] и играющим важную роль в методе неинтегрируемых преобразований в ОТО (см. [5] — [8]). Однако метод получения этих преобразований, рассмотренный в [4] и состоящий в сравнении галилеевой квадратичной формы специальной теории относительности с некоторой римановой метрикой при ее предельном переходе, не позволяет вывести полной совокупности соотношений (2) — (5).

Авторы выражают искреннюю благодарность участникам семинара, руководимого проф. А. Е. Левашовым, за полезное обсуждение результатов настоящей статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лихнерович А. Теория связностей в целом и группы голономий. М., ИИЛ, 1960.
2. Смородинский Я. А. Кинематика столкновений в геометрическом изложении. В сб. «Вопр. физики элементарных частиц». Ереван, 1963, с. 242—271.
3. Смородинский Я. А. Геометрия Лобачевского и кинематика Эйнштейна. Эйнштейновский сборник, 1971. М., «Наука», 1972, с. 272—300.
4. Кирия В. С. Обобщение преобразований Лоренца при наличии гравитационного поля. В сб. «Пробл. гравитации», Тбилиси, 1965, с. 46—51.
5. Кирия В. С. О преобразовании скорости и ускорения в общей теории относительности. Сообщ. АН ГрузССР, т. 13, № 2, 1966, с. 321—326.
6. Иваницкая О. С. О некоторых дифференциальных преобразованиях в общей теории относительности. ИАН БССР. Сер. физ-мат. н., № 4, 1966, с. 113—116.
7. Петрова Н. М., Кучина Т. М. К вопросу о тензоре упругих натяжений в ОТО. В сб. «Гравитация и теория относительн.» Вып. 9, Изд. Казанск. ун-та, 1973, с. 33—37.
8. Мирианашвили М. М., Кирия В. С., Гобеджишвили М. С. О некоторых применениях неинтегрируемых преобразований в общей теории относительности. В сб. «Пробл. гравитации», Тбилиси, 1965, с. 14—17.
9. Лапковский А. К., Лаптинский В. Н. Прецессия Томаса и релятивистское обобщение кинематических формул Эйлера. ИАН БССР. Сер. физ.-мат. н., № 4, 1974, с. 113—114.

г. Могилев

Поступила
5 X 1973