УДК 536.24+66.015.23

РАСЧЕТ ЛИНЕЙНОГО ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ В КРУГОВОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ СТЕНКЕ

А. И. КАШПАР, В. Н. ЛАПТИНСКИЙ
Государственное научное учреждение
«ИНСТИТУТ ТЕХНОЛОГИИ МЕТАЛЛОВ НАН Беларуси»
Могилев, Беларусь

Рассмотрим задачу об определении распределения температуры в круговой цилиндрической оболочке (стенке), имеющей достаточно большую длину, чтобы теплоотводом с торцов можно было пренебречь, при этом граничные условия не зависят от полярного угла φ и продольной координаты z [1]. Поле температур в стационарном случае изменяется только по радиусу r. Изучим температурное поле в цилиндрической стенке с постоянно действующим внутренним источником теплоты в случае, когда его удельная мощность − линейная функция температуры вида $q_v = w_0(1+bT)$.

Соответствующая краевая задача для уравнения теплопроводности в цилиндрической системе координат имеет вид [2]:

$$\frac{d^2T}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dT}{dr}+\frac{w_0}{\lambda}(1+bT)=0;\quad T(r_1)=\tilde{T}_1,\quad T(r_2)=\tilde{T}_2,\quad 0<r_1<r_2. \quad (1)$$

Для построения решения задачи (1) воспользуемся модификацией методики [3], при этом функцию $T(r)$ будем искать в виде

$$T(r)=\sum_{k=0}^{\infty}T_k(r),$$

где

$$T_0(r)=\tilde{T}_1+\int_{r_1}^{r}Y_0(s)ds,\qquad Y_0(r)=-\frac{w_0}{\lambda}\int_{r_1}^{r_2}\varphi(r,s)ds+\frac{\tilde{T}_2-\tilde{T}_1}{r_2-r_1},$$

$$T_{k+1}(r)=\int_{r_1}^{r}Y_{k+1}(s)ds,\qquad Y_{k+1}(r)=-\int_{r_1}^{r_2}\varphi(r,s)\left(\frac{w_0 b}{\lambda}T_k(s)+\frac{1}{s}Y_k(s)\right)ds,$$

$$\varphi(r,s)=\begin{cases}\dfrac{s-r_1}{r_2-r_1}, & r_1\le s\le r\le r_2,\\[2mm] \dfrac{s-r_2}{r_2-r_1}, & r_1\le r< s\le r_2.\end{cases}$$

Выполним соответствующие вычисления при следующих исходных данных:

$$\lambda=45.4,\quad w_0=1000,\quad b=0.1,\quad r_1=1,\quad r_2=1.1,\quad \tilde{T}_1=100,\quad \tilde{T}_2=10. \quad (2)$$

Используя приведенную выше методику, получим:

Электронная библиотека Белорусско-Российского университета

$$T(r) \approx T_1(r) = T_0(r) + T_1(r) = 1.854224r^4 + 308.666702r^3 - 1042.612473r^2 -$$
$$-661.153893r + 877.848101r\ln r + 1493245142, \qquad (3)$$
$$T(r) \approx T_2(r) = T_0(r) + T_1(r) + T_2(r) = -0.130416r^6 - 32.559779r^5 + 182.682190r^4 +$$
$$+335.362140r^3 - 543.089153r^2 - 1775.337088r - 308.666702r^3 \ln r -$$
$$-661.153893r\ln r - 438.924051r\ln^2 r + 1933.072105. \qquad (4)$$

Сравним полученные приближенные решения (3), (4) с точным решением, представленным в [2]:

$$T(r) = c_1 J_0\left(r\sqrt{w_0 b/\lambda}\right) + c_2 Z_0\left(r\sqrt{w_0 b/\lambda}\right) - 1/b, \qquad (5)$$

где J_0, Z_0 − функции Бесселя I и II родов нулевого порядка. Для получения значений J_0, Z_0 воспользуемся специальными функциями, встроенными в Mathcad. Используя исходные данные (2) в уравнении (5), получим $c_1 = 643.660798, c_2 = -652.843422$.

Вычислим соответствующие максимальные относительные погрешности в точках $r_i = 1 + 0.01i \quad (i = 0,1...,10)$:

$$\sigma_1 = \max_i \left|\frac{T(r_i) - T_1(r_i)}{T(r_i)}\right| \cdot 100\% = 0.0182\% \ ;$$

$$\sigma_2 = \max_i \left|\frac{T(r_i) - T_2(r_i)}{T(r_i)}\right| \cdot 100\% = 0.00037\% .$$

Аналогично сравним функции $\tilde{Y}_1(r)$, $\tilde{Y}_2(r)$ с $Y(r) = dT(r)/dr$:

$$\delta_1 = \max_i \left|\frac{Y(r_i) - Y_1(r_i)}{Y(r_i)}\right| \cdot 100\% = 0.0731\% \ ;$$

$$\delta_2 = \max_i \left|\frac{Y(r_i) - Y_2(r_i)}{Y(r_i)}\right| \cdot 100\% = 0.00061\% .$$

Из анализа полученных результатов видно, что предложенная методика решения краевой задачи (1) достаточно удобная для применений и поэтому может быть использована для решения соответствующих прикладных задач теплофизики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Основы теплопередачи в авиационной и ракетно-космической технике / Под ред. В. К. Кошкина. – М. : Машиностроение, 1975. – 624 с.

2. Теория тепломассообмена: учебник для вузов/ С. И. Исаев [и др.]; под ред. А. И. Леонтьева. – М. : Высш. шк., 1979. – 495 с.

3. **Кашпар, А. И.** К расчету температурного поля в круговой цилиндрической стенке / А. И. Кашпар, В. Н. Лаптинский // Материалы, оборудование и ресурсосберегающие технологии: материалы Междунар. науч.-техн. конф., Могилев, 18–19 апр. 2013г. – Могилев : Белорус.-Рос. ун-т, 2013. – С.39.

Электронная библиотека Белорусско-Российского университета