

МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Технологии металлов»

МЕХАНИКА МАТЕРИАЛОВ И КОНСТРУКЦИЙ

*Методические рекомендации к практическим занятиям
для студентов специальности
1-36 11 01 «Инновационная техника для строительного
комплекса (по направлениям)»
очной формы обучения*



Могилев 2023

УДК 539.3/6
ББК 305.1212
М55(64)

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Технологии металлов» «03» апреля 2023 г.,
протокол № 11

Составитель канд. техн. наук, доц. И. А. Леонович

Рецензент канд. техн. наук, доц. Е. В. Ильюшина

Методические рекомендации составлены в соответствии с учебной программой дисциплины «Механика материалов и конструкций» для студентов специальности 1-36 11 01 «Инновационная техника для строительного комплекса (по направлениям)» очной формы обучения, содержат материал для проведения практических занятий в весеннем семестре.

Учебное издание

МЕХАНИКА МАТЕРИАЛОВ И КОНСТРУКЦИЙ

Ответственный за выпуск	Д. И. Якубович
Корректор	И. В. Голубцова
Компьютерная верстка	Е. В. Ковалевская

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 36 экз. Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение:
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 07.03.2019.
Пр-т Мира, 43, 212022, г. Могилев.

© Белорусско-Российский
университет, 2023

Содержание

Введение.....	4
1 Косой изгиб.....	5
2 Совместное действие изгиба и кручения.....	8
3 Внецентренное растяжение-сжатие брусьев большой жесткости.....	12
4 Интеграл Мора.....	18
5 Способ Верещагина	21
6 Расчет простейших статически неопределимых систем при растяжении-сжатии.....	23
7 Метод сил.....	26
8 Устойчивость продольно сжатых стержней.....	29
9 Расчет толстостенных труб и тонкостенных сосудов.....	34
10 Динамическое действие нагрузок.....	38
11 Расчет на прочность при циклических нагрузках.....	42
12 Основы расчетов за пределами упругости.....	44
Список литературы.....	47

Введение

Цель преподавания дисциплины – сформировать у студентов основные знания и умения по расчету типового элемента конструкций (бруса) на прочность, жесткость и устойчивость, по выбору конструкционных материалов и форм поперечных сечений, обеспечивающих требуемые показатели надежности, безопасности и экономичности сооружений.

Студенты специальности 1-36 11 01 «Инновационная техника для строительного комплекса» изучают дисциплину «Механика материалов и конструкций» на протяжении 3-го и 4-го семестров. Методические рекомендации выполнены в объеме практических занятий 4-го семестра.

По каждой теме практических занятий в методических рекомендациях приводится один или более примеров с подробным решением. Далее следуют вопросы для самопроверки в форме тестовых заданий.

Методические рекомендации помогут сформировать у студентов компетенцию: БПК-6. Выбирать формы элементов конструкций, работающих в сложных эксплуатационных условиях под действием статических и динамических нагрузок с учетом температурного воздействия и длительности эксплуатации, сравнивать варианты исполнения и по заданным параметрам получать оптимальное решение.

Перед практическим занятием студентам предлагается изучить материал темы по конспекту лекций и рекомендуемой литературе [1–11], разобрать решение приведенных типовых примеров и проработать материал для самопроверки.

1 Косой изгиб

Пример 1 – Стальная балка двутаврового поперечного сечения находится под действием нагрузки, приложенной в вертикальной и горизонтальной плоскостях (рисунок 1.1). Проверить прочность балки.

Дано: двутавр № 40 ($W_x = 953 \text{ см}^3$; $W_y = 86,1 \text{ см}^3$); $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.

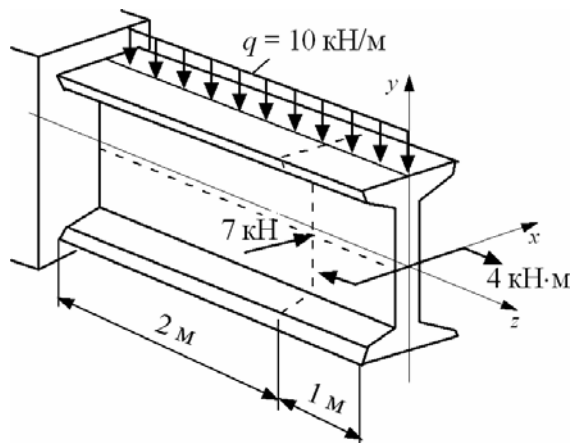


Рисунок 1.1

Решение

Составим расчетные схемы для построения эпюр изгибающих моментов (рисунок 1.2).

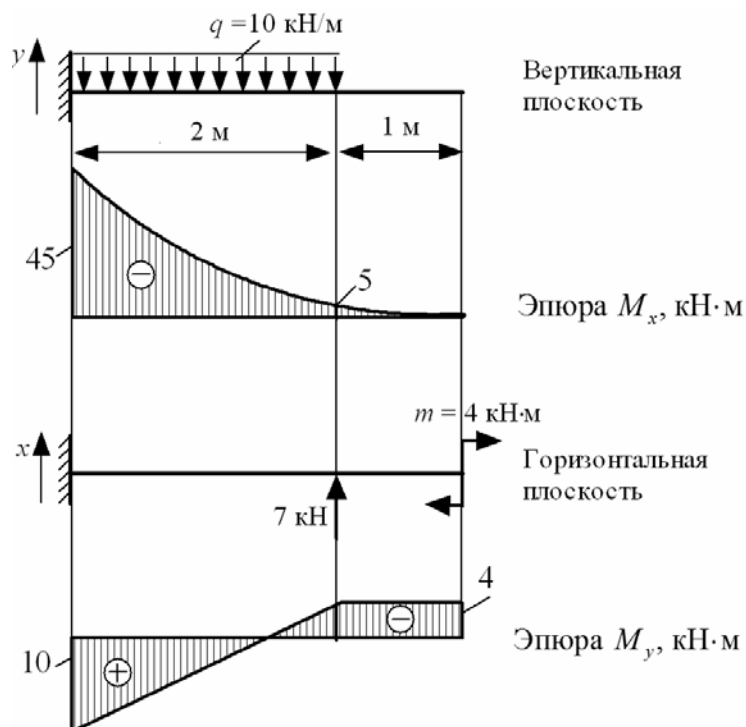


Рисунок 1.2

Вертикальные силы изгибают балку в вертикальной плоскости, создавая момент M_x . Горизонтальные силы изгибают балку в горизонтальной плоскости, создавая момент M_y . Проверку прочности производим в сечении, примыкающем к жесткой заделке, в котором изгибающие моменты сочетаются в наиболее неблагоприятном сочетании: $M_x = 45 \text{ кН}\cdot\text{м}$; $M_y = 10 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

Условие прочности при косом изгибе

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma];$$

$$\sigma_{\max} = \frac{45 \cdot 10^3}{953 \cdot 10^{-6}} + \frac{10 \cdot 10^3}{86,1 \cdot 10^{-6}} = 163,3 \cdot 10^6 \text{ Па} > [\sigma] = 160 \text{ МПа}.$$

Перегрузка составила:

$$\delta = \frac{\sigma_{\max} - [\sigma]}{[\sigma]} \cdot 100 \% = \frac{163,3 - 160}{160} \cdot 100 \% = 2 \% < 5 \%,$$

что допустимо.

Вывод: так как условие прочности выполняется, то прочность балки обеспечена.

Пример 2 – Деревянная балка прямоугольного поперечного сечения находится под действием нагрузки, приложенной в вертикальной и горизонтальной плоскостях (рисунок 1.3). Определить минимальные размеры поперечного сечения (b_{\min}), если $[\sigma] = 10 \text{ МПа}$.

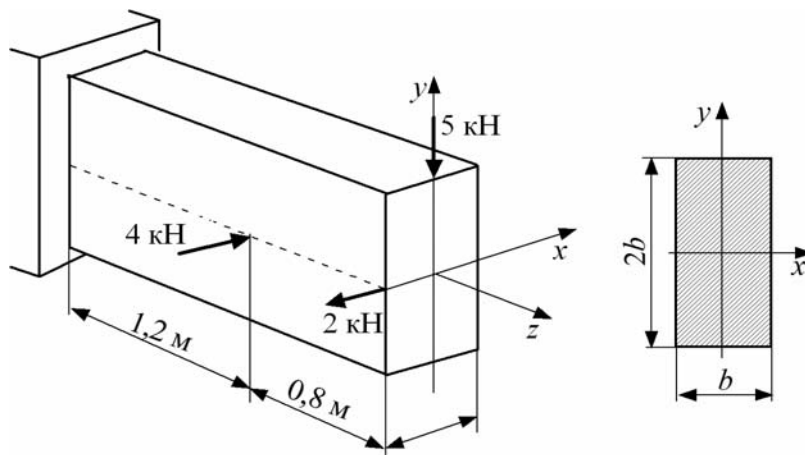


Рисунок 1.3

Решение

Составим расчетные схемы для построения эпюр изгибающих моментов. От силы, действующей в вертикальной плоскости, строим эпюру изгибающих

моментов M_x . От силы, действующей в горизонтальной плоскости, строим эпюру изгибающих моментов M_y (рисунок 1.4).

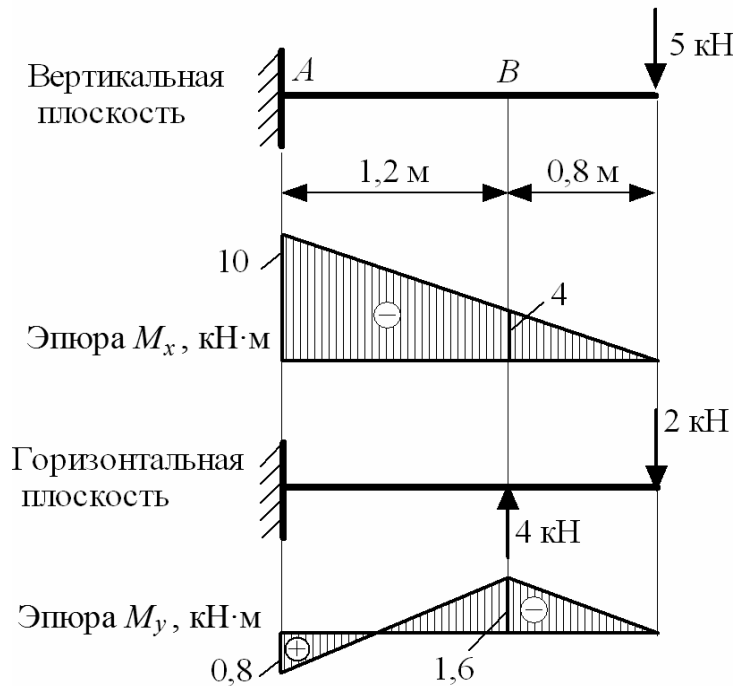


Рисунок 1.4

Осевые моменты сопротивления прямоугольного сечения выразим через размер b :

$$W_x = \frac{b \cdot (2b)^2}{6} = \frac{2 \cdot b^3}{3}; \quad W_y = \frac{2b \cdot b^2}{6} = \frac{b^3}{3}.$$

Определим, какие напряжения действуют в характерных сечениях балки:

$$\sigma_A = \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 3}{2 \cdot b^3} + \frac{0,8 \cdot 10^3 \cdot 3}{b^3} = \frac{17,4 \cdot 10^3}{b^3};$$

$$\sigma_B = \frac{4 \cdot 10^3 \cdot 3}{2 \cdot b^3} + \frac{1,6 \cdot 10^3 \cdot 3}{b^3} = \frac{10,8 \cdot 10^3}{b^3}.$$

Условие прочности составим для опасного сечения A :

$$\sigma_{\max} = \sigma_A = \frac{17,4 \cdot 10^3}{b^3} = [\sigma] = 10 \cdot 10^6 \text{ Па.}$$

Определим размер b_{\min} :

$$b_{\min} = \sqrt[3]{\frac{17,4 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^6}} = 0,12 \text{ м} = 120 \text{ мм.}$$

Вывод: для заданной балки следует использовать деревянный брус с минимальными размерами 120×240 мм.

Тестовые вопросы для самопроверки

1 При косом изгибе нулевая линия:

- а) перпендикулярна плоскости суммарного изгибающего момента;
- б) перпендикулярна плоскости суммарного прогиба;
- в) совпадает с плоскостью суммарного изгибающего момента;
- г) совпадает с плоскостью суммарного прогиба.

2 По какой формуле определяются максимальные напряжения при косом изгибе для сечений, которые вписываются в прямоугольник:

$$\text{а) } \sigma_{\max} = \frac{M_x}{I_x} + \frac{M_y}{I_y}; \quad \text{б) } \tau_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x}; \quad \text{в) } \sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y}; \quad \text{г) } \sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x}.$$

3 Для каких поперечных сечений косой изгиб невозможен:

- а) двутавр и прямоугольник;
- б) квадрат и равносторонний треугольник;
- в) швеллер и равнобедренный треугольник;
- г) равнополочный уголок.

2 Совместное действие изгиба и кручения

Пример 1 – На вал круглого сплошного сечения диаметром $d = 68$ мм насажены шестерня средним диаметром $D_1 = 0,23$ м и шкив ременной передачи диаметром $D_2 = 0,39$ м и весом $G = 0,6$ кН (рисунок 2.1, а). Вал делает 1000 об/мин и передает мощность 62,8 кВт. Допускаемое напряжение материала вала $[\tau] = 80$ МПа. Проверить прочность вала в опасном сечении по четвертой теории прочности.

Решение

Внешние крутящие моменты, передаваемые валом через шестерню и шкив,

$$m_1 = m_2 = \frac{N \cdot 30}{\pi \cdot n} = \frac{62,8 \cdot 30}{3,14 \cdot 1000} = 0,6 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Схема действия крутящих моментов и эпюра $M_{кр}$ показаны на рисунке 2.1, б.

Окружное усилие F_1 , действующее на шестерню и вал в вертикальной плоскости,

$$F_1 = \frac{2 \cdot m_1}{D_1} = \frac{2 \cdot 0,6}{0,23} = 5,2 \text{ кН}.$$

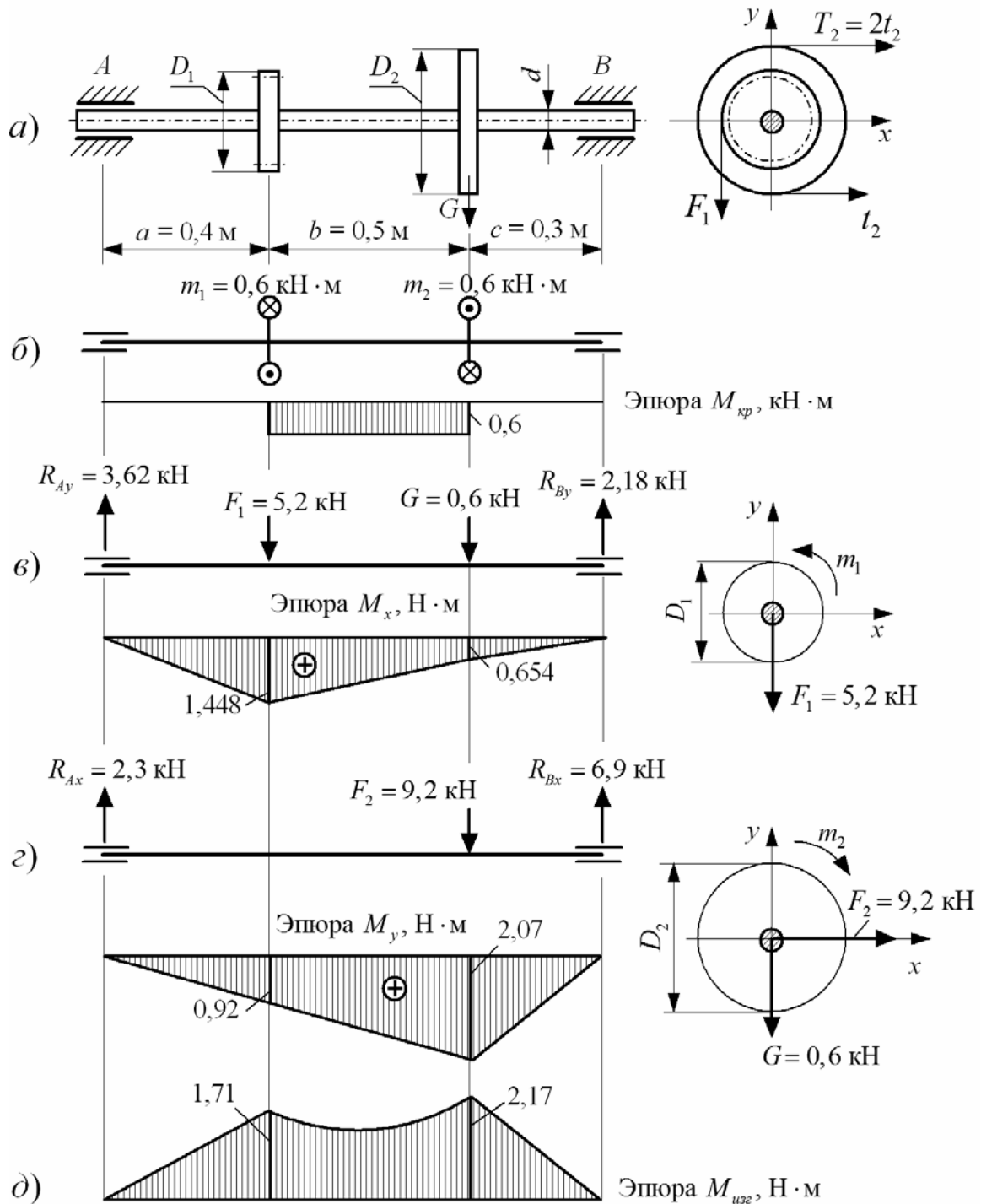


Рисунок 2.1

Изгибающая сила F_2 от ременной передачи на шкиве, действующая на вал в горизонтальной плоскости,

$$F_2 = 3 \cdot \frac{2 \cdot m_2}{D_2} = 3 \cdot \frac{2 \cdot 0,6}{0,39} = 9,2 \text{ кН.}$$

Схема действия изгибающих сил в вертикальной плоскости показана на рисунке 2.1, в. Опорные реакции R_{Ay} и R_{By} определены из уравнений статического

равновесия вала. Ниже схемы показана эпюра изгибающих моментов M_x .

Схема действия изгибающих сил в горизонтальной плоскости показана на рисунке 2.1, з. Опорные реакции R_{Ax} и R_{Bx} определены из уравнений статического равновесия вала. Ниже схемы показана эпюра изгибающих моментов M_y .

Значения суммарных изгибающих моментов $M_{изг}$ в характерных сечениях вала определим по формуле

$$M_{изг} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}.$$

$$M_A = 0; \quad M_B = 0.$$

$$M_{D_1} = \sqrt{1,448^2 + 0,92^2} = 1,71 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{D_2} = \sqrt{0,654^2 + 2,07^2} = 2,17 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

По эпюре полных изгибающих моментов $M_{изг}$ (рисунок 2.1, д) и эпюре крутящих моментов $M_{кр}$ (см. рисунок 2.1, б) определим опасное сечение вала, в котором действуют наибольший изгибающий момент $M_{изг} = 2,17 \text{ кН} \cdot \text{м}$ и крутящий момент $M_{кр} = 0,6 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

Значение эквивалентного момента в опасном сечении, согласно четвертой теории прочности,

$$M_{эkv}^{IV} = \sqrt{M_{изг}^2 + 0,75 \cdot M_{кр}^2} = \sqrt{2,17^2 + 0,75 \cdot 0,6^2} = 2,19 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Осейвой момент сопротивления вала

$$W_x = \frac{\pi \cdot d^3}{32} = \frac{3,14 \cdot 6,8^3}{32} = 30,85 \text{ МПа}.$$

Проверка прочности:

$$\sigma_{эkv} = \frac{M_{эkv}^{IV}}{W_x} = \frac{2,19 \cdot 10^3}{30,85 \cdot 10^{-6}} = 71 \cdot 10^6 \text{ Па} = 71 \text{ МПа} < [\tau] = 80 \text{ МПа}.$$

Условие прочности выполняется.

Пример 2 – Рассчитать минимальный диаметр стального вала, на который насажены две шестерни средним диаметром $D_1 = 0,16 \text{ м}$ и $D_2 = 0,25 \text{ м}$ по третьей теории прочности (рисунок 2.2, а). Вал вращается с угловой скоростью $\omega = 50 \text{ рад/с}$ и передает мощность 20 кВт . Допускаемое напряжение материала вала $[\tau] = 90 \text{ МПа}$.

Решение

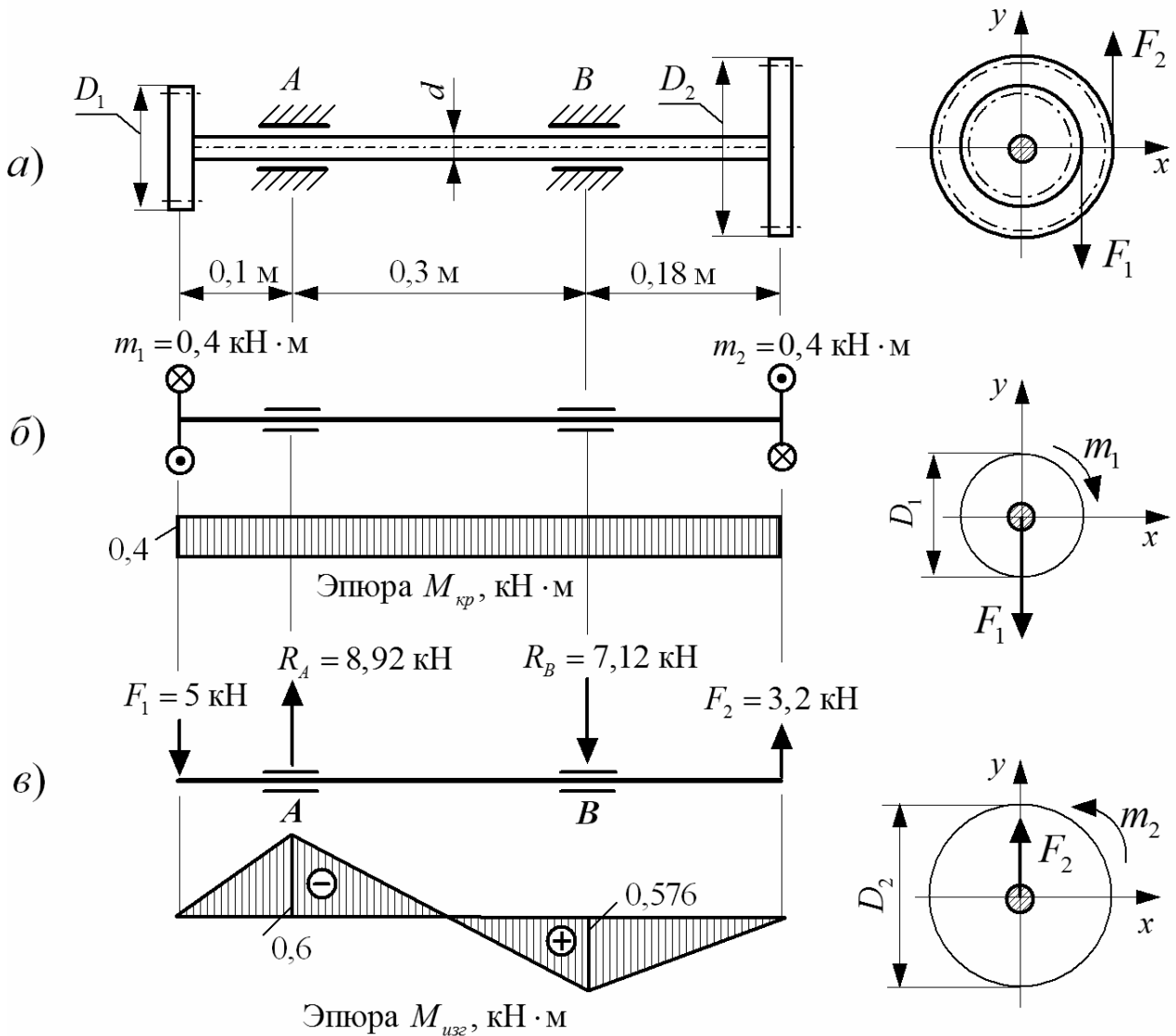


Рисунок 2.2

Решение

Внешние крутящие моменты, передаваемые валом через шестерни,

$$m_1 = m_2 = \frac{N}{\omega} = \frac{20}{50} = 0,4 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Схема действия крутящих моментов и эпюра $M_{кр}$ показаны на рисунке 2.2, б.

Окружные усилия, действующее на шестерни в вертикальной плоскости,

$$F_1 = \frac{2 \cdot m_1}{D_1} = \frac{2 \cdot 0,4}{0,16} = 5 \text{ кН}; \quad F_2 = \frac{2 \cdot m_2}{D_2} = \frac{2 \cdot 0,4}{0,25} = 3,2 \text{ кН}.$$

Схема действия изгибающих сил показана на рисунке 2.2, в. Опорные реакции R_A и R_B определены из уравнений статического равновесия вала. Ниже схемы показана эпюра изгибающих моментов $M_{изг}$.

Значение эквивалентного момента в опасном сечении, согласно третьей теории прочности,

$$M_{экв}^{IV} = \sqrt{M_{изг}^2 + M_{кр}^2} = \sqrt{0,6^2 + 0,4^2} = 0,72 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Диаметр вала

$$d_{\min} = \sqrt[3]{\frac{32M_{экв}}{\pi[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 0,72 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 90 \cdot 10^6}} = 0,043 \text{ м} = 43 \text{ мм}.$$

Тестовые вопросы для самопроверки

1 Какая теория прочности применяется для расчета стальных валов на совместное действие изгиба и кручения:

- а) $\sigma_{экв} = \sigma_1 - \mu \cdot (\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma]$; в) $\sigma_{экв} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]$;
 б) $\sigma_{экв} = \sigma_1 - \kappa \cdot \sigma_3 \leq [\sigma]$; г) $\sigma_{экв} = \sigma_1 \leq [\sigma]$.

2 Как определить эквивалентный момент по третьей теории прочности:

- а) $M_{экв} = \sqrt{M_{изг}^2 + M_{кр}^2}$; в) $M_{экв} = \sqrt{M_{изг}^2 + 0,75 \cdot M_{кр}^2}$;
 б) $M_{экв} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$; г) $M_{экв} = \sqrt{M_{кр}^2 + 0,75 \cdot M_{изг}^2}$.

3 Как определить суммарный изгибающий момент:

- а) $M_{изг} = \sqrt{M_x + M_y}$; в) $M_{изг} = \sqrt{M_x \cdot M_y}$;
 б) $M_{изг} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$; г) $M_{изг} = M_x + M_y$.

3 Внецентренное растяжение-сжатие брусьев большой жесткости

Пример 1 – Проверить прочность бетонной колонны, если $F = 7$ кН, $[\sigma]_{раст} = 0,6$ МПа, $[\sigma]_{сж} = 6$ МПа (рисунок 3.1, а).

Решение

Определим геометрические характеристики поперечного сечения колонны.

Площадь $A = 20 \cdot 18 = 360 \text{ см}^2$.

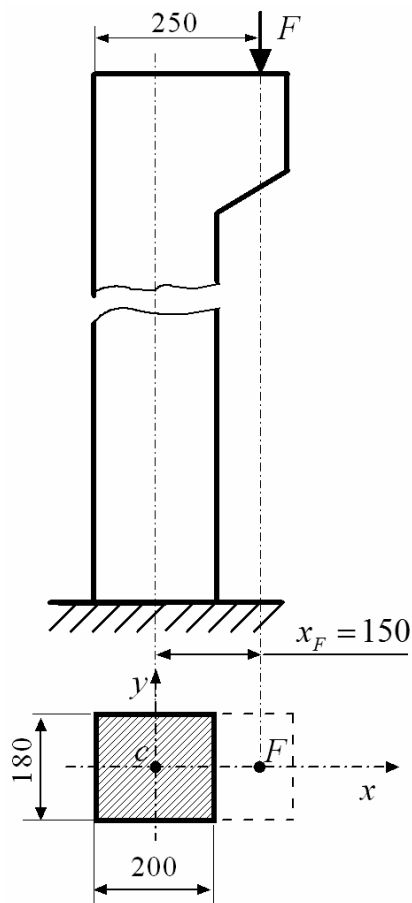
Координаты точки приложения силы следующие: $x_F = 15 \text{ см}$; $y_F = 0$.

Положение нейтральной оси определяется по величине отрезков, которые она отсекает на осях координат (рисунок 3.1, б):

$$X_0 = -\frac{i_y^2}{x_F} = -\frac{33,3}{15} = -2,2 \text{ см};$$

$$Y_0 = -\frac{i_x^2}{y_F} = -\frac{27}{0} = -\infty.$$

а)



б)

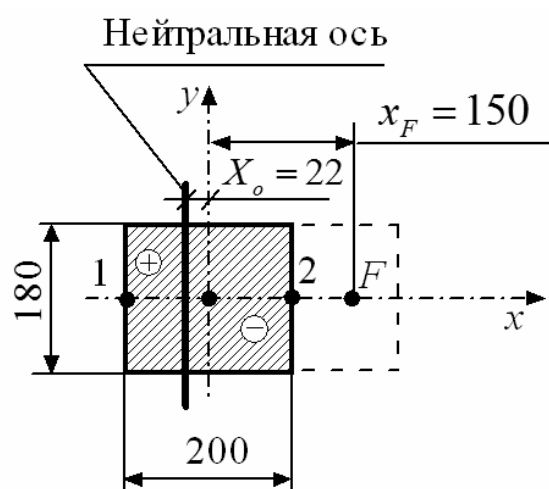


Рисунок 3.1

Нейтральная ось разделила колонну на две части. Определим координаты *опасных точек*.

В *растянутой области* из самых дальних от нейтральной оси точек на ребре выделим любую, например точку 1: $x_1 = -10 \text{ см}$; $y_1 = 0$.

В *сжатой области* из самых дальних от нейтральной оси точек на ребре выделим любую, например точку 2: $x_2 = 10 \text{ см}$; $y_2 = 0$.

Проверим прочность колонны по условию

$$\sigma_{\max} = -\frac{F}{A} \cdot \left(1 + \frac{x_F \cdot x_{on}}{i_y^2} + \frac{y_F \cdot y_{on}}{i_x^2} \right) \leq [\sigma],$$

где x_{on}, y_{on} – координаты опасных точек поперечного сечения.

Проверка прочности в растянутой области (точка 1):

$$\sigma_{\max}^{раст} = \sigma_1 = -\frac{7 \cdot 10^3}{360 \cdot 10^{-4}} \cdot \left(1 + \frac{15 \cdot (-10)}{33,3} + 0\right) = 0,68 \cdot 10^6 \text{ Па} = 0,68 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{\max}^{раст} = 0,68 \text{ МПа} > [\sigma]_{раст} = 0,6 \text{ МПа}.$$

Перегрузка составила:

$$\delta = \frac{\sigma_{\max} - [\sigma]}{[\sigma]} \cdot 100 \% = \frac{0,68 - 0,6}{0,6} \cdot 100 \% = 13,3 \% > 5 \%,$$

что недопустимо.

Проверка прочности в сжатой области (точка 2):

$$\sigma_{\max}^{сж} = \sigma_1 = -\frac{7 \cdot 10^3}{360 \cdot 10^{-4}} \cdot \left(1 + \frac{15 \cdot (10)}{33,3} + 0\right) = -1,07 \cdot 10^6 \text{ Па} = -1,07 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{\max}^{сж} = 1,07 \text{ МПа} < [\sigma]_{сж} = 6 \text{ МПа}.$$

Вывод: так как условие прочности на растяжение не выполняется, то прочность колонны не обеспечена.

Пример 2 – Определить минимальный диаметр стального стержня, к которому приложена растягивающая сила $F = 30 \text{ кН}$ (рисунок 3.2), если допустимое напряжение материала $[\sigma] = 180 \text{ МПа}$.

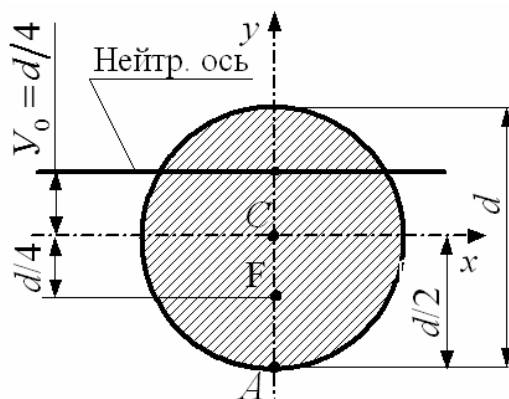


Рисунок 3.2

Решение

Площадь поперечного сечения стержня $A = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = 0,785 \cdot d^2$.

Квадрат радиуса инерции $i_x^2 = i_y^2 = d^2/16$.

Координаты точки приложения силы следующие: $x_F = 0$; $y_F = -d/4$.

Отрезки, которые отсекает нейтральная линия на осях координат,

$$X_0 = -\frac{i_y^2}{x_F} = -\frac{d^2/16}{0} = -\infty;$$

$$Y_0 = -\frac{i_x^2}{y_F} = -\frac{d^2/16}{-d/4} = \frac{d}{4}.$$

Опасной является точка A как самая удаленная точка от нейтральной оси (см. рисунок 3.2). Ее координаты следующие: $x_A = 0$; $y_A = -d/2$.

Определим минимальный диаметр стержня из условия прочности:

$$\sigma_{\max} = \frac{F}{A} \cdot \left(1 + \frac{x_F \cdot x_A}{i_y^2} + \frac{y_F \cdot y_A}{i_x^2} \right) \leq [\sigma];$$

$$\sigma_{\max} = \frac{F}{A} \cdot \left(1 + \frac{0 \cdot 0}{d^2/16} + \frac{(-d/4) \cdot (-d/2)}{d^2/16} \right) = \frac{F}{0,785 \cdot d^2} \cdot 3 = [\sigma];$$

$$d \geq \sqrt{\frac{F \cdot 3}{[\sigma] \cdot 0,785}} = \sqrt{\frac{30 \cdot 10^3 \cdot 3}{180 \cdot 10^6 \cdot 0,785}} = 0,025 \text{ м} = 25 \text{ мм}.$$

Пример 3 – Определить допустимую сжимающую силу для чугунного стержня коробчатого поперечного сечения (рисунок 3.3), если допустимое напряжение материала $[\sigma]_{\text{раст}} = 60$ МПа, $[\sigma]_{\text{сж}} = 150$ МПа. Построить ядро сечения. Размеры на рисунке 3.3 показаны в миллиметрах.

Решение

Площадь поперечного сечения $A = 12 \cdot 9 - 6 \cdot 9 = 54 \text{ см}^2$.

Осевые моменты инерции

$$I_x = \frac{12 \cdot 9^3}{12} - \frac{9 \cdot 6^3}{12} = 567 \text{ см}^4; \quad I_y = \frac{9 \cdot 12^3}{12} - \frac{6 \cdot 9^3}{12} = 931,5 \text{ см}^4.$$

Квадраты радиусов инерции

$$i_x^2 = \frac{I_x}{A} = \frac{567}{54} = 10,5 \text{ см}^2; \quad i_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{931,5}{54} = 17,25 \text{ см}^2.$$

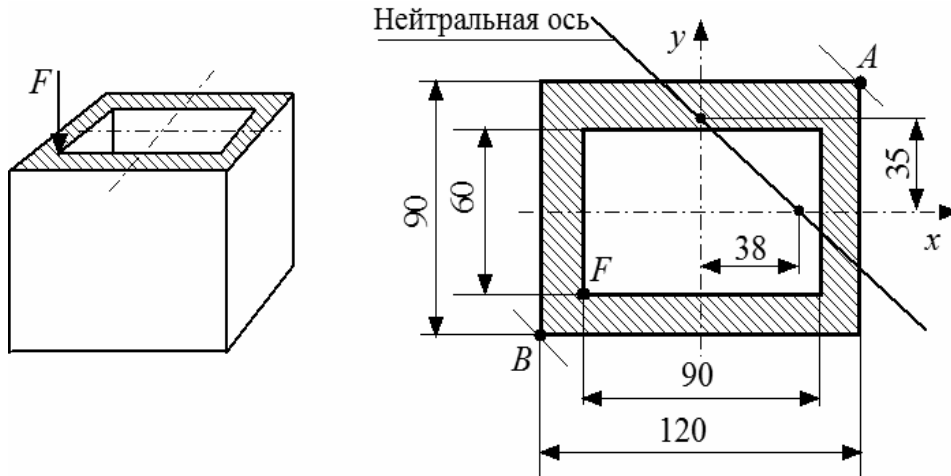


Рисунок 3.3

Координаты точки приложения силы следующие: $x_F = -4,5$ см; $y_F = -3$ см.

Положение нейтральной оси определим по величине отрезков, которые она отсекает на осях координат (см. рисунок 3.3):

$$X_0 = -\frac{i_y^2}{x_F} = -\frac{17,25}{-4,5} = 3,8 \text{ см};$$

$$Y_0 = -\frac{i_x^2}{y_F} = -\frac{10,5}{-3} = 3,5 \text{ см}.$$

Нейтральная ось разделила колонну на две части.

В *растянутой области* составим условие прочности для опасной точки A с координатами $x_A = 6$ см; $y_A = 4,5$ см:

$$\sigma_{\max}^{раст} = \sigma_A = -\frac{F}{A} \cdot \left(1 + \frac{(-4,5) \cdot 6}{17,25} + \frac{(-3) \cdot 4,5}{10,5} \right) = -\frac{F \cdot (-1,85)}{A} \leq [\sigma]_{раст} = 60 \text{ МПа}.$$

Откуда допустимая сила

$$F \leq \frac{A \cdot [\sigma]_{раст}}{1,85} = \frac{54 \cdot 10^{-4} \cdot 60 \cdot 10^6}{1,85} = 175 \cdot 10^3 \text{ Н} = 175 \text{ кН}.$$

В *сжатой области* составим условие прочности для опасной точки B с координатами $x_B = -6$ см; $y_B = -4,5$ см:

$$\sigma_{\max}^{сж} = \sigma_B = -\frac{F}{A} \cdot \left(1 + \frac{(-4,5) \cdot (-6)}{17,25} + \frac{(-3) \cdot (-4,5)}{10,5} \right) = -\frac{F \cdot 3,85}{A} \leq [\sigma]_{сж} = -150 \text{ МПа}.$$

Откуда допустимая сила

$$F \leq \frac{A \cdot [\sigma]_{\text{сжс}}}{3,85} = \frac{54 \cdot 10^{-4} \cdot 150 \cdot 10^6}{3,85} = 210 \cdot 10^3 \text{ Н} = 210 \text{ кН}.$$

Допустимой для всего стержня будет меньшая из рассчитанных сил: $[F] = 175 \text{ кН}$.

Для построения ядра сечения нужно провести касательные линии к контуру сечения (рисунок 3.4) и определить координаты угловых точек ядра по следующим формулам:

$$x_{\text{я}} = -\frac{i_y^2}{X_0}; \quad y_{\text{я}} = -\frac{i_x^2}{Y_0}.$$

Касательная 1–1: $X_0 = -6 \text{ см}; Y_0 = \infty$.

$$\text{Точка 1: } x_1 = -\frac{i_y^2}{X_0} = -\frac{17,25}{-6} = 2,9 \text{ см}; \quad y_1 = -\frac{i_x^2}{Y_0} = -\frac{10,5}{\infty} = 0.$$

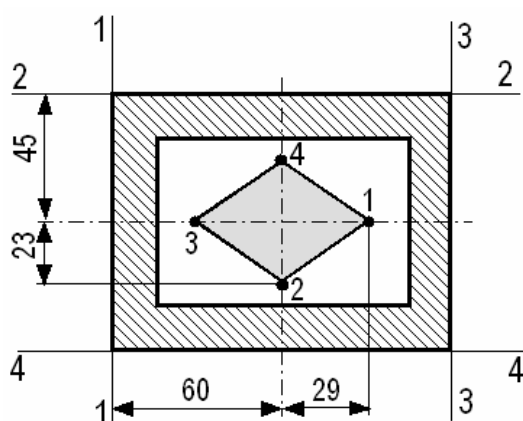


Рисунок 3.4

Касательная 2–2: $X_0 = \infty; Y_0 = 4,5 \text{ см}$.

$$\text{Точка 2: } x_2 = -\frac{i_y^2}{X_0} = -\frac{17,25}{\infty} = 0; \quad y_2 = -\frac{i_x^2}{Y_0} = -\frac{10,5}{4,5} = -2,3 \text{ см}.$$

Касательная 3–3: $X_0 = 6 \text{ см}; Y_0 = \infty$.

$$\text{Точка 3: } x_3 = -\frac{i_y^2}{X_0} = -\frac{17,25}{6} = -2,9 \text{ см}; \quad y_3 = -\frac{i_x^2}{Y_0} = -\frac{10,5}{\infty} = 0.$$

Касательная 4–4: $X_0 = \infty$; $Y_0 = -4,5$ см.

$$\text{Точка 4: } x_4 = -\frac{i_y^2}{X_0} = -\frac{17,25}{\infty} = 0; \quad y_4 = -\frac{i_x^2}{Y_0} = -\frac{10,5}{-4,5} = 2,3 \text{ см.}$$

Найденные точки соединяются прямыми линиями (см. рисунок 3.4).

Тестовые вопросы для самопроверки

1 Какие внутренние силовые факторы возникают в поперечных сечениях бруса при внецентренном растяжении или сжатии:

- а) продольная сила и поперечная сила;
- б) только продольная сила;
- в) только изгибающие моменты;
- г) изгибающие моменты и продольная сила.

2 При внецентренном растяжении-сжатии нулевая линия:

- а) проходит через центр тяжести поперечного сечения;
- б) проходит через точку приложения силы;
- в) находится за центром тяжести поперечного сечения напротив силы;
- г) находится между центром тяжести и точкой приложения силы.

3 При внецентренном растяжении-сжатии нормальные напряжения максимальны:

- а) в точке, наиболее удаленной от приложенной силы;
- б) в точке, наиболее удаленной от нулевой линии;
- в) в точке приложения силы;
- г) в центре поперечного сечения.

4 Какой закон распределения нормальных напряжений в поперечном сечении бруса при внецентренном растяжении-сжатии:

- а) постоянный;
- б) гиперболический;
- в) параболический;
- г) линейный.

4 Интеграл Мора

Пример – Для балки с постоянной жесткостью поперечного сечения EI_x (рисунок 4.1, а) определить прогиб и угол поворота в точке С. Задачу решить с помощью интеграла Мора.

Решение

Для определения заданных перемещений воспользуемся формулой Мора, применяемой для стержней, испытывающих преимущественный изгиб:

$$\Delta_i = \sum_{l=1}^n \int \frac{M_p(z) \cdot \bar{M}_1(z) \cdot dz}{EI_x},$$

где $M_p(z)$ – функция изгибающего момента от заданной внешней нагрузки;
 $\bar{M}_1(z)$ – функция изгибающего момента от единичной нагрузки;

EI_x – жесткость балки при изгибе.

Вертикальные реакции в шарнирах A и B для заданной системы (см. рисунок 4.1, a) определены из уравнений статического равновесия.

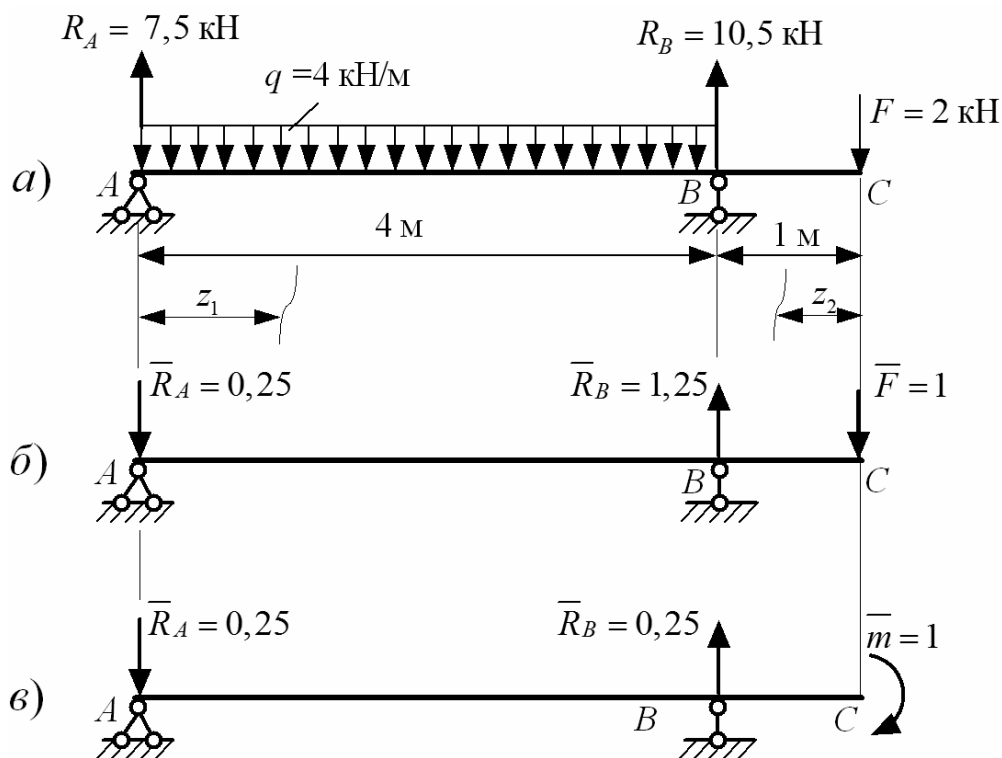


Рисунок 4.1

Для расчета прогиба в точке C составим вспомогательную систему, в которой приложим в точке C единичную силу и определим реакции на опорах (рисунок 4.1, b). Заданная и вспомогательная системы делятся на два участка, для которых функции изгибающих моментов равны:

1 участок (AB): $0 \leq z_1 \leq 4$ м:

$$M_p(z) = 7,5z_1 - 0,5 \cdot 4z_1^2; \quad \bar{M}_1(z) = -0,25z_1;$$

2 участок (CB): $0 \leq z_2 \leq 1$ м:

$$M_p(z) = -2z_2; \quad \bar{M}_1(z) = -1z_2.$$

Вычисляем прогиб u_C в долях от жесткости поперечного сечения:

$$EI_x y_C = \int_0^4 (7,5z_1 - 0,5 \cdot 4z_1^2)(-0,25z_1) dz_1 + \int_0^1 (-2z_2)(-1z_2) dz_2 =$$

$$= \left(-\frac{1,875z_1^3}{3} + \frac{0,5z_1^4}{4} \right)_0^4 + \left(\frac{2z_2^3}{3} \right)_0^1 = -40 + 32 + \frac{2}{3} = -\frac{22}{3} \text{ кН} \cdot \text{м}^3.$$

$$y_C = -\frac{22}{3EI_x} \text{ кН} \cdot \text{м}^3.$$

Для расчета угла поворота в точке C составим вспомогательную систему, в которой приложим в точке C единичный изгибающий момент и определим реакции на опорах (рисунок 4.1, в). Заданная и вспомогательная системы делятся на два участка, для которых функции изгибающих моментов равны:

1 участок (AB): $0 \leq z_1 \leq 4$ м:

$$M_p(z) = 7,5z_1 - 0,5 \cdot 4z_1^2; \quad \bar{M}_1(z) = -0,25z_1;$$

2 участок (CB): $0 \leq z_2 \leq 1$ м:

$$M_p(z) = -2z_2; \quad \bar{M}_1(z) = -1.$$

Вычисляем угол поворота θ_C в долях от жесткости поперечного сечения:

$$EI_x \theta_C = \int_0^4 (7,5z_1 - 0,5 \cdot 4z_1^2)(-0,25z_1) dz_1 + \int_0^1 (-2z_2)(-1) dz_2 =$$

$$= \left(-\frac{1,875z_1^3}{3} + \frac{0,5z_1^4}{4} \right)_0^4 + \left(\frac{2z_2^2}{2} \right)_0^1 = -40 + 32 + 1 = -7 \text{ кН} \cdot \text{м}^2.$$

$$\theta_C = -\frac{7}{EI_x} \text{ кН} \cdot \text{м}^2.$$

Тестовые вопросы для самопроверки

1 Формула Мора справедлива:

- а) для стержней любой жесткости;
- б) только для прямолинейных стержней;
- в) только для изгиба в балках;
- г) только для стержней постоянного поперечного сечения.

2 Формула Мора не применяется:

- а) для стержней малой кривизны;
- б) для стержней большой кривизны;
- в) для стержней, испытывающих кручение;
- г) для стержней переменного поперечного сечения.

5 Способ Верещагина

Пример – Для балки с постоянной жесткостью поперечного сечения EI_x (рисунок 5.1, а) определить прогиб и угол поворота в точке C . Задачу решить способом Верещагина.

Решение

Перемещение (линейное и угловое) по способу Верещагина определяется по формуле

$$\Delta_i = \sum_{i=1}^n \frac{\omega_p \cdot \bar{y}_C}{EI_x},$$

где n – число участков на балке;

ω_p – площадь грузовой эпюры M_p на участке;

\bar{y}_C – ордината единичной эпюры \bar{M}_C под центром тяжести грузовой на этом же участке;

EI_x – жесткость поперечного сечения на участке.

Воспользуемся вспомогательными системами, построенными для такой же задачи, решенной интегралами Мора (см. рисунок 4.1).

Для заданной и вспомогательных систем построим эпюры изгибающих моментов (рисунок 5.1, б–г).

Для определения прогиба y_C перемножим эпюры M_p и \bar{M}_1 по двум участкам (AB и BC), мысленно разбив грузовую эпюру на составные части (см. рисунок 5.1, б, в).

$$EI_x y_C = -\frac{4 \cdot 4^3}{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = -\frac{32}{3} + \frac{8}{3} + \frac{2}{3} = -\frac{22}{3} \text{ кН} \cdot \text{м}^3.$$

$$y_C = -\frac{22}{3EI_x} \text{ кН} \cdot \text{м}^3.$$

Знак «минус» указывает, что перемещение точки C не совпало с направлением единичной силы. Балка прогнулась вверх, а не вниз, как предполагалось.

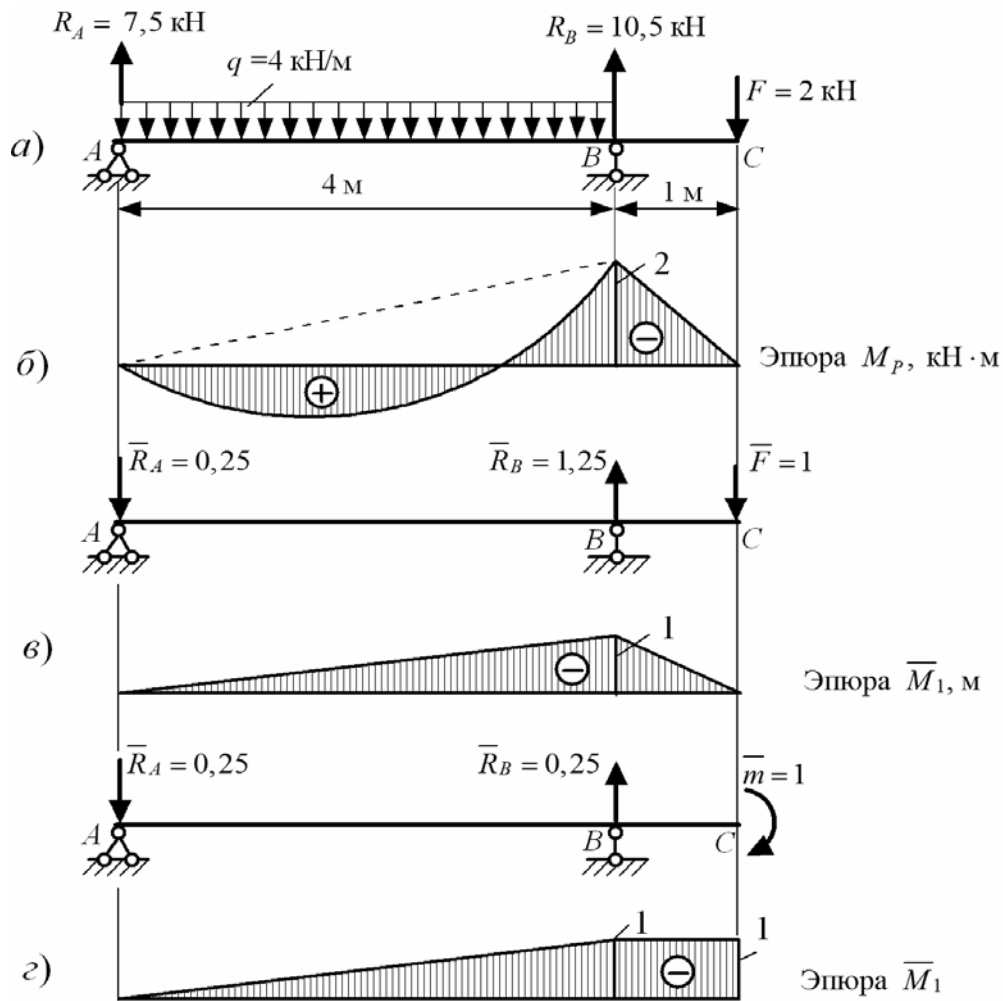


Рисунок 5.1

Для определения угла поворота θ_C перемножим эюры M_P и \bar{M}_1 по двум участкам (AB и BC), мысленно разбив грузовую эюру на составные части (треугольники и сегмент) (см. рисунок 5.1, б, з).

$$EI_x \theta_C = \left(\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2\right) \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 - \left(\frac{4 \cdot 4^3}{12}\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 + \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1\right) \cdot 1 = \frac{8}{3} - \frac{32}{3} + 1 = -7 \text{ кН} \cdot \text{м}^2.$$

$$\theta_C = -\frac{7}{EI_x} \text{ кН} \cdot \text{м}^2.$$

Знак «минус» указывает, что угол поворота точки C не совпал с направлением единичного момента.

Тестовые вопросы для самопроверки

1 Площадь сегмента равна:

а) $\omega = ql^3/12$; б) $\omega = ql^3/6$; в) $\omega = ql^2/12$; г) $\omega = ql^3/2$.

2 Правило Верещагина справедливо:

- а) для стержней большой кривизны;
- б) только для прямолинейных стержней;
- в) для стержней малой кривизны;
- г) только для стержней постоянного поперечного сечения.

3 Для определения угла поворота во вспомогательной системе следует приложить:

- а) единичный крутящий момент;
- б) единичную поперечную силу;
- в) единичную продольную силу;
- г) единичный изгибающий момент.

6 Расчет статически неопределимых систем при растяжении-сжатии

Пример 1 – Проверить прочность ступенчатого стального бруса (рисунок 6.1), если площадь поперечного сечения $A = 3 \text{ см}^2$, модуль упругости $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, допустимое напряжение $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.

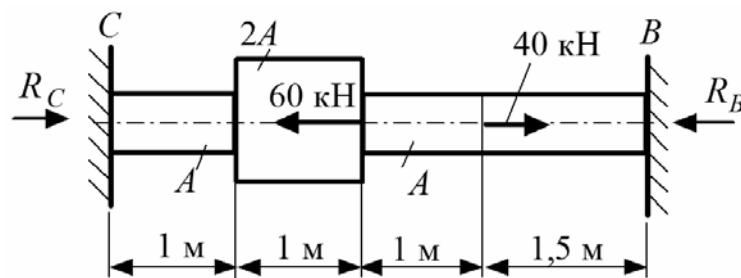


Рисунок 6.1

Решение

Составим уравнение статического равновесия:

$$\sum Z = R_C - 60 + 40 - R_B = 0.$$

Стержень один раз статически неопределим, т. к. единственное уравнение статики содержит две неизвестные реакции, для определения которых необходимо составить дополнительно одно деформационное уравнение:

$$\Delta l = \Delta l_P + \Delta l_R = 0,$$

где Δl_P , Δl_R – деформации стержня соответственно от внешних сил и реакций на опорах.

Используем принцип независимости действия сил. Мысленно отбросим опору C и представим заданный стержень под действием внешних сил с построением грузовой эпюры N_P и под действием реакции R_C с построением эпюры N_R (рисунок 6.2).

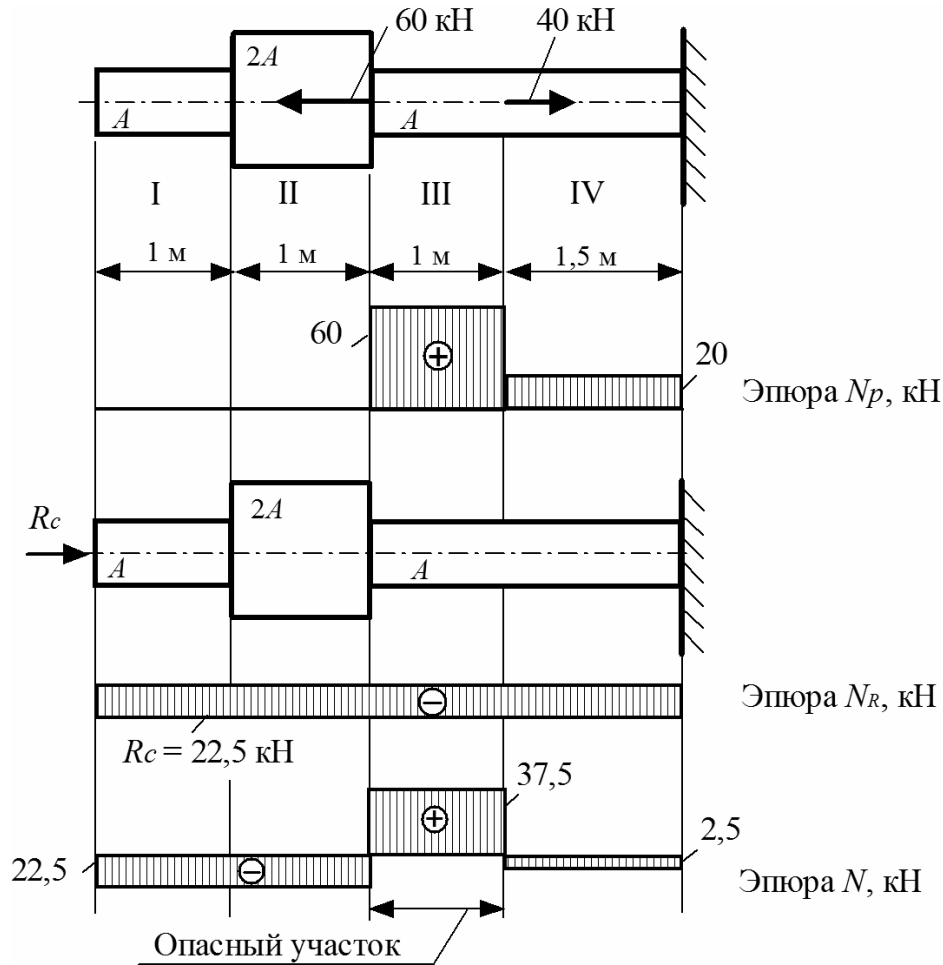


Рисунок 6.2

Выразим абсолютные деформации стержня на каждом участке в долях от жесткости поперечного сечения:

$$\Delta l_P = \sum_{i=1}^4 \frac{N_i \cdot l_i}{E_i \cdot A_i} = 0 + 0 + \frac{60 \cdot 1}{E \cdot A} + \frac{20 \cdot 1,5}{E \cdot A} = \frac{90}{E \cdot A};$$

$$\Delta l_R = \sum_{i=1}^4 \frac{N_i \cdot l_i}{E_i \cdot A_i} = -\frac{R_C \cdot 1}{E \cdot A} - \frac{R_C \cdot 1}{E \cdot 2A} - \frac{R_C \cdot 1}{E \cdot A} - \frac{R_C \cdot 1,5}{E \cdot A} = -\frac{4 \cdot R_C}{E \cdot A}.$$

Решим деформационное уравнение:

$$\Delta l = \frac{90}{E \cdot A} - \frac{4 \cdot R_C}{E \cdot A} = 0, \text{ откуда } R_C = 22,5 \text{ кН.}$$

Окончательную эпюру продольных сил N строим суммированием эпюр N_P и N_R . Производим проверку прочности на опасном участке III.

$$\sigma_{\max} = \left(\frac{N}{A} \right)_{\max} = \frac{37,5 \cdot 10^3}{3 \cdot 10^{-4}} = 125 \cdot 10^6 \text{ Па} = 125 \text{ МПа} < [\sigma] = 160 \text{ МПа}.$$

Прочность бруса обеспечена.

Пример 2 – Определить минимальную площадь поперечного сечения ступенчатого стального бруса (рисунок 6.3), если модуль упругости $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, допустимое напряжение материала $[\sigma] = 180$ МПа.

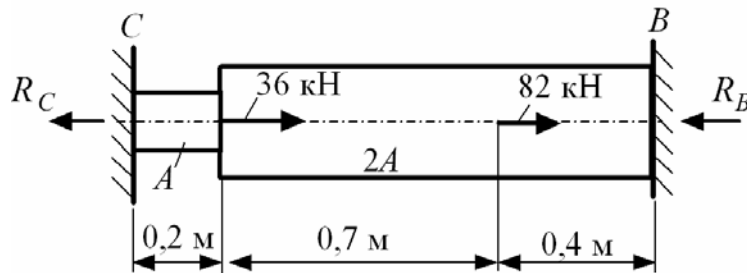


Рисунок 6.3

Решение

Составим уравнение статического равновесия:

$$\sum Z = -R_C + 36 + 82 - R_B = 0.$$

Стержень один раз статически неопределим.

Используем принцип независимости действия сил. Мысленно отбросим опору C и представим заданный стержень под действием внешних сил с построением грузовой эпюры N_P и под действием реакции R_C с построением эпюры N_R (рисунок 6.4).

Выразим абсолютные деформации стержня на каждом участке в долях от жесткости поперечного сечения:

$$\Delta l_P = \sum_{i=1}^4 \frac{N_i \cdot \ell_i}{E_i \cdot A_i} = 0 - \frac{36 \cdot 0,7}{E \cdot 2A} - \frac{118 \cdot 0,4}{E \cdot 2A} = -\frac{36,2}{E \cdot A};$$

$$\Delta l_R = \sum_{i=1}^4 \frac{N_i \cdot \ell_i}{E_i \cdot A_i} = \frac{R_C \cdot 0,2}{E \cdot A} + \frac{R_C \cdot (0,7 + 0,4)}{E \cdot 2A} = \frac{0,75 \cdot R_C}{E \cdot A}.$$

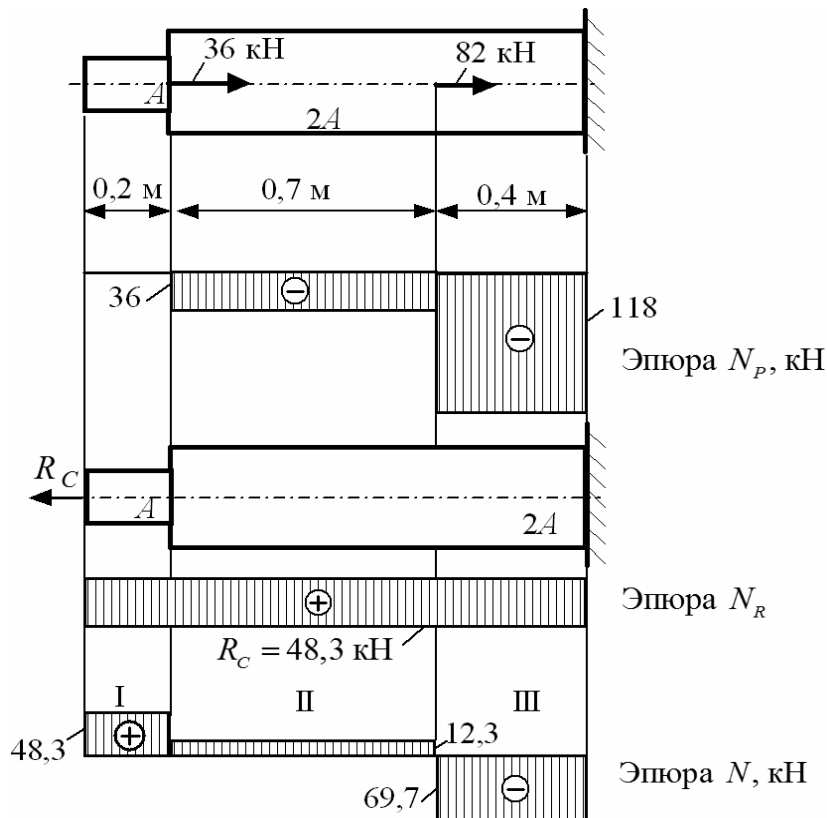


Рисунок 6.4

Решим деформационное уравнение:

$$\Delta l = \Delta l_p + \Delta l_R = -\frac{36,2}{E \cdot A} + \frac{0,75 \cdot R_C}{E \cdot A} = 0, \text{ откуда } R_C = 48,3 \text{ кН.}$$

Окончательную эпюру продольных сил N строим суммированием эпюр N_p и N_R . Определим минимальную площадь поперечного сечения из условия прочности

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{A} \leq [\sigma] = 180 \text{ МПа.}$$

На участке I:

$$\sigma_I = \frac{48,3 \cdot 10^3}{A} = [\sigma] = 180 \cdot 10^6 \text{ Па; } A = \frac{48,3 \cdot 10^3}{180 \cdot 10^6} = 2,68 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

На участке III:

$$\sigma_{III} = \frac{69,7 \cdot 10^3}{2A} = [\sigma] = 180 \cdot 10^6 \text{ Па; } A = \frac{69,7 \cdot 10^3}{2 \cdot 180 \cdot 10^6} = 1,94 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

Более опасным оказался участок I: $A_{\min} = 2,68 \text{ см}^2$.

Тестовые вопросы для самопроверки

1 Сколько независимых уравнений статики можно составить для плоской стержневой системы:

- а) одно; б) два; в) три; г) четыре.

2 Сколько дополнительных деформационных уравнений нужно составить для дважды статически неопределимой стержневой системы:

- а) одно; б) два; в) три; г) четыре.

3 Укажите условие прочности для статически неопределимой системы, работающей на растяжение-сжатие:

- а) $\frac{Q}{A} \leq [\sigma]$; б) $\frac{M}{W} \leq [\sigma]$; в) $\frac{N}{E} \leq [\sigma]$; г) $\frac{N}{A} \leq [\sigma]$.

4 Какое свойство не присуще статически неопределимым системам:

- а) возможность возникновения температурных напряжений;
 б) возможность возникновения монтажных напряжений;
 в) возможность свободного деформирования;
 г) перераспределение внутренних усилий при нарушении одной связи.

7 Метод сил

Пример – Решить статически неопределимую балку (рисунок 7.1) методом сил. Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов.

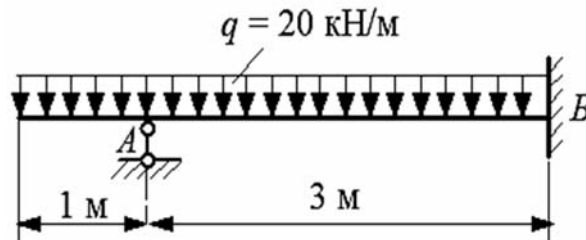


Рисунок 7.1

Решение

Заданная балка один раз статически неопределима, т. е. она имеет одну лишнюю связь. Выбираем основную систему, отбрасывая одну связь, например опору A (рисунок 7.2, a). Составляем эквивалентную систему (рисунок 7.2, b).

Каноническое уравнение метода сил один раз статически неопределимой системы имеет вид:

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \Delta_{1p} = 0.$$

Для определения коэффициентов канонического уравнения строим эпюры изгибающих моментов в грузовой (рисунок 7.2, $в$) и единичной (рисунок 7.2, $г$) системах.

Определяем коэффициент при неизвестной силе X_1 перемножением эшюры \bar{M}_1 на \bar{M}_1 :

$$\delta_{11} = \sum \frac{\bar{\omega}_1 \bar{y}_c}{EI_x} = \frac{1}{EI_x} \left(\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 \right) = \frac{9}{EI_x} \text{ м}^3.$$

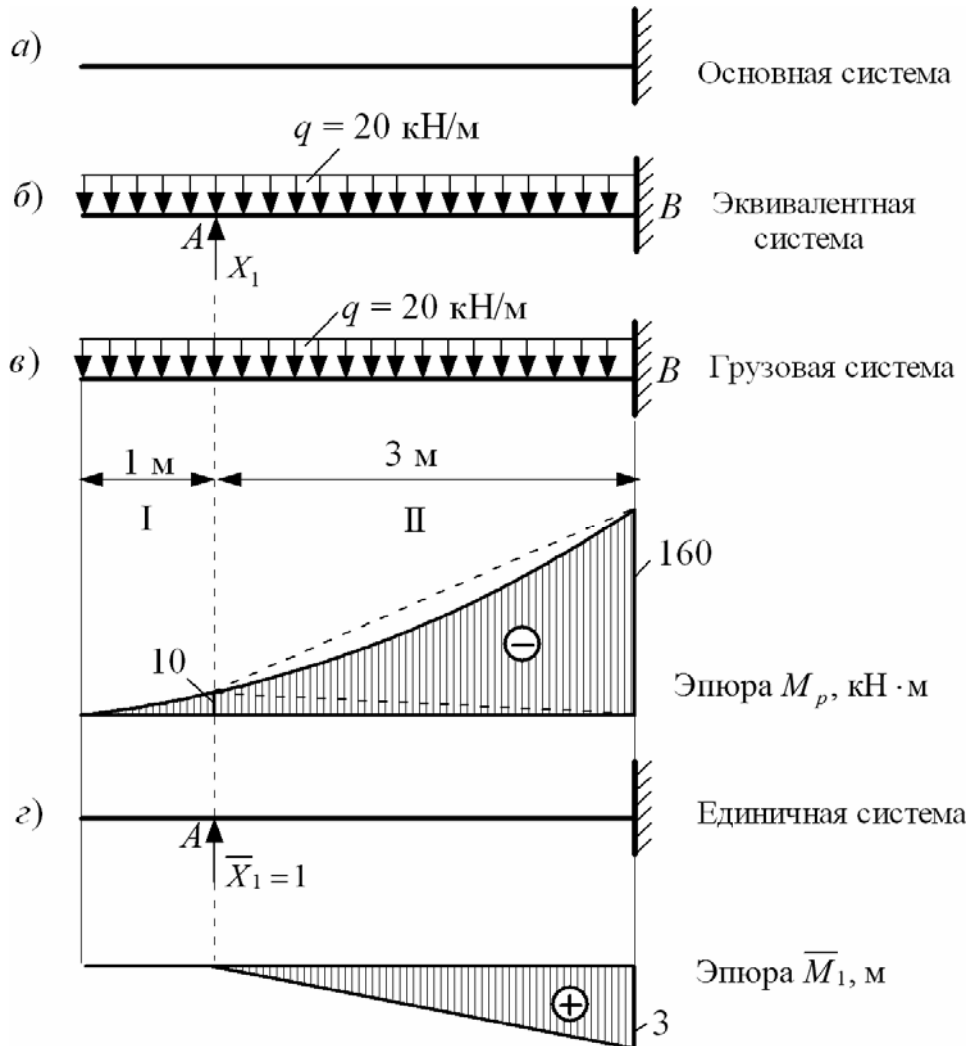


Рисунок 7.2

Определяем свободный коэффициент Δ_{1p} перемножением эшюры M_1 на эшюру M_p :

$$\Delta_{1p} = \sum \frac{\omega_p \bar{y}_c}{EI_x} = \frac{1}{EI_x} \left(-\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot 160 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{20 \cdot 3^3}{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \right) = -\frac{427,5}{EI_x} \text{ кН} \cdot \text{м}^3.$$

Решаем каноническое уравнение:

$$\frac{9}{EI_x} \cdot X_1 - \frac{427,5}{EI_x} = 0; \quad X_1 = R_A = 47,5 \text{ кН}.$$

После определения реакции R_A можно построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов обычным образом (рисунок 7.3).

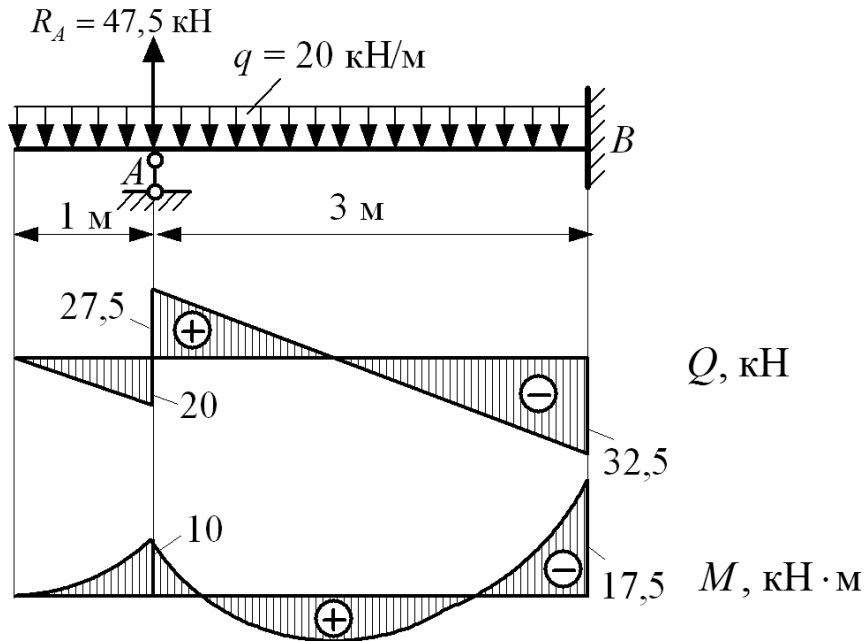
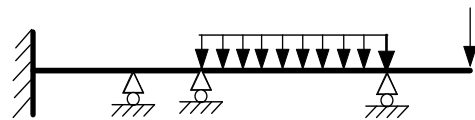


Рисунок 7.3

Тестовые вопросы для самопроверки

1 Сколько раз статически неопределима балка:

- а) один; в) три;
б) два; г) четыре.



2 Основная система получается из заданной системы:

- а) удалением внешней нагрузки;
б) удалением лишних связей;
в) удалением внешней нагрузки и лишних связей;
г) удалением шарнирных закреплений.

3 Сколько канонических уравнений нужно составить для дважды статически неопределимой системы:

- а) один; б) два; в) три; г) четыре.

8 Устойчивость продольно сжатых стержней

Пример 1 (проверочный расчет) – Проверить устойчивость стального стержня (рисунок 8.1), определить его критическую силу $F_{кр}$ и коэффициент запаса устойчивости n_y .

Исходные данные: $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ (Ст3); коэффициент приведения длины $\mu = 0,7$; коэффициенты $a = 310 \text{ МПа}$, $b = 1,14 \text{ МПа}$.

Решение

Площадь сечения $A = 6 \cdot 9 = 54 \text{ см}^2$.

Минимальный осевой момент инерции

$$I_y = I_{\min} = \frac{h \cdot b^3}{12} = \frac{9 \cdot 6^3}{12} = 162 \text{ см}^4.$$

Минимальный радиус инерции

$$i_y = i_{\min} = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{162}{54}} = 1,73 \text{ см}.$$

Максимальная гибкость стержня

$$\lambda_{\max} = \frac{\mu \cdot \ell}{i_{\min}} = \frac{0,7 \cdot 2,4}{1,73 \cdot 10^{-2}} = 97,1.$$

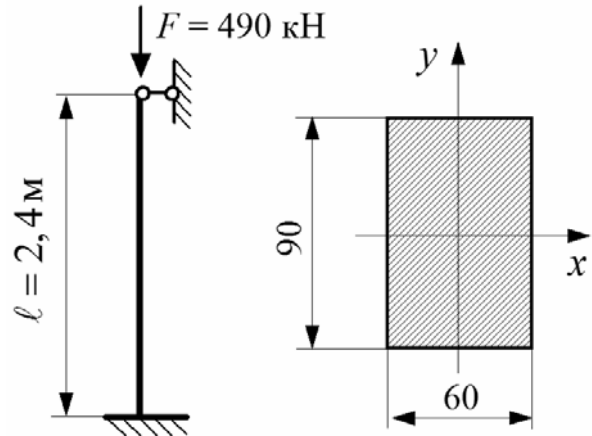


Рисунок 8.1

Определяем коэффициент продольного изгиба φ методом линейной интерполяции, используя данные [2, таблица А.3, Ст3]: при $\lambda = 90$ $\varphi = 0,69$; при $\lambda = 100$ $\varphi = 0,6$.

$$\varphi = 0,69 - \frac{0,69 - 0,6}{100 - 90} \cdot (97,1 - 90) = 0,626.$$

Проверяем устойчивость стержня по формуле

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq \varphi[\sigma];$$

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{490 \cdot 10^3}{54 \cdot 10^{-4}} = 90,74 \cdot 10^6 \text{ Па} = 90,74 \text{ МПа} < \varphi[\sigma] = \\ &= 0,626 \cdot 160 = 100,2 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Критическую силу определяем по формуле Ясинского, т. к. гибкость стержня меньше предельной гибкости для стали ($97,1 < 100$):

$$F_{кр} = (a - b \cdot \lambda) \cdot A = (310 \cdot 10^6 - 1,14 \cdot 10^6 \cdot 97,1) \cdot 54 \cdot 10^{-4} = 1076 \cdot 10^3 \text{ Н}.$$

Коэффициент запаса устойчивости найдем по формуле

$$n_y = \frac{F_{кр}}{F} = \frac{1076}{490} = 2,2.$$

Пример 2 (проектировочный расчет) – Подобрать размеры поперечного сечения стального стержня (рисунок 8.2).

Исходные данные: $[\sigma] = 200$ МПа (сталь 14Г2); коэффициент приведения длины стержня, закрепленного жестко с одной стороны, $\mu = 2$.

Решение

Расчет ведется методом последовательного приближения.

Первое приближение.

Задаёмся начальным коэффициентом продольного изгиба $\varphi_1 = 0,5$.

Из условия устойчивости вычисляем площадь поперечного сечения:

$$A_1 = \frac{F}{\varphi_1[\sigma]} = \frac{400 \cdot 10^3}{0,5 \cdot 200 \cdot 10^6} = 40 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

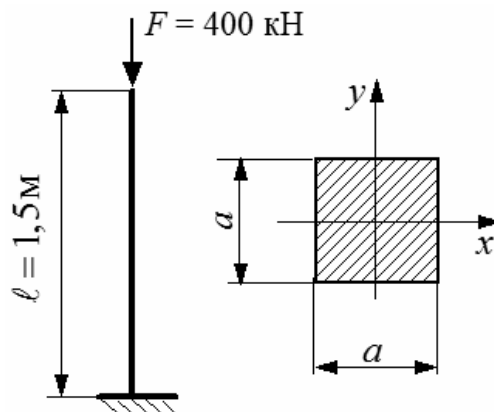


Рисунок 8.2

По найденной площади определяем размеры квадратного поперечного сечения:

$$a_1 = \sqrt{A_1} = \sqrt{40 \cdot 10^{-4}} = 0,063 \text{ м.}$$

Вычисляем минимальный радиус инерции этого поперечного сечения:

$$i_y = i_x = i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{a^4}{12 \cdot a^2}} = \frac{a}{3,46} = \frac{0,063}{3,46} = 0,0182 \text{ м.}$$

Определяем гибкость стержня найденного поперечного сечения:

$$\lambda_1 = \frac{\mu \cdot \ell}{i_{\min}} = \frac{2 \cdot 1,5}{0,0182} = 164,8.$$

Находим коэффициент продольного изгиба, используя данные [2, таблица А.3, сталь 14Г2]: при $\lambda = 160$ $\varphi = 0,21$; при $\lambda = 170$ $\varphi = 0,19$.

$$\varphi'_1 = 0,21 - \frac{0,21 - 0,19}{170 - 160} \cdot (164,8 - 160) = 0,2.$$

Сравниваем начальный и конечный коэффициенты продольного изгиба первого приближения: $\varphi_1' \neq \varphi_1$.

Второе приближение.

Определяем начальный коэффициент продольного изгиба:

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi_1'}{2} = \frac{0,5 + 0,2}{2} = 0,35.$$

Из условия устойчивости вычисляем площадь поперечного сечения:

$$A_2 = \frac{F}{\varphi_2 [\sigma]} = \frac{400 \cdot 10^3}{0,35 \cdot 200 \cdot 10^6} = 57,14 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

По найденной площади определяем размеры квадратного поперечного сечения:

$$a_2 = \sqrt{A_2} = \sqrt{57,14 \cdot 10^{-4}} = 0,076 \text{ м}.$$

Вычисляем минимальный радиус инерции этого поперечного сечения:

$$i_{\min} = \frac{a_2}{3,46} = \frac{0,076}{3,46} = 0,022 \text{ м}.$$

Определяем гибкость стержня найденного поперечного сечения:

$$\lambda_2 = \frac{\mu \cdot \ell}{i_{\min}} = \frac{2 \cdot 1,5}{0,022} = 136,4.$$

Находим коэффициент продольного изгиба [2, таблица А.3, сталь 14Г2]: при $\lambda = 130$ $\varphi = 0,29$; при $\lambda = 140$ $\varphi = 0,25$.

$$\varphi_2' = 0,29 - \frac{0,29 - 0,25}{140 - 130} \cdot (136,4 - 130) = 0,264.$$

Сравниваем начальный и конечный коэффициенты продольного изгиба второго приближения: $\varphi_2' \neq \varphi_2$.

Третье приближение.

Определяем начальный коэффициент продольного изгиба:

$$\varphi_3 = \frac{\varphi_2 + \varphi_2'}{2} = \frac{0,35 + 0,264}{2} = 0,307.$$

Из условия устойчивости вычисляем площадь поперечного сечения:

$$A_3 = \frac{F}{\varphi_3 [\sigma]} = \frac{400 \cdot 10^3}{0,307 \cdot 200 \cdot 10^6} = 65 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

По найденной площади определяем размеры квадратного поперечного сечения:

$$a_3 = \sqrt{A_3} = \sqrt{56,4 \cdot 10^{-4}} = 0,081 \text{ м}.$$

Вычисляем минимальный радиус инерции этого поперечного сечения:

$$i_{\min} = \frac{a_3}{3,46} = \frac{0,081}{3,46} = 0,0234 \text{ м}.$$

Определяем гибкость стержня найденного поперечного сечения:

$$\lambda_3 = \frac{\mu \cdot \ell}{i_{\min}} = \frac{2 \cdot 1,5}{0,0234} = 128,2.$$

Находим коэффициент продольного изгиба [2, таблица А.3, сталь 14Г2]: при $\lambda = 120$ $\varphi = 0,33$; при $\lambda = 130$ $\varphi = 0,29$.

$$\varphi_3' = 0,33 - \frac{0,33 - 0,29}{130 - 120} \cdot (128,2 - 120) = 0,3.$$

Сравниваем начальный и конечный коэффициенты продольного изгиба третьего приближения: $\varphi_3' \approx \varphi_3$.

Принимаем квадратное поперечное сечение стержня со стороной 81 мм.

Пример 3 (определение несущей способности) – Определить допустимое значение сжимающей силы $[F]$ стального стержня двутаврового поперечного сечения (рисунок 8.3), его критическую силу $F_{кр}$ и коэффициент запаса устойчивости n_y .

Исходные данные: коэффициент приведения длины $\mu = 0,5$; допустимое напряжение на сжатие $[\sigma] = 160$ МПа (Ст3); модуль упругости $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

Решение

Площадь и минимальный радиус инерции двутавра № 10 следующие:
 $A = 12 \text{ см}^2$; $i_y = i_{\min} = 1,22 \text{ см}$.

Максимальная гибкость стержня

$$\lambda_{\max} = \frac{\mu \cdot \ell}{i_{\min}} = \frac{0,5 \cdot 4}{1,22 \cdot 10^{-2}} = 163,9.$$

Определим коэффициент продольного изгиба φ методом линейной интерполяции, используя данные [2, таблица А.3, Ст3]: при $\lambda = 160$ $\varphi = 0,29$; при $\lambda = 170$ $\varphi = 0,26$.

$$\varphi = 0,29 - \frac{0,29 - 0,26}{170 - 160} \cdot (163,9 - 160) = 0,278.$$

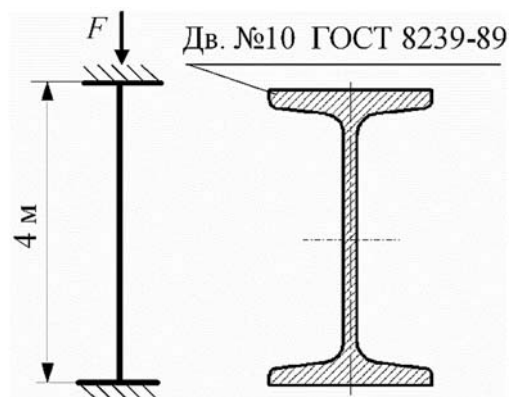


Рисунок 8.3

Из условия устойчивости найдем допустимое значение сжимающей силы:

$$[F] = A\varphi[\sigma] = 12 \cdot 10^{-4} \cdot 0,278 \cdot 160 \cdot 10^6 = 53,4 \cdot 10^3 \text{ Н} = 53,4 \text{ кН}.$$

Критическую силу определяем по формуле Эйлера, т. к. гибкость стержня больше предельной гибкости для стали ($163,9 > 100$):

$$F_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2} \cdot A = \frac{3,14^2 \cdot 2 \cdot 10^{11}}{163,9^2} \cdot 12 \cdot 10^{-4} = 88,1 \cdot 10^3 \text{ Н} = 88,1 \text{ кН}.$$

Коэффициент запаса устойчивости найдем по формуле

$$n_y = \frac{F_{\text{кр}}}{[F]} = \frac{88,1}{53,4} = 1,65.$$

Тестовые вопросы для самопроверки

1 Условие устойчивости:

- | | |
|---|--|
| а) $\sigma = A/F \leq \varphi[\sigma]$; | в) $\sigma = F/A \leq [\sigma]$; |
| б) $\sigma = \varphi F/A \leq [\sigma]$; | г) $\sigma = F/A \leq \varphi[\sigma]$. |

2 Формула Ясинского для стального стержня справедлива при:

- | | |
|-------------------------------|------------------------------|
| а) $0 < \lambda \leq 40$; | в) $40 < \lambda \leq 100$; |
| б) $100 < \lambda \leq 140$; | г) $\lambda \geq 100$. |

3 Формула Эйлера для стального стержня справедлива при:

- а) $0 < \lambda \leq 40$; в) $40 < \lambda \leq 100$;
 б) $80 < \lambda \leq 140$; г) $\lambda \geq 100$.

4 Коэффициент приведения длины μ зависит от:

- а) гибкости стержня; в) величины критической силы;
 б) условий закрепления стержня; г) формы поперечного сечения.

5 Свободная ось составного сечения:

- а) не проходит через центр тяжести поперечного сечения;
 б) является главной центральной осью инерции;
 в) проходит через зазор между отдельными частями составного сечения;
 г) пересекает поперечное сечение по материалу составных частей.

9 Расчет толстостенных труб и тонкостенных сосудов

Пример 1 – Определить, пользуясь третьей теорией прочности (наибольших касательных напряжений), необходимую толщину стенки трубы, наружный радиус которой равен 100 мм. Труба подвержена внутреннему давлению $p_B = 80$ МПа, допустимое напряжение материала $[\sigma] = 200$ МПа.

Решение

Материал толстостенной трубы испытывает плоскую деформацию. Наиболее напряженными являются точки на внутренней поверхности, в которых радиальное и окружное главные напряжения одновременно достигают наибольшей величины. В этих точках окружное напряжение σ_t больше, чем радиальное σ_r , а радиальное – сжимающее и равно внутреннему давлению p_B :

$$\sigma_1 = \sigma_t = p_B \frac{r_H^2 + r_B^2}{r_H^2 - r_B^2}; \quad \sigma_2 = 0; \quad \sigma_3 = \sigma_r = -p_B.$$

Эпюры распределения напряжений показаны на рисунке 9.1.

Условие прочности по теории наибольших касательных напряжений (третья теория прочности) имеет вид:

$$\sigma_{экр} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma].$$

После преобразований

$$\sigma_{экр} = p_B \frac{2}{1 - \frac{r_B^2}{r_H^2}} \leq [\sigma] = 200 \text{ МПа};$$

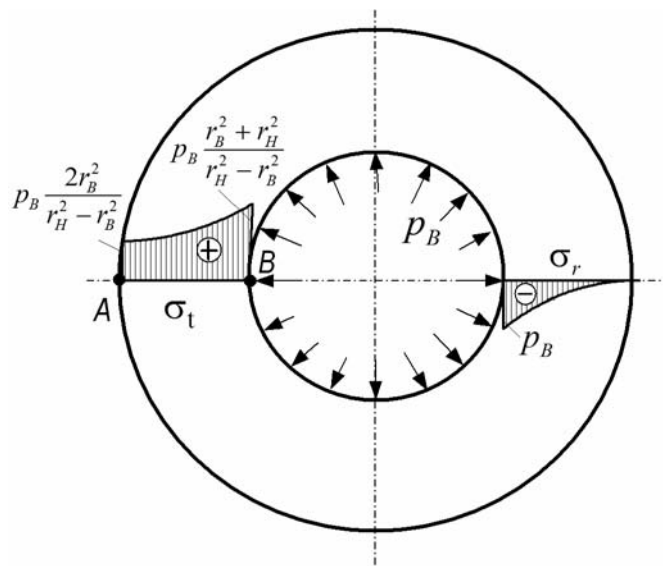


Рисунок 9.1

$$\sigma_{\text{экв}} = 80 \cdot 10^6 \frac{2}{1 - \frac{r_B^2}{(100 \cdot 10^{-3})^2}} = [\sigma] = 200 \cdot 10^6.$$

Откуда $r_B = 44$ мм, а толщина стенки трубы $\delta = 100 - 44 = 56$ мм.

Пример 2 – Проверить прочность стальной трубы по третьей теории прочности, если наружный радиус равен 70 мм, а внутренний радиус равен 65 мм. Труба находится под внешним давлением $p_B = 20$ МПа, допустимое напряжение материала $[\sigma] = 160$ МПа (рисунок 9.2).

Решение

В результате внешнего давления опасными являются точки внутренней поверхности (точки В), которые находятся в условиях одноосного сжатия под действием напряжений:

$$\sigma_r = 0 = \sigma_1; \quad \sigma_2 = 0; \quad \sigma_t = -p_H \frac{2r_H^2}{r_H^2 - r_B^2} = \sigma_3.$$

Эпюры распределения напряжений показаны на рисунке 9.2.

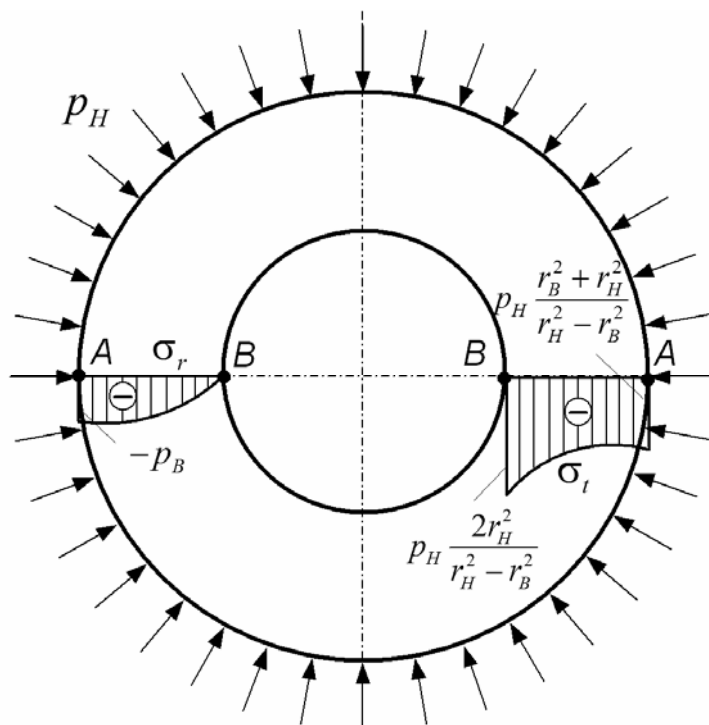


Рисунок 9.2

Эквивалентное напряжение по теории наибольших касательных напряжений

$$\sigma_{\text{экв}} = p_H \frac{2r_H^2}{r_H^2 - r_B^2} \leq [\sigma];$$

$$\sigma_{\text{экв}} = 20 \cdot 10^6 \frac{2 \cdot 0,07^2}{0,07^2 - 0,06^2} = 150,7 \cdot 10^6 \text{ Па} = 150,7 \text{ МПа} \leq [\sigma] = 160 \text{ МПа}.$$

Условие прочности выполняется.

Пример 3 – Определить максимально допустимое давление p в цилиндрическом баллоне радиусом $R = 200$ мм, если толщина стенки $\delta = 4$ мм. Допустимое напряжение материала $[\sigma] = 160$ МПа. Расчет выполнить по четвертой теории прочности.

Решение

В цилиндрической тонкостенной оболочке, нагруженной внутренним давлением p , радиусы

$$\rho_m = \infty; \quad \rho_t = R; \quad \sigma_m = \sigma_x.$$

Тогда из формулы Лапласа $(\sigma_m / \rho_m) + (\sigma_t / \rho_t) = p / \delta$

$$\sigma_t = \frac{pR}{\delta} = \frac{p200}{4} = 50p; \quad \sigma_m = \frac{pR}{2\delta} = \frac{p200}{2 \cdot 4} = 25p.$$

Условие прочности по четвертой теории

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\sigma_m^2 + \sigma_t^2 - \sigma_m \sigma_t} \leq [\sigma];$$

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{(25p)^2 + (50p)^2 - (25p \cdot 50p)} = \sqrt{1875p^2} = 43,3p = [\sigma].$$

Допустимое давление

$$p = \frac{[\sigma]}{43,3} = \frac{160}{43,3} = 3,7 \text{ МПа}.$$

Пример 4 – Определить толщину стенки сферического сосуда, находящегося под давлением $p = 100$ атм ≈ 10 МПа, если его радиус $R = 1,5$ м. Допустимое напряжение материала $[\sigma] = 200$ МПа. Расчет выполнить по третьей теории прочности.

Решение

В сферической тонкостенной оболочке возникают напряжения

$$\sigma_1 = \sigma_t; \quad \sigma_2 = \sigma_m; \quad \sigma_3 = \sigma_r = 0; \quad \sigma_m = \sigma_t = \frac{pR}{2\delta}.$$

По третьей теории прочности

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_t - \sigma_r = \frac{pR}{2\delta} - 0 \leq [\sigma].$$

Толщина стенки сосуда

$$\delta = \frac{pR}{2[\sigma]} = \frac{10 \cdot 1,5}{2 \cdot 200} = 0,0375 \text{ м} = 37,5 \text{ мм}.$$

Тестовые вопросы для самопроверки

1 Толстостенными называются оболочки, у которых отношение толщины стенки δ к внутреннему радиусу r_B :

- а) больше 0,1;
- б) больше 0,2;
- в) больше 0,3;
- г) больше 0,4.

2 Окружное и радиальное напряжения определяются:

- а) по формуле Журавского;
- б) по формуле Эйлера;
- в) по формуле Ляме;
- г) по формуле Ясинского.

10 Динамическое действие нагрузок

Пример 1 – Груз $G = 10$ кН падает с высоты $h = 10$ см на двутавровую стойку № 20 ($A = 26,8 \text{ см}^2$) длиной $l = 4$ м (рисунок 10.1, а). Модуль упругости $E = 2 \cdot 10^5$ МПа. Определить нормальное напряжение и укорочение стойки при ударе, если стойка не теряет устойчивость.

Решение

Расчетными формулами при ударе являются следующие:

$$\sigma_{\text{дин}} = k \cdot \sigma_{\text{ст}};$$

$$\Delta_{дин} = k \cdot \Delta_{ст};$$

$$k = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{ст}}},$$

где k – динамический коэффициент при ударе.

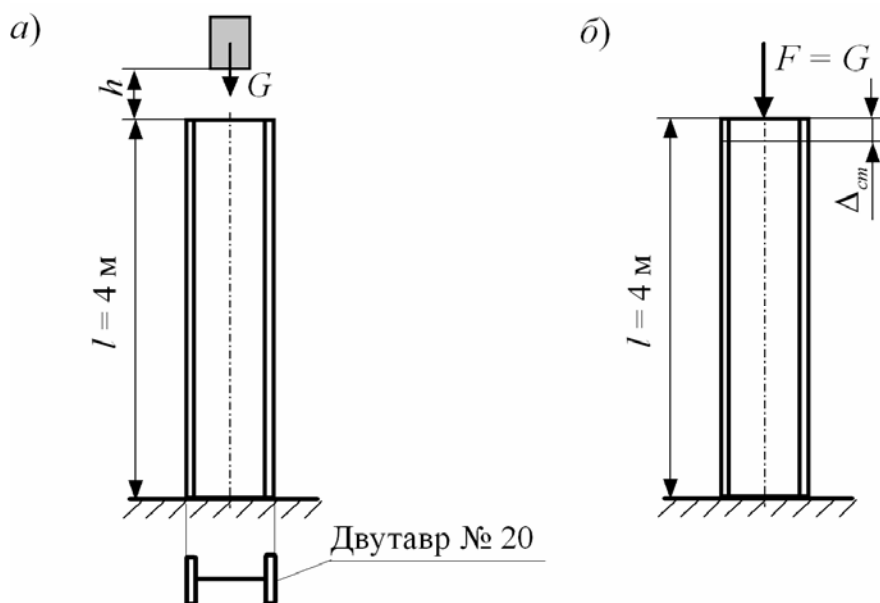


Рисунок 10.1

Определим нормальное напряжение и укорочение стойки, соответствующие статическому способу приложения силы (рисунок 10.1, б):

$$\sigma_{ст} = \frac{F}{A} = \frac{10 \cdot 10^3}{26,8 \cdot 10^{-4}} = 3,73 \cdot 10^6 \text{ Па};$$

$$\Delta_{ст} = \frac{Fl}{EA} = \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 4}{2 \cdot 10^{11} \cdot 26,8 \cdot 10^{-4}} = 0,746 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 0,746 \cdot 10^{-2} \text{ см}.$$

Динамический коэффициент

$$k = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 10}{0,746 \cdot 10^{-2}}} = 1 + 51,8 = 52,8.$$

Динамическое напряжение

$$\sigma_{дин} = k \cdot \sigma_{ст} = 52,8 \cdot 3,73 = 193 \text{ МПа}.$$

Укорочение стойки при ударе

$$\Delta_{\text{дин}} = k \cdot \Delta_{\text{ст}} = 52,8 \cdot 0,746 \cdot 10^{-2} = 0,394 \text{ см.}$$

Пример 2 – На двутавровую балку № 20 длиной $l = 9$ м, свободно лежащую на двух шарнирных опорах, с высоты $h = 45$ мм падает груз $G = 1,2$ кН (рисунок 10.2). Модуль упругости материала $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, осевой момент инерции двутавра $I_x = 1840$ см⁴, осевой момент сопротивления $W_x = 184$ см³.

Определить наибольшее нормальное напряжение в балке и прогиб в месте падения груза.

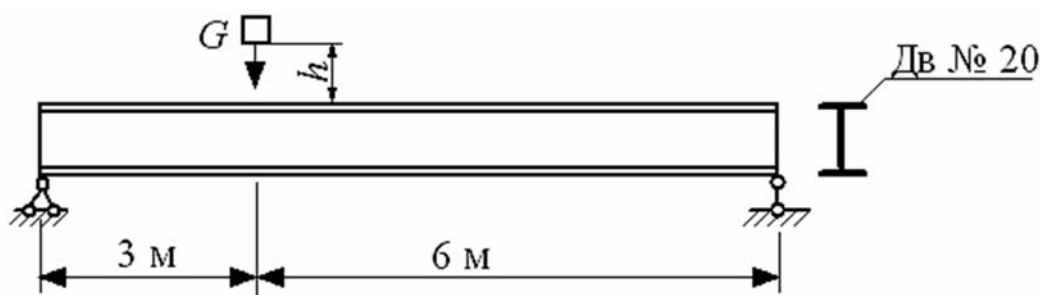


Рисунок 10.2

Решение

Рассчитываем балку на действие статической нагрузки: $F = G = 1,2$ кН (рисунок 10.3, а).

Реакции на опорах

$$\sum M_A = 0; \quad F \cdot 3 - R_B \cdot 9 = 0;$$

$$R_B = \frac{F \cdot 3}{9} = \frac{1,2 \cdot 3}{9} = 0,4 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = 0; \quad F \cdot 6 - R_A \cdot 9 = 0;$$

$$R_A = \frac{F \cdot 6}{9} = \frac{1,2 \cdot 6}{9} = 0,8 \text{ кН.}$$

Строим эпюру изгибающих моментов M_P , по которой определяем максимальный момент: $M_{\text{max}} = 2,4$ кН · м.

Определим максимальное нормальное напряжение, соответствующие статическому способу приложения силы:

$$\sigma_{\text{ст}} = \frac{M_{\text{max}}}{W_x} = \frac{2,4 \cdot 10^3}{184 \cdot 10^{-6}} = 13 \cdot 10^6 \text{ Па} = 13 \text{ МПа.}$$

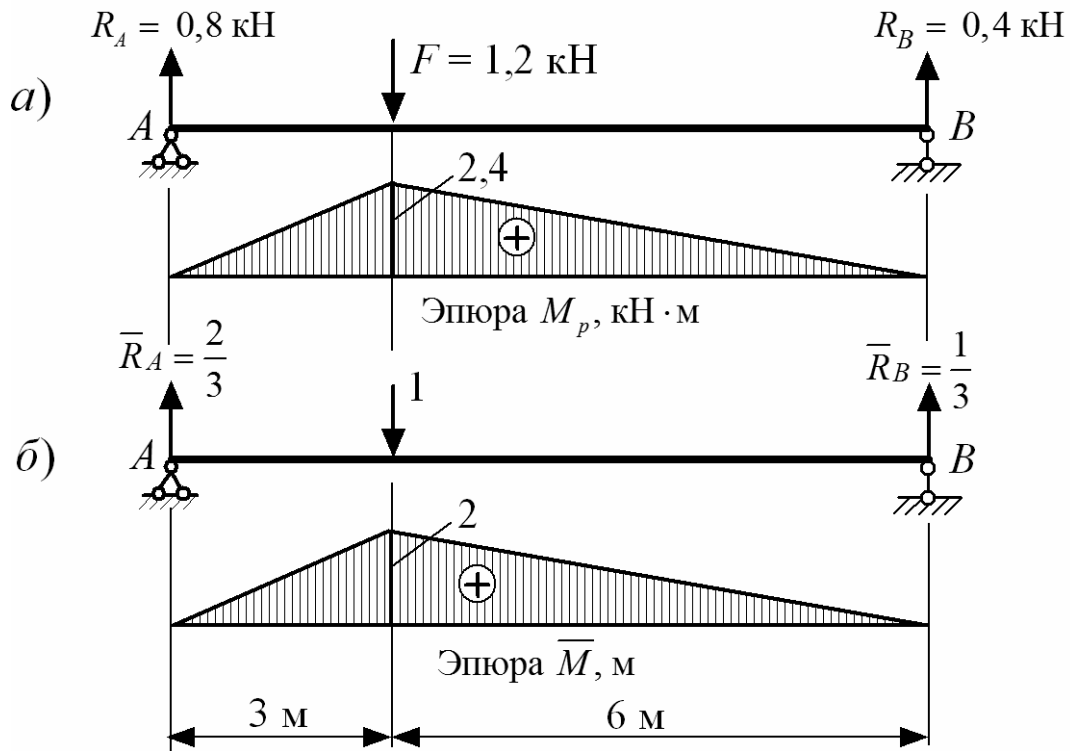


Рисунок 10.3

Для определения прогиба Δ_{cm} составим вспомогательную систему, в которой к балке прикладывается единичная сила (рисунок 10.3, б). Реакции на опорах

$$\sum M_A = 0; \quad 1 \cdot 3 - \bar{R}_B \cdot 9 = 0;$$

$$\bar{R}_B = \frac{1 \cdot 3}{9} = \frac{1}{3};$$

$$\sum M_B = 0; \quad 1 \cdot 6 - \bar{R}_A \cdot 9 = 0;$$

$$\bar{R}_A = \frac{1 \cdot 6}{9} = \frac{2}{3}.$$

Строим эпюру изгибающих моментов \bar{M} .

Определяем прогиб балки при статическом действии нагрузки, перемножая эпюры \bar{M} и M_p по правилу Верещагина:

$$\begin{aligned} \Delta_{cm} &= \frac{1}{EI_x} \left(\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2,4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2,4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 \right) = \\ &= \frac{14,4 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 1840 \cdot 10^{-8}} = 3,9 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 3,9 \text{ мм}. \end{aligned}$$

Определяем динамический коэффициент:

$$k = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{cm}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 45}{3,9}} = 5,9.$$

Наибольшее нормальное напряжение в балке при ударе

$$\sigma_{дин} = k \cdot \sigma_{cm} = 5,9 \cdot 13 = 76,7 \text{ МПа.}$$

Прогиб в месте падения груза

$$\Delta_{дин} = k \cdot \Delta_{cm} = 5,9 \cdot 3,9 = 23,01 \text{ мм.}$$

Тестовые вопросы для самопроверки

1 Динамический коэффициент при ударе вычисляется по формуле:

а) $k = 1 + \frac{a}{q}$;

в) $k = 1 + \frac{\sigma_m}{\sigma_{max}}$;

б) $k = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{cm}}}$;

г) $k = 1 + \sqrt{1 + \frac{\sigma_m}{\sigma_{max}}}$.

2 Гипотезы предполагают, что удар:

- а) абсолютно упругий;
- б) абсолютно неупругий;
- в) упругопластический;
- г) вязкий.

3 Динамические напряжения равны:

а) $\sigma_{дин} = \sigma_{cm} (1 + k)$;

в) $\sigma_{дин} = \sigma_{cm} / k$;

б) $\sigma_{дин} = \sigma_{cm} (1 + \sqrt{k})$;

г) $\sigma_{дин} = \sigma_{cm} \cdot k$.

11 Расчет на прочность при циклических нагрузках

Пример – Проверить прочность стального вала диаметром $d = 40$ мм, на который действует циклически изменяющийся изгибающий момент: $M_{max} = 700$ Н·м, $M_{min} = -700$ Н·м. Острые концентраторы напряжений отсутствуют.

Исходные данные: масштабный коэффициент $k_d = 0,85$; коэффициент качества обработки поверхности $k_F = 1$; нормативный коэффициент запаса усталостной прочности $[n] = 2$; предел выносливости материала $\sigma_{-1} = 380$ МПа; предел текучести $\sigma_T = 600$ МПа; предел прочности $\sigma_B = 800$ МПа.

Решение

Момент сопротивления поперечного сечения вала

$$W_x = \frac{\pi \cdot d^3}{32} = \frac{3,14 \cdot 4^3}{32} = 6,28 \text{ см}^3.$$

Максимальное и минимальное напряжение цикла

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{730}{6,28 \cdot 10^{-6}} = 116,24 \text{ МПа}; \quad \sigma_{\min} = -116,24 \text{ МПа}.$$

Амплитуда цикла

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} = \frac{116,24 - (-116,24)}{2} = 116,24 \text{ МПа}.$$

Эффективный коэффициент концентрации напряжений

$$k_\sigma = 1,2 + 0,2 \cdot \frac{\sigma_B - 400}{1100} = 1,2 + 0,2 \cdot \frac{800 - 400}{1100} = 1,27.$$

Действительный коэффициент запаса прочности по усталостному разрушению

$$n = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{k_\sigma}{k_d \cdot k_F} \sigma_a} = \frac{380}{\frac{1,27}{0,85 \cdot 1} \cdot 116,24} = 2,19.$$

Коэффициент запаса прочности по текучести

$$n_T = \frac{\sigma_T}{\sigma_a} = \frac{600}{116,24} = 5,2.$$

Условие прочности выполняется, т. к. $n_{\min} = n = 2,19 > [n] = 2$.

Тестовые вопросы для самопроверки

1 Выносливостью называется способность материала сопротивляться разрушению при действии:

а) временных нагрузок;

- б) переменных по величине нагрузок;
- в) напряжений, циклически изменяющихся во времени;
- г) постоянных нагрузок.

2 Предел выносливости при увеличении размеров образца:

- а) уменьшается;
- б) не изменяется;
- в) меняется по определенному закону;
- г) увеличивается.

3 Наибольшее значение максимального напряжения цикла, при котором образец не разрушается до базы испытания, называется:

- а) пределом прочности;
- б) пределом выносливости;
- в) номинальным напряжением;
- г) пределом текучести.

12 Основы расчетов за пределами упругости

Пример – Определить допустимую нагрузку $[F]$ статически неопределимого стержня (рисунок 12.1), если площадь поперечного сечения $A = 10 \text{ см}^2$.

Исходные данные: модуль упругости материала $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, допустимое напряжение $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$, предел текучести $\sigma_T = 240 \text{ МПа}$, коэффициент запаса прочности по предельной нагрузке $n_F = 1,75$.

Решение

Расчет по допустимым напряжениям.

Выразим реакцию R_A из деформационного уравнения:

$$\Delta \ell = \frac{5R_A}{EA} - \frac{4F}{EA} = 0; \quad R_A = 0,8F.$$

Из уравнения статического равновесия сил реакция R_B

$$\sum Z = R_A - F + R_B = 0;$$

$$R_B = -R_A + F = -0,8F + F = 0,2F.$$

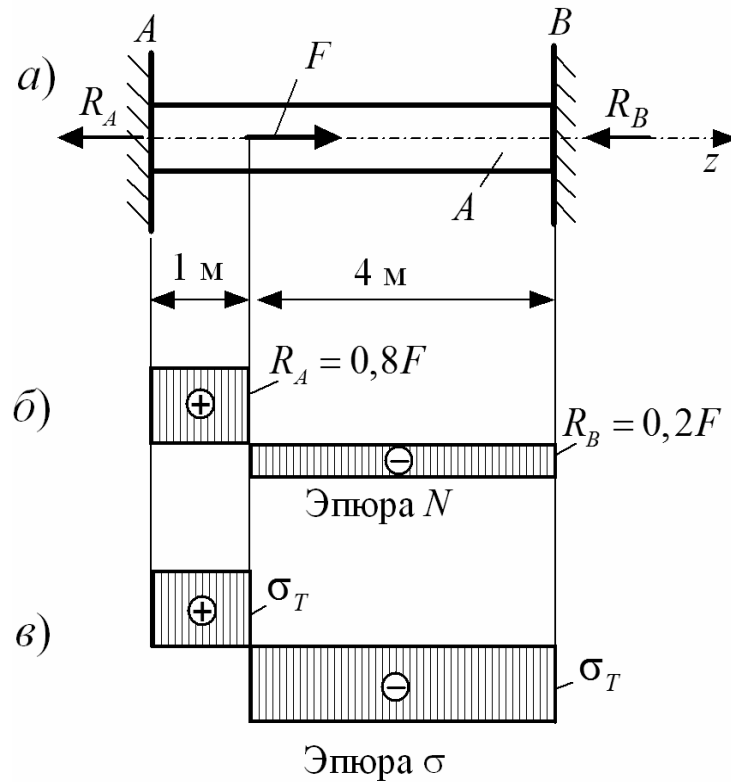


Рисунок 12.1

Определим допустимую силу из условия прочности (см. рисунок 12.1, б):

$$\sigma_{\max} = \frac{N_{\max}}{A} = \frac{0,8[F]}{A} = [\sigma];$$

$$[F] = \frac{A \cdot [\sigma]}{0,8} = \frac{10 \cdot 10^{-4} \cdot 160 \cdot 10^6}{0,8} = 200 \cdot 10^3 \text{ Н} = 200 \text{ кН.}$$

Расчет по предельной нагрузке.

В предельном состоянии напряжение на всех участках стержня достигло предела текучести (см. рисунок 12.1, в). Следовательно, реакции на опорах достигли значения $\sigma_T \cdot A$. Уравнение статического равновесия будет иметь вид:

$$\sum Z = R_A - F_{\text{пред}} + R_B = \sigma_T \cdot A - F_{\text{пред}} + \sigma_T \cdot A = 0.$$

Откуда

$$F_{\text{пред}} = 2\sigma_T \cdot A = 2 \cdot 240 \cdot 10^6 \cdot 10 \cdot 10^{-4} = 480 \cdot 10^3 \text{ Н} = 480 \text{ кН.}$$

Допустимая сила

$$[F] = \frac{F_{пред}}{n_F} = \frac{480}{1,75} = 274 \text{ кН.}$$

Тестовые вопросы для самопроверки

- 1 При предельном изгибающем моменте напряжения равны σ_T :
 - а) на внешних волокнах;
 - б) в центре поперечного сечения;
 - в) во всем сечении;
 - г) в ядре сечения.
- 2 Расчет в упругопластической стадии деформирования производят:
 - а) для хрупких материалов;
 - б) для анизотропных материалов;
 - в) для всех материалов;
 - г) для пластичных материалов.

Список литературы

- 1 **Кузменко, И. М.** Механика материалов: учебное пособие: в 2 ч. / И. М. Кузменко. – Могилев: Беларус.-Рос. ун-т, 2020. – Ч. 1. – 289 с.
- 2 **Кузменко, И. М.** Механика материалов: учебное пособие: в 2 ч. / И. М. Кузменко. – Могилев: Беларус.-Рос. ун-т, 2020. – Ч. 2. – 281 с.
- 3 Сопротивление материалов в вопросах-ответах и сборник задач для самостоятельной работы с примерами их решений : учебное пособие / А. Г. Схиртладзе [и др.]. – 3-е изд., стер. – Старый Оскол : ТНТ, 2019. – 324 с.
- 4 **Дарков, А. В.** Сопротивление материалов : учебник / А. В. Дарков, Г. С. Шпиро. – 5-е изд., перераб. и доп., репринт. изд. – Москва : Альянс, 2018. – 624 с.
- 5 **Беляев, Н. М.** Сопротивление материалов: учебное пособие / Н. М. Беляев. – 15-е изд., перераб. и стер. – Москва : Альянс, 2015. – 608 с.
- 6 **Скопинский, В. Н.** Практическое руководство к расчетам по сопротивлению материалов: учебное пособие / В. Н. Скопинский. – Москва: МГИУ, 2007. – 240 с.
- 7 **Писаренко, Г. С.** Справочник по сопротивлению материалов / Г. С. Писаренко, Ф. П. Яковлев, В. В. Матвеев. – 5-е изд., перераб. и доп. – Киев: Дельта, 2008. – 816 с.
- 8 **Подскребко, М. Д.** Сопротивление материалов: учебник для вузов / М. Д. Подскребко. – Минск : Вышэйшая школа, 2007. – 797 с.
- 9 **Старовойтов, Э. И.** Сопротивление материалов: учебник для вузов / Э. И. Старовойтов. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 384 с.
- 10 **Степин, П. А.** Сопротивление материалов: учебник / П. А. Степин. – 10-е изд., стер. – Санкт-Петербург: Лань, 2010. – 320 с.
- 11 **Окопный, Ю. А.** Механика материалов и конструкций: учебник для вузов / Ю. А. Окопный, В. П. Радин, В. П. Чирков. – 2-е изд., доп. – Москва: Машиностроение, 2002. – 436 с.